P1 FVV-UFABC, Stefano Nardulli
Turma B
19:00-Sala 214-0

1. (2.0 pontos. Feito em sala de aula com números diferentes) Seja

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar o conjunto de continuidade, e de diferenciabilidade de f. Calcular f_x e f_y aonde existirem e estabelecer os respectivos conjuntos de continuidade. Enfim calcular $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ se existirem e dizer se f_x é diferenciável em $(0,0)$. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

2. (2.0 pontos. Exercício 8b da lista 3 da Gradmat e feito em sala de aula com números diferentes) Determine a melhor aproximação afim para a expressão $x^3 + y^2 - 2xy$, no ponto $(1,2)$ e use-a para estimar o seu valor em $(0.99; 2.01)$. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

3. (2.0 pontos. Exercício 10 da lista 4 da Gradmat) Uma função $w = f(x,y,z)$ com segundas derivadas parciais contínuas que satisfaz a Equação de Laplace $\Delta w := w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$, é dita harmônica. Qual das funções abaixo são harmônicas no próprio domínio de definição?

   (a) $f(x,y,z) = (4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^{-1/2}$.

   (b) $f(x,y,z) = g(x,y) = x^4 - 3xy^2$;

   (c) $f(x,y,z) = g(x,y) = e^x \sin(y^2) + e^y \cos(y^2)$;

   Mostrar que uma qualquer combinação linear de funções harmônicas é harmônica. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

4. (3.0 pontos. Exercício 20 da lista 3 da Gradmat e feito em sala de aula com números diferentes) Determinar a equação do plano tangente no ponto $(1,0,1)$ à superfície definida implicitamente pela equação

$$F(x,y,z) = z^3 + (x^2 + y^2)z^2 + x + y = 3.$$

Seja $z = z(x,y)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$F(x,y,z) = z^3 + (x^2 + y^2)z^2 + x + y = 3, \tag{1}$$

tal que $z(1,0) = 1$. Calcule as seguintes derivadas parciais no ponto $(1,0)$,

$$z_x(1,0),\ \ z_y(1,0),\ \ z_{yx}(1,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}z(x,y)\right]_{|(x,y)=(1,0)}.$$

Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

5. (3.0 pontos. Feito em sala de aula com números diferentes) Seja $f(x,y) := \sqrt{2x^2 + 4y^2}$.

   (a) (1.0 pontos) Determinar o domínio e a imagem de $f(x,y)$, esboçar suas curvas de nível.

   (b) (1.0 pontos) Calcular o vetor gradiente de f e esboçar tal campo de vetores no domínio de f.

   (c) (1.0 pontos) Determinar os pontos (caso existirem) em que o gradiente de f é perpendicular ao eixo y.

   Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

Gabarito

1. f está definida em todo $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é continua pois é o quociente de duas funções continuas. Em $(0,0)$ é fácil de verificar direitamente que f é continua. Nos provaremos que f é diferenciável e logo a posteriori contínua em $(0,0)$ também. Calculamos agora

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{2x\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} = y\dfrac{2x(x^2+y^2)-x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = y\dfrac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} x^2\dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - y^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)} = x^2\dfrac{(x^2+\cancel{y^2}-\cancel{y^2})}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

pois $f_x(0,0) = \frac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\Big|_{x=0}[0] = 0.$
$f_y(0,0) = \frac{d}{dx}[f(0,y)]\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}\Big|_{y=0}[0].$
f é continua em $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema do diferencial total f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$, pois como é fácil verificar f_x e f_y são continuas em todo $\mathbb{R}^2$. Na verdade $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Agora calculamos as derivadas segundas em $(0,0)$.

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{d}{dx}[f_y(x,0)]\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}[|x|]\Big|_{x=0} = \nexists.$$

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{d}{dy}[f_x(0,y)]\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}[0]\Big|_{y=0} = 0.$$

Agora enfrentamos o problema de ver se f_x é diferenciável, logo estudamos o problema de encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(y\frac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 0 - ax - by\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 0,$$

i.e., encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\sin(\theta)\left(\rho^3\cos(\theta) + 2\rho^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right) - \rho^4[a\cos(\theta)+b\sin(\theta)]}{\rho^4} = 0. \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = 0 \Rightarrow a = 0, \\ \theta = \pi/2 \Rightarrow b = 0. \end{array}\right\} \text{Substituindo estes valores de } a \text{ e } b \text{ em (2) obtemos}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sin(\theta)\cos(\theta) + 2\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \sin(\theta)\left[\cos(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\right].$$

Logo como é fácil de ver $\exists\theta_0 \in]0, \pi/2[$ talque $\sin(\theta_0)\cos(\theta_0) + 2\cos(\theta_0)\sin^2(\theta_0) \neq 0$
$\Rightarrow f_x$ não é diferenciável em $(0,0)$.

2. $f(x,y)=x^3+y^2-2xy \Rightarrow f(1,2)=1+\cancel{4}-\cancel{4}=1.$
$f_x(x,y)=3x^2-2y,$
$f_y(x,y)=2y-2x,$
$f_x(1,2)=3-4=-1,$
$f_y(1,2)=2,$
$g(x,y)=f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)=1-(x-1)+2(y-2)=-2-x+2y.$
$g(0.99,2.01)=1+0.01+2-0,01=1.03$ é a aproximação procurada.
$f(0.99,2.01)=(0.99)^3+(2.01)^2-2\cdot 2.01\cdot 0.99=1.030599$. Como é fácil de ver a aproximação é valida até o terceiro digito decimal.

3. É preciso verificar em quais dos três casos vale $\Delta f(x,y,z)=0$.

   (a) $f_x(x,y,z)=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3} \Rightarrow$
   $f_{xx}(x,y,z)=-\left[\frac{1}{r^3}-3\frac{x^2}{r^4}\frac{1}{r}\right]=-\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3x^2}{r^2}\right]$
   $\Rightarrow \Delta f(x,y,z)=-\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3x^2}{r^2}\right]-\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3y^2}{r^2}\right]-\frac{1}{r^3}\left[1-\frac{3z^2}{r^2}\right]=-\frac{1}{r^3}[3-3]=0$. Logo f é harmonica.

   (b) $f_y(x,y,z)=-3xy \Rightarrow f_{yy}(x,y)=-6x$
   $f_x(x,y)=4x^3-3y^2 \Rightarrow f_x(x,y)=12x^2 \Rightarrow \Delta f(x,y,z)=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=12x^2-6x\neq 0.$
   Logo f não é harmonica.

   (c) $f(x,y,z)=e^x\sin\left(y^2\right)+e^y\cos(y^2) \Rightarrow f_{xx}(x,y,z)=e^x\sin\left(y^2\right)$
   $f_y(x,y,z)=e^x\cdot 2\cos(y^2)y+e^x\cos(y^3)-e^y\sin(y^2)2y \Rightarrow$

   $$\begin{aligned} f_{yy}(x,y) &= 2e^x\left(\cos(y^2)y-2y^2\sin(y^2)\right) \\ &- e^y\left(\cos\left(y^2\right)-2y\sin\left(y^2\right)-2\cos\left(y^2\right)y-2\sin\left(y^2\right)-2y^2+2\cos\left(y^2\right)\right). \end{aligned}$$

   $$f_{zz}(x,y,z)=0.$$

   $\Rightarrow$ que existe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tal que $\Delta f(x,y,z)=f_{xx}(x,y,z)+f_{yy}(x,y,z)+f_{zz}(x,y,z)\neq 0$.
   Logo f não é harmonica.

4. $F(1,0,1)=1+(1+0)\cdot 1+1+0=3.$
$F_x(x,y,z)=3xz^2+1 \Rightarrow F_x(1,0,1)=3.$
$F_y(x,y,z)=2yz^2+1 \Rightarrow F_y(1,0,1)=1.$
$F_z(x,y,z)=3z^2+2z\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow F_z(1,0,1)=3+2=5.$
Logo

$$\pi:\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)(x-1)+\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)y+\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)(z-1)=-3(x-1)+y+5(z-1)=0.$$

$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)=5\neq 0 \Rightarrow \exists! z=z(x,y)$ tal que

$$z^3(x,y)+\left(x^2+y^2\right)z^2(x,y)+x+y=3. \tag{3}$$

Derivando a equação (3) a respeito da variável x obtemos

$$3z^2(x,y)z_x(x,y)+2xz^2(x,y)+y^2 2z(x,y)z_x(x,y)+1+x^2 2z(x,y)z_x(x,y)=0. \tag{4}$$

Avaliando a equação (4) em $(1,0)$ obtemos $5z_x(1,0)+2+1=0 \Leftrightarrow z_x(1,0)=-\frac{3}{5}$.
Derivando a equação (3) a respeito da variável y obtemos

$$3z^2(x,y)z_y(x,y)+x^2 2z(x,y)z_y(x,y)+2y^2z(x,y)z_y(x,y)+2yz^2(x,y)+1=0. \tag{5}$$

Avaliando a equação (5) em $(1,0)$ obtemos

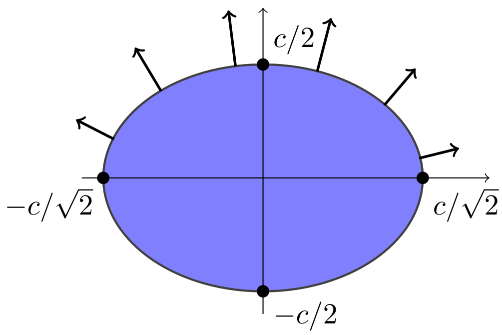
$$3z_y(1,0)+2z_y(1,0)+1=0. \tag{6}$$

Logo $z_y(1,0)=-\frac{1}{5}$.
Derivando a equação (4) a respeito da variável y obtemos

$$z_{yx}(x,y)\left[3z^2+2y^2z+2x^3z\right]+z_x(x,y)\left[6zz_y+4yz+2y^2z_y+2x^3z_y\right]+4xzz_y=0. \tag{7}$$

Avaliando a equação (7) em $(1,0)$ obtemos $z_{yx}(1,0)5-\frac{3}{5}\left[6\left(-\frac{1}{5}\right)+2\left(-\frac{1}{5}\right)\right]+4\left(-\frac{1}{5}\right)=0\Rightarrow$ $5z_{yx}(1,0)+\frac{24}{5}-\frac{4}{5}=5z_{yx}(1,0)+\frac{20}{5}=0\Rightarrow z_{yx}(1,0)=-\frac{4}{5}$.

5. $f(x,y)=\sqrt{2x^2+4y^2}$.
$Domf=\mathbb{R}^2$, $Imf=[0,+\infty[$.
Quando $c>0$, $f^{-1}(\{c\})=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|2x^2+4y^2=c^2\}$, i.e., o conjunto de nível é a elipse de equação $\dfrac{x^2}{\frac{c^2}{2}}+\dfrac{y^2}{\frac{c^2}{4}}=1\Rightarrow\dfrac{x^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2}=1.$
Quando $c=0$, $f^{-1}(\{0\})=\{(0,0)\}$. Em fim quando $c<0$ temos que $f^{-1}(\{c\})=\emptyset$.



$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+4y^2}},(x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}(\sqrt{2}|x|)\Big|_{x=0}=\nexists,\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4y}{\sqrt{2x^2+4y^2}},(x,y)\neq(0,0),\\ \dfrac{d}{dy}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=\frac{d}{dx}(2|y|)\Big|_{y=0}=\nexists.\end{cases}$$

Logo o gradiente de f está definido só em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e aonde estiver definido é orthogonal às curvas de nível.

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+4y^2}},\frac{4y}{\sqrt{2x^2+4y^2}}\right),(x,y)\neq(0,0).$$

Para esboçar o desenho do campo gradiente seria preciso também analisar o modulo de $\nabla f(x,y)$ e ver como ele varia, esta tarefa não é muito difícil é só um pouco mais laboriosa, porém visto o tempo da prova decidi de não cobrar isso. Em fim para responder à questão do ponto (c) é preciso resolver a equação $<\nabla f,\hat{j}>=\frac{4y}{\sqrt{2x^2+4y^2}}=0$. Logo os pontos (x,y) procurados são aqueles onde $y=0$ e $x\neq0$.