Simulação P2 Algebra Linear
Stefano Nardulli
29/04/2019 19:00-21:00

Observem bem que esta prova não é para ser feita inteira num tempo de duas horas. A ideia é de saber escolher o que se sabe fazer primeiro e o que não se sabe fazer deixa-lo para depois ter feito o que se sabe fazer. É esperado que pelo menos o aluno não zere a soma da pontuação dos últimos 2 problemas.

1. (0,5 Ponto) (Feito em sala de aula) Enunciar e provar um critério de diagonalização por matrizes quadradas (multiplicidade álgebrica=multiplicidade geometrica).
2. (1 Ponto) (Feito em sala de aula) Enunciar e provar o teorema de Cayley-Hamilton.
3. (1 Ponto) Provar que se $AB = BA$, então $e^{(A+B)} = e^A e^B$, onde $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$.
4. Exercício 9 Lista 5 da gradmat.
5. Exercício 5 Lista 5 da gradmat.
6. Exercício 7 da Lista 6 da gradmat.
7. (0,5 ponto) (Feito em sala de aula) Provar que se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, \dots a_n \in \mathbb{Z},$$

   com $a_n, a_0 \neq 0$. Então as eventuais raízes racionais $\frac{p}{q}$ de P com $m.c.d.(p, q) = 1$ são tais que $p|a_0$ e $q|a_n$.

8. (Feito em sala de aula) Sejam (obviamente na prova vai ter só uma matriz)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Dizer se A é diagonalizável caso o seja achar os autovalores, os autoespaços e uma base de autovetores, depois encontrar a matriz P de mudança de base tal que

$$P^{-1} A P = D, \tag{1}$$

   onde D é uma matriz diagonal. Calcular P^{-1}, com o método de Gauss, ou Cayley-Hamilton (dar uma expressão polinomial em P de P^{-1} além de calcular o valor efetivo), ou matrizes de co-fatores. Verificar fazendo o produto de matrizes que $P^{-1}P = I_4$ é verdadeira. Verificar fazendo o produto de matrizes que (1) é verdadeira. Caso A seja inversível calcular a inversa com os três métodos acima mencionados.