

Primeira Prova Análise Real I
Bacharelado em Matemática
UFABC

Stefano Nardulli

20/07/2018

1. Provar que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.
2. Provar que $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$, com $p \in \mathbb{N}$ número primo, é um corpo, mostra que $\mathbb{Z}_p$ não é um corpo ordenado.
3. Provar que não existe uma bijeção entre um conjunto qualquer X e $\mathcal{P}(X)$.
4. Mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável e $\mathbb{R}$ não é enumerável.
5. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a, b\}$.
6. Calcular $\sup(A)$ e $\inf(A)$, onde $A := \left\{ \arctan \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^7 - 31x^5 + 2} \right) : x \in \mathbb{R}, x^7 - 31x^5 + 2 \neq 0 \right\}$.
7. Mostrar que $n^k \leq \frac{9}{8} (\min\{n, k\})^{\max\{n, k\}}$, para todo $n, k \in \mathbb{N}$, com $n, k \geq 2$.
8. Mostrar que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, A é fechado e limitado.
9. Mostrar que toda função contínua num subconjunto compacto da reta é uniformemente contínua.
10. Dizer quantas raízes reais tem o polinômio $P_n(x) := \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100$.
11. Suponhamos que f é uma função real com domínio $\mathbb{R}$ que tem a **propriedade dos valores intermediários**, i.e., para todo $a < b$ e $f(a) < c < f(b)$ existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) = c$, suponhamos que para todo $r \in \mathbb{Q}$, $f^{-1}(r)$ seja fechado. Provar que f é contínua.
12. Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada em cada intervalo limitado. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = L$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$.
13. Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ é uma bijeção, que X seja um espaço métrico compacto e Y um espaço métrico qualquer. Então f^{-1} é contínua. Este resultado pode ser generalizado a espaços topológicos qualquer?