Segunda Chamada
Licenciatura em Matemática noturno
UFRJ

Stefano Nardulli

11/03/2016

Durao das 18:30 horas às 21:50 horas, é permitido só o uso da caneta ou do lapis, não é permitido ir no banheiro, não é possível sair antes de 1 hora do incio da prova e não é permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Provar que se $\mathbb{K}$ um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$. (Feito em aula)
2. Mostrar que dada uma família de conjuntos $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, onde os X_i são conjuntos enumeráveis infinitos o produto cartesiano $\Pi_{i\in\mathbb{N}}X_i$ não é enumerável.
3. Dar um exemplo de corpo não Arquimediano. Sugestão: considerar o corpo das funções racionais com a ordem lexicográfica ou a reta hyperreal. (Feito em aula)
4. Mostrar que se $F_1, F_2, ..., F_n, ...$ são fechados com interior vazio então $S = \bigcup_n F_n$ tem interior vazio. (Teorema de Baire)
5. Enunciar e demonstrar a fórmula de Taylor com resto de Lagrange. (Feito em aula)
6. Provar que uma função f definida num intervalo I de classe C^2 é convexa se e somente se a derivada segunda $f'' \geq 0$.
7. Provar a desigualdade geométrico-aritmética. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, então
$$(\Pi_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i. \tag{1}$$
8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $f(a) = f(b) = 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Provar que $f(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$.
9. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se $\lim_{x\to+\infty} = f(a)$, então existe $x \in]a, b[$ tal que $f''(x) = 0$.

10. Enunciar e demonstrar o Teorema de Mertens. (Feito em aula)

11. Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Demonstrar que $\sum_n 2^n a_{2^n}$ é convergente se e só se $\sum_n a_n$ é convergente.

12. Estabelecer o caráter da série $\sum_n \frac{1}{n \log(n^2+1)}$.

13. Mostrar que se $\sum_n a_n^2$ converge então $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge.

14. Enunciar e demonstrar a Fórmula de Taylor com resto integral. (Feito em aula)

15. Enunciar e demonstrar o Teorema fundamental do cálculo integral. (Feito em aula)

16. Mostrar que a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ é convergente mas não converge absolutamente.