

Simulação
Primeira Prova Análise Real
Licenciatura em Matemática noturno
UFRJ

Stefano Nardulli

18/12/2015

1. Provar que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.
2. Provar que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, com $p \in \mathbb{N}$ número primo, é um corpo.
3. Provar que não existe uma bijeção entre um conjunto qualquer X e $\mathcal{P}(X)$.
4. Mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ não é enumerável.
5. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a, b\}$.
6. Calcular $\sup(A)$ e $\inf(A)$, onde $A := \left\{ \arctan \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^7 - 31x^5 + 2} \right) : x \in \mathbb{R}, x^7 - 31x^5 + 2 \neq 0 \right\}$.
7. Mostrar que $n^k \leq \frac{9}{8} (\min\{n, k\})^{\max\{n, k\}}$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, com $n, k \geq 2$.
8. Mostrar que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.
9. Mostrar que toda função contínua num subconjunto compacto da reta é uniformemente contínua.
10. Dizer quantas raízes reais tem o polinômio $P_n(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100$.

Gabarito

1. [dN14]
2.
3. [dN14], [Lim12]
4. [dN14], [Lim12]
5. [dN14]

6. $\sup(A) = \frac{\pi}{2}$, $\inf(A) = -\frac{\pi}{2}$.
7. Sugestão: considerar primeiro o caso $n \leq k$ que é trivial. Depois no caso $n > k \leq 3$, relacionar a desigualdade a mostrar que a função $\log(x)/x$ é decrescente em um oportuno intervalo. Quando $k = 2$, usar o principio de indução.
8. [dN14], [Lim12]
9. [dN14], [Lim12]
10. Sugestão: esboçar o gráfico de $P_n(x)$ ao variar de $n \in \mathbb{N}$.

Referências

- [dN14] Wladimir Augusto das Neves. *Uma introdução a análise real*. Didáticos. Editora UFRJ, 2014.
- [Lim12] Elon Lages Lima. *Curso de análise*, volume 1 of *Projeto Euclides*. IMPA, 14 edition, 2012.