

Simulação de Segunda Prova
Licenciatura em Matemática noturno
UFRJ

Stefano Nardulli

26/02/2016

Duração das 18:30 horas às 21:50 horas, permitido só o uso da caneta ou do lapis, no é permitido ir no banheiro, não é possível sair antes de 1 hora do início da prova e não é permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Enunciar e demonstrar o teorema dos valores intermediários ou Teorema de Lagrange. (Feito em aula)
2. Provar que uma função f definida num intervalo I de classe C^2 é convexa se e somente se a derivada segunda $f'' \geq 0$.
3. Provar a desigualdade geometrico-aritmetica. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, então

$$(\prod_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1)$$

4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável, com $f(a) = f(b) = 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Provar que $f(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$.
5. Seja $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes derivável. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$, então existe $x \in]a, b[$ tal que $f''(x) = 0$.
6. Enunciar e demonstrar o Teorema de Mertens. (Feito em aula)
7. Enunciar e demonstrar o Teorema de Dirichlet. (Feito em aula)
8. Estabelecer o caráter da série $\sum_n \frac{1}{n \log^2(n^2+1)}$.
9. Mostrar que se $\sum_n a_n$ converge e $a_n > 0$ então $\sum_n a_n^2$ e $\sum_n \frac{a_n}{1+a_n}$ convergem.
10. Mostrar que se $\sum_n a_n^2$ converge então $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge.
11. Enunciar e demonstrar a Fórmula de Taylor com resto integral. (Feito em aula)

12. Dar um exemplo de uma função não integrável que possua primitiva.
13. Enunciar e demonstrar o Teorema fundamental do cálculo integral. (Feito em aula)
14. Mostrar que a integral imprópria $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ é convergente mas não converge absolutamente.
15. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável e $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona com derivada g' integrável. Mostrar que se $g([c, d]) \subseteq [a, b]$, então $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) dt$.