P1 FVV-UFABC
Stefano Nardulli
Turma A
21:00-Sala 311-3

1. (2.0 pontos. Feito em sala de aula com números diferentes) Seja

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinar o conjunto de continuidade, e de diferenciabilidade de f. Calcular f_x e f_y aonde existirem e estabelecer os respectivos conjuntos de continuidade. Enfim calcular $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ se existirem e dizer se f_x é diferenciável em $(0,0)$. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

2. (2.0 pontos. Exercício 8b da lista 3 da Gradmat e feito em sala de aula com números diferentes) Determine a melhor aproximação afim para a expressão $x^2 + y^3 - 3xy$, no ponto $(1,2)$ e use-a para estimar o seu valor em $(0.99; 2.01)$. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

3. (2.0 pontos. Exercício 15 da lista 4 da Gradmat) Se u e v são funções das variáveis x e y de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Mostre que u e v são harmônicas. Mostrar que uma qualquer combinação linear de funções harmônicas é harmônica. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

4. (3.0 pontos. Exercício 20 da lista 3 da Gradmat e feito em sala de aula com números diferentes) Determinar a equação do plano tangente no ponto $(1,0,1)$ à superfície definida implicitamente pela equação

$$F(x,y,z) = z^3 + (x^2+y^2)z^2 + x + y = 3.$$

Seja $z = z(x,y)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$F(x,y,z) = z^3 + (x^2+y^2)z^2 + x + y = 3, \tag{2}$$

tal que $z(1,0) = 1$. Calcule as seguintes derivadas parciais no ponto $(1,0)$,

$$z_x(1,0),\ \ z_y(1,0),\ \ z_{yx}(1,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x} z(x,y)\right]_{|(x,y)=(1,0)}.$$

Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

5. (3.0 pontos. Feito em sala de aula com números diferentes) Seja $f(x,y) := \sqrt{3x^2+9y^2}$.

   (a) (1.0 pontos) Determinar o domínio e a imagem de $f(x,y)$, esboçar suas curvas de nível.

   (b) (1.0 pontos) Calcular o vetor gradiente de f e esboçar tal campo de vetores no domínio de f.

   (c) (1.0 pontos) Determinar os pontos (caso existirem) em que o gradiente de f é perpendicular ao eixo x.

Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

Gabarito

1.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}y^2\dfrac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=y^2\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=\dfrac{d}{dx}(0)\Big|_{x=0}=0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}x\dfrac{2y(x^2+y^2)-2y^3}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=\dfrac{d}{dy}(0)\Big|_{y=0}=0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$\lim_{\rho\to0^+}\dfrac{\cancel{\rho^4}\sin^2(\theta)(\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta))}{\cancel{\rho^4}}=\sin^2(\theta)(\sin^2(\theta)-\cos^2(\theta))$

$\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)\Rightarrow f_x$ não é continua em $(0,0)\Rightarrow f_x$ não é diferenciável.

$\lim_{\rho\to0^+}\dfrac{2\cancel{\rho^4}\sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cancel{\rho^4}}=2\sin(\theta)\cos^3(\theta)$

$\Rightarrow\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)$. Isto prova que não podemos aplicar o teorema do diferencial total para estabelecer a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. Agora vamos estudar a diferenciabilidade de f aplicando direitamente a definição.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}-0-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to0^+}\dfrac{\cancel{\rho^3}\cos(\theta)\sin^2(\theta)-\cancel{\rho^3}[a\cos(\theta)+b\sin(\theta)]}{\cancel{\rho^3}}$

$=\cos(\theta)\sin^2(\theta)-a\cos(\theta)-b\sin(\theta)$. Pondo primeiro $\theta=0$ e depois $\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{matrix}a=0\\b=0\end{matrix}\Rightarrow$

$\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}-0-ax-by}{\sqrt{x^2+y^2}}\Rightarrow f$ não é diferenciável em $(0,0)$. $f_x(0,y)=1$, se $y\neq0$ e $f_x(0,0)=0$. Logo $y\mapsto f_x(0,y)$ não é continua em $y=0$ o que implica que não é derivável em $y=0$. Por outro lado

$f_{yx}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\dfrac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)\Big|_{y=0}=\nexists.$

$f_{xy}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}=\dfrac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)\Big|_{y=0}=\dfrac{d}{dx}(0)\Big|_{x=0}=0.$

2. $f(x,y)=x^2+y^3-3xy\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3y\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_x(1,2)=2-6=-4\\ f_y(1,2)=3\cdot4-3=9\end{cases}$

$g(x,y)=3-4(x-1)+9(y-2)=-3-4x+4+9y-12=-4x+9y-11\Rightarrow$
$g(x,y)=-4x+9y-11.$

$g(0.99,2.01)=3+4\cdot0.01+9\cdot0.01=3.13$

$f(0.99,2.01)=(0.99)^2+(2.01)^3-3\cdot0.99\cdot2.01=3.131001$

3. Derivando a respeito da variável x a primeira equação de (1) obtemos $u_{xx}=v_{xy}$ e derivando a respeito da variável y a segunda equação de (1) obtemos $u_{yy}=-v_{yx}$. sendo $v\in C^2(\mathbb{R}^2)$, pelo teorema de Scwartz-Clairaut vale $v_{xy}=v_{yx}$. Logo $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=v_{xy}-v_{yx}=0$. O que mostra que u é harmonica em $\mathbb{R}^2$.

4. $F(1,0,1) = 1 + (1+0)\cdot 1 + 1 + 0 = 3.$
$F_x(x,y,z) = 3xz^2 + 1 \Rightarrow F_x(1,0,1) = 3.$
$F_y(x,y,z) = 2yz^2 + 1 \Rightarrow F_y(1,0,1) = 1.$
$F_z(x,y,z) = 3z^2 + 2z\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow F_z(1,0,1) = 3 + 2 = 5.$
Logo

$$\pi : \frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1)(x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1)y + \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)(z-1) = -3(x-1) + y + 5(z-1) = 0.$$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 5 \neq 0 \Rightarrow \exists! z = z(x,y)$ tal que

$$z^3(x,y) + \left(x^2+y^2\right) z^2(x,y) + x + y = 3. \tag{3}$$

Derivando a equação (3) a respeito da variável x obtemos

$$3z^2(x,y)z_x(x,y) + 2xz^2(x,y) + y^2 2z(x,y)z_x(x,y) + 1 + x^2 2z(x,y)z_x(x,y) = 0. \tag{4}$$

Avaliando a equação (4) em $(1,0)$ obtemos $5z_x(1,0) + 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_x(1,0) = -\frac{3}{5}$.
Derivando a equação (3) a respeito da variável y obtemos

$$3z^2(x,y)z_y(x,y) + x^2 2z(x,y)z_y(x,y) + 2y^2 z(x,y)z_y(x,y) + 2yz^2(x,y) + 1 = 0. \tag{5}$$

Avaliando a equação (5) em $(1,0)$ obtemos

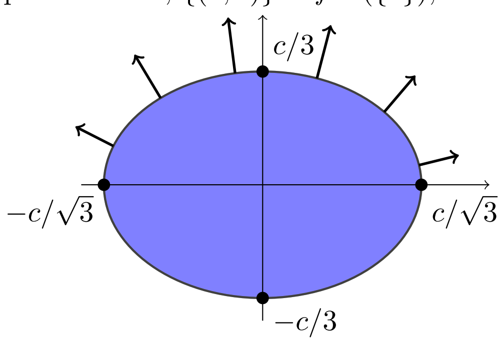
$$3z_y(1,0) + 2z_y(1,0) + 1 = 0. \tag{6}$$

Logo $z_y(1,0) = -\frac{1}{5}$.
Derivando a equação (4) a respeito da variável y obtemos

$$z_{yx}(x,y)\left[3z^2 + 2y^2 z + 2x^3 z\right] + z_x(x,y)\left[6zz_y + 4yz + 2y^2 z_y + 2x^3 z_y\right] + 4xzz_y = 0. \tag{7}$$

Avaliando a equação (7) em $(1,0)$ obtemos $z_{yx}(1,0)5 - \frac{3}{5}\left[6\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\left(-\frac{1}{5}\right)\right] + 4\left(-\frac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow$
$5z_{yx}(1,0) + \frac{24}{5} - \frac{4}{5} = 5z_{yx}(1,0) + \frac{20}{5} = 0 \Rightarrow z_{yx}(1,0) = -\frac{4}{5}$.

5. (a) $f(x,y) = \sqrt{3x^2 + 9y^2}$
$Dom f = \mathbb{R}^2$, $Im f = [0, +\infty[$
$c > 0 : 3x^2 + 9y^2 = c^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{c^2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{c^2}{9}} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{c}{3}\right)^2} = 1$
quando $c = 0$, $\{(0,0)\} = f^{-1}(\{0\})$, $c = 0$, $\emptyset = f^{-1}(\{c\})$, $c < 0$.



(b)

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+9x^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}(\sqrt{3}|x|)\Big|_{x=0} = \nexists, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9y}{\sqrt{3x^2+9y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{d}{dx}[f(0,y)]\Big|_{y=0} = \frac{d}{dx}(\sqrt{3}|y|)\Big|_{y=0} = \nexists, , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Logo o gradiente de f está definido só em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e aonde estiver definido é orthogonal às curvas de nível.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x}{\sqrt{3x^2+9y^2}}, \frac{3y}{\sqrt{3x^2+9y^2}} \right).$$

Para esboçar o desenho do campo gradiente seria preciso também analisar o modulo de $\nabla f(x,y)$ e ver como ele varia, esta tarefa não é muito difícil é só um pouco mais laboriosa, porém visto o tempo da prova decidi de não cobrar isso.

(c)

$$\nabla f(x,y) \cdot \hat{i} = 0 \Leftrightarrow x = 0, y \neq 0.$$