Segunda Prova
Licenciatura em Matemática noturno
UFRJ

Stefano Nardulli

26/02/2016

Durao das 18:30 horas às 21:50 horas, é permitido só o uso da caneta ou do lapis, não é permitido ir no banheiro, não é possível sair antes de 1 hora do incio da prova e não é permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Enunciar e demonstrar o teorema dos valores intermediários pela derivada. (Feito em aula)

2. Enunciar e demonstrar o teorema do valor médio ou Teorema de Lagrange. (Feito em aula)

3. Provar que uma função f definida num intervalo I de classe C^2 é convexa se e somente se a derivada segunda $f'' \geq 0$.

4. Provar a desigualdade geometrico-aritmetica. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, então
$$(\Pi_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1}$$

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $f(a) = f(b) = 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Provar que $f(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$.

6. Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se $\lim_{x\to+\infty} = f(a)$, então existe $x \in]a, b[$ tal que $f''(x) = 0$.

7. Enunciar e demonstrar o Teorema de Mertens. (Feito em aula)

8. Enunciar e demonstrar o Teorema de Dirichlet. (Feito em aula)

9. Seja (a_n) uma sequência de números positivos. Demonstrar que $\sum_n 2^n a_{2^n}$ é convergente se e só se $\sum_n a_n$ é convergente.

10. Estabelecer o caráter da série $\sum_n \frac{1}{n \log^2(n^2+1)}$.

11. Mostrar que se $\sum_n a_n$ converge e $a_n > 0$ ento $\sum_n a_n^2$ e $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ convergem.

12. Mostrar que se $\sum_n a_n^2$ converge então $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge.

13. Enunciar e demonstrar a Fórmula de Taylor com resto integral. (Feito em aula)

14. Dar um exemplo de uma função não integrável que possua primitiva.

15. Enunciar e demonstrar o Teorema fundamental do cálculo integral. (Feito em aula)

16. Mostrar que a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ é convergente mas não converge absolutamente.

17. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrvel e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ montona com derivada g' integrável. Mostrar que se $g([c, d]) \subseteq [a, b]$, ento $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$.