Lista de Exercícios 1
BC1427 – Equações Diferenciais Ordinárias

Entregar *no mínimo quatro exercícios* até 20 de março durante a aula

1. Considere os problemas de valor inicial (PVI's)

   (i) $x' = -\frac{1}{x}$, $x(0) = 0$;

   (ii) $x' = \sqrt{1 - x^2}$, $y(0) = 2$;

   (iii) $x' = x^2$, $x(0) = x_0 \neq 0$.

   (a) Prove que o PVI (i) não possui solução em nenhum $t > 0$.

   (b) Prove que o PVI (ii) não possui solução.

   (c) Prove que o PVI (iii) possui uma solução que diverge em $t = \frac{1}{x_0}$.

   (*Dica:* reescreva as equações acima como $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g \circ x) = h(t)$)

2. Reduza as seguintes EDO's escalares a sistemas de primeira ordem na forma normal. Caso a equação seja linear, escreva o lado direito da equação em forma matricial.

   (a) $x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$ (equação de van der Pol com parâmetro $\epsilon > 0$).

   (b) $t^2x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0$ (equação de Bessel de índice $n \in \mathbb{N}$);

   (c) $(1 - t^2)x'' - tx' + p^2x = 0$ (equação de Chebyshev de índice $p \geq 0$);

   (d) $t(1 - t)x'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)t]x' - \alpha\beta x = 0$ (equação hipergeométrica com parâmetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$);

3. Seja X um campo vetorial $\mathscr{C}^1$ no aberto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que para todo $x_0 \in \tilde{\Omega}$ existe uma única solução maximal $\phi : I \to \tilde{\Omega}$ do problema de valor inicial $x' = X(x)$, $x(0) = x_0$, onde $I = (\omega_-, \omega_+)$ é o intervalo (aberto) maximal de existência.

(a) Suponha que $\phi(t_1) = \phi(t_2)$ para algum par $t_1 \neq t_2 \in I$. Prove que $I = \mathbb{R}$ e $\phi(t+T) = \phi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $T = t_2 - t_1$. Soluções com a propriedade acima são denominadas *periódicas* (de período T). (*Dica:* use a propriedade dada para estender o intervalo de existência de ϕ ao RR inteiro)

(b) Suponha a situação dada no item (a). Prove que o conjunto

$$C = \{T \in \mathbb{R} | \phi(t+T) = \phi(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

é um *subgrupo aditivo* de $\mathbb{R}$, i.e. $0 =\in C$ e $T, T_1, T_2 \in C$ implica $-T, T_1 + T_2 \in C$. Prove também que, se $\tau = \inf\{T \in C | T > 0\} > 0$, então $C = \mathbb{Z}\tau = \{n\tau | n \in \mathbb{Z}\}$. (*Importante:* você deve provar primeiro que $\tau \in C$! Faça isso provando que C é um subconjunto *fechado* de $\mathbb{R}$, i.e. se $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T \in \mathbb{R}$ e $T_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $T \in C$)

(c) Suponha a situação dada no item (a), e seja τ como definido no item (b). O que acontece se $\tau = 0$?

(d) Retornemos ao caso geral. Prove que se

$$\lim_{t \to \omega_+} \phi(t) = p \in \tilde{\Omega}\,,$$

então p é um ponto singular de X (i.e. $X(p) = 0$) e $\omega_+ = +\infty$ (*Dica:* suponha que $X(p) \neq 0$ ou que $\omega_+ < +\infty$, e conclua que o intervalo de existência (ω_-, ω_+) não pode ser maximal).

4. Seja $X = \nabla f$, onde $f : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função $\mathscr{C}^r$ no aberto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, $r \geq 2$. Supomos que as mesmas hipóteses do exercício 1 são satisfeitas.

(a) Prove que X não possui órbitas periódicas não-triviais em $\tilde{\Omega}$. Em outras palavras, dado qualquer $p \in \tilde{\Omega}$, prove que não existe $T > 0$ tal que $\alpha_T^X(p) = p$, onde α^X é o fluxo de X.

(b) Suponha que X possui apenas pontos singulares isolados (i.e. dado qualquer ponto $q \in \Omega_0$ tal que $X(q) = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(q) = \{p \in \tilde{\Omega} | \|p - q\|_2 < \epsilon\} \subset \tilde{\Omega}$ não contém nenhum

outro ponto q' satisfazendo $X(q') = 0$ além de q). Prove que, para todo $p \in \Omega_0$, o *conjunto ω-limite* $\omega(p)$ de p, definido como $\omega(p) = \varnothing$ se $\omega_+(p) < +\infty$ e

$$\begin{aligned}\omega(p) =& \{q \in \Omega_0 : \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}},\ t_n \in \mathbb{R} \text{ tal que} \\ & t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ e } \alpha^X_{t_n}(p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q\}\end{aligned}$$

se $\omega_+(p) = +\infty$, satisfaz $\omega(p) = \varnothing$ ou $\omega(p) = \{q\}$, onde q é um ponto singular de X.

(*Dica:* note que se $t \mapsto \phi(t) = \alpha^X_t(\phi(0))$ é uma solução *não-constante* de X, então $\frac{\mathrm{d}f(\phi(t))}{\mathrm{d}t} = \langle \nabla f(\phi(t)), \nabla f(\phi(t))\rangle > 0$, i.e. $f \circ \phi$ é *estritamente crescente*)

5. Seja X um campo vetorial $\mathscr{C}^1$ no aberto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, cuja órbita através de $p \in \tilde{\Omega}$ é denotada por γ_p. Uma função contínua $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ é dita uma *integral primeira* de X em $\tilde{\Omega}$ se:

   (i) f for constante ao longo das órbitas de X (i.e. $f|_{\gamma_p}$ é constante para todo $p \in \Omega_0$), e

   (ii) f não é constante em nenhum aberto $U \subset \tilde{\Omega}$.

   Prove que, se $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ é $\mathscr{C}^1$, tal que $Df(p)(X(p)) = 0$ e $Df(p) \neq 0$ para todo $p \in \Omega_0$, então f é uma integral primeira de X em Ω_0.

6. Seja $\Xi \subset \mathbb{R}$ aberto e conexo, $a \in \Xi$, $f : \Xi \to \mathbb{R}$, $K : \Xi \times \Xi \to \mathbb{R}$ contínuas, $\lambda \neq 0$, e $\phi : \Xi \to \mathbb{R}$ solução (contínua) da *equação integral de Volterra*

$$\phi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,s)\phi(s)\mathrm{d}s\ .$$

   (a) Suponha ϕ e f continuamente diferenciáveis. Escreva a EDO e a condição inicial que ϕ satisfaz.

   (b) Defina para todo $k \in \mathbb{N}$

$$r_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \lambda^j \phi_j(t)\ ,$$

onde $\phi_0(t) = f(t)$ e $\phi_j(t) = \int_a^t K(t,s)\phi_{j-1}(s)\mathrm{d}s$. Prove que se f e K são *limitadas* em $[a,T] \subset \Xi$, onde $T > a$, então $r_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ uniformemente em $t \in [a,T]$, e que ϕ é solução da equação integral de Volterra dada acima.

7. (a) Seja $\Phi : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ continuamente diferenciável, tal que $\Phi(t)$ é não-singular para todo $t \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma única $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ contínua tal que Φ é solução fundamental de $x' = A(t)x$.

   (b) Seja $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ contínua e anti-simétrica para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e. $A(t)^T = -A(t)$. Prove que toda solução fundamental Φ de $x' = A(t)x$ satisfaz $\Phi(t)^T\Phi(t) = C$, onde $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Em particular, se $\Phi(t_0)$ é ortogonal para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ (i.e. $C = \mathbb{1}$), então $\phi(t)$ é ortogonal para todo $t \in \mathbb{R}$.

8. Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

   (a) Prove que $\det e^A = e^{\mathrm{Tr}\ A}$, onde $\mathrm{Tr}\ A = \sum_{j=1}^n [A]_{jj}$ é o traço de A.

   (b) Prove que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ se e somente se $[A,B] \doteq AB - BA = 0$.

   (c) Suponha que $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Prove que $\Phi(t) = e^{-t(A+B)}e^{tB}e^{tA}$ é solução da EDO linear matricial $X' = t[A,B]X$.

   (d) Suponha que A, B satisfazem as hipóteses do item (c). Prove que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tB}e^{tA} = e^{t(A+B)}e^{\frac{t^2}{2}[A,B]}\,.$$