P1 FVV-UFABC
Simulação

1. (3.0 pontos. Feito em sala de aula) Seja $f(x, y) := \sqrt{2x^2 + \frac{1}{9}y^2}$.
   (a) (1.0 pontos) Determinar o domínio e a imagem de $f(x, y)$, esboçar suas curvas de nível.
   (b) (1.0 pontos) Calcular o vetor gradiente de f e esboçar tal campo de vetores no domínio de f.
   (c) (1.0 pontos) Determinar os pontos em que o gradiente de f é perpendicular ao eixo y.

2. (3.0 pontos. Feito em sala de aula) Seja

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) y}{\sqrt{x^2+y^2}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

   Determinar o conjunto de continuidade, e de diferenciabilidade de f. Calcular f_x e f_y aonde existirem e estabelecer os respectivos conjuntos de continuidade. Enfim calcular $f_{xy}(0, 0)$ e $f_{yx}(0, 0)$ e dizer se f_x é diferenciável em $(0, 0)$.

3. (2.0 pontos. Exercício 8b da lista 3) Determine a melhor aproximação afim para a expressão $x^3 - y^3 - xy$, no ponto $(1, 2)$ e use-a para estimar o seu valor em $(0.99; 2.01)$.

4. (2.0 pontos. Exercício 20 da lista 3 da Gradmat) Determinar a equação do plano tangente no ponto $(1, 3, 2)$ à superfície definida implicitamente pela equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 34.$$

5. (2 pontos, feito em sala de aula) Seja $z = z(x, y)$ uma função definida implicitamente pela equação

$$F(x, y, z) = z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 3, \tag{1}$$

   tal que $z(1, 0) = 1$. Calcule as seguintes derivadas parciais no ponto $(1, 0)$,

$$z_x(1, 0), \;\; z_y(1, 0), \;\; z_{yx}(1, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x} z(x, y)\right]_{|(x,y)=(1,0)}.$$

6. (2.0 pontos. Exercício 13 da lista 4 da Gradmat) A equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t),$$

   onde c é uma constante real positiva, é chamada ***equação da onda***. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis de uma variável.
   (a) Mostre que $u(x, t) = f(x + ct)$ e $v(x, t) = g(x - ct)$ satisfazem a equação da onda.
   (b) Mostre que uma função da forma $\phi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz a equação da onda.
   (c) Conforme que $\phi(x, t) = sen(t)sen(x)$ satisfaz a equação da onda com $c = 1$, e então use identidades trigonométricas apropriadas para expressar essa função na forma $f(x + t) + g(x - t)$.

Prova escrita parte facultativa, olhar só depois ter acabado com a parte não facultativa

1. (3.0 pontos. Facultativo. Exercício culto só para mostrar o que se faz com FVV em cursos mais avançados) No exercício que segue para toda função $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ usaremos a notação $Supp(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Seja $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$\varphi_\alpha(x) := \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\alpha}{1-x^2}}}{e^{-\alpha}}, |x| \leq 1, \\ 0, |x| \geq 1. \end{cases}$$

Mostrar que $\varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $||\varphi_\alpha||_\infty \leq 1$. Calcular $\varphi'_\alpha(x)$ e mostrar geometricamente e analiticamente que $||\varphi'_\alpha||_\infty \geq 1$, para todo $\alpha \in]0, +\infty[$. Seja

$$\psi_\alpha(x) := \begin{cases} 1, |x| \leq 1, \\ \varphi_\alpha(x-1), 1 \leq x \leq 2, \\ 0, |x| \geq 2. \end{cases}$$

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \in]0, +\infty[$, $f_{x_0,\alpha,r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_{x_0,\alpha,r}(x) := \psi_\alpha\left(\left|\frac{x-x_0}{r}\right|\right)$. Mostrar que $f_{x_0,\alpha,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $Supp(f_{x_0,\alpha,r}) = \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_0, r)}$. Mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\alpha_\varepsilon > 1$ tal que $\frac{1}{r} < ||\nabla f_{x_0,\alpha_\varepsilon,r}||_\infty \leq C\frac{1+\varepsilon}{r}$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ onde $C > 1$ é uma constante independente de ε, de r e x_0. Esboçar o gráfico de $f_{x_0,\alpha,r}$, nos casos $n = 1$ e $n = 2$, (feito em sala de aula).

2. (2.0 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$. Mostrar que f é localmente inversível em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mas que não é globalmente inversível. Observe que esta função é muito importante em ánalise complexa, porque corresponde à função exponencial complexa $w = e^z$, onde $z = x + iy$.

Prova oral e/ou Seminário, facultativo

1. (Apendíce F de [Ste11]) Enunciar e demonstrar o Teorema do diferencial total, ilustrar com exemplos e contraexemplos (feito em sala de aula).
2. Enunciar e provar o Teorema dos valores medios no caso vetorial, i.e., Teorema 5.19 de [Rud91].
3. (Apendíce F de [Ste11]) Enunciar e provar o Teorema da função implícita, ilustrar com exemplos e contraexemplos (feito em sala de aula).
4. Enunciar e provar a regra da cadeia nas varias versões de preferência como feito no Teorema 9.15 do livro [Rud91].
5. Tratar o caso mais geral do teorema da função implícita como no Teorema 9.28 do livro [Rud91].
6. (Apendíce F de [Ste11]) Enunciar e provar o Teorema de Clairaut-Schwarz, ilustrar com exemplos e contraexemplos (feito em sala de aula).
7. Enunciar e demonstrar o Teorema de Weierstraβ, i.e., Teorema 4.16 do livro [Rud91].
8. Enunciar e demonstrar o Teorema de Heine-Borel, i.e., Teorema 2.41 do livro [Rud91].
9. Mostrar que os conjuntos perfeitos não vazios são não enumeráveis. Mostrar que o conjunto ternário de Cantor é não enumerável, i.e., Teorema 2.43 e Seção 2.44 do livro [Rud91].
10. Mostrar que uma função contínua definida sobre um compacto é absolutamente contínua.
11. Enunciar e demonstrar o Teorema do limite da derivada (FUV) e explicar como ele é usado em FVV.
12. Demonstrar o teorema que da a formula do plano tangente a uma hipersuperfície definida implicitamente para uma função.
13. Definir as funções homogeneas, depois enunciar e demonstrar o Teorema de Euler.

Gabarito Prova Escrita

1. Feito em sala de aula.

2. Primeiro calculamos as derivadas parciais nos pontos que não dão problemas, i.e., nos pontos onde é possível aplicar as regras de derivação parcial como em FUV="Funções de Uma Variável". Neste caso nos pontos (x, y) com $x \neq 0$. Derivamos primeiro a respeito da variável y e obtemos

$$f_y(x,y) = \frac{x^4 \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}. \tag{2}$$

Depois calculamos o seguinte limite

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}, \exists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_y(x,y) = 0, \tag{3}$$

logo pelo teorema do limite da derivada de FUV podemos afirmar que $f_y(0, y_0) = 0, \forall y_0 \in \mathbb{R}$. Resumindo temos

$$f_y(x,y) := \begin{cases} \frac{x^4 \sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Agora derivamos a respeito da variável x e obtemos

$$f_x(x,y) = \frac{y[(2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}))(x^2+y^2) - x^3 \sin(\frac{1}{x})]}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}. \tag{4}$$

Pelo teorema do diferencial total conseguimos mostrar que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$, pois é fácil de ver que f_x e f_y são continuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$. Agora a tentação irresistível seria de fazer o mesmo para todos os pontos do tipo $(0, y_0)$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, porém como é fácil de verificar usando coordenadas polares $x = \rho\cos(\theta)$, $y = y_0 + \rho\sin(\theta)$,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_x(x,y) &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(y_0+\rho\sin(\theta))\left[\left(2\rho\cos(\theta)\sin\left(\frac{1}{\rho\cos(\theta)}\right) - \cos\left(\frac{1}{\rho\cos(\theta)}\right)\right)(\rho^2\cos^2(\theta) + (y_0+\rho\sin(\theta))^2) - \rho^3\cos(\theta)^3\sin\left(\frac{1}{\rho\cos(\theta)}\right)\right]}{\sqrt{(\rho^2\cos^2(\theta) + (y_0+\rho\sin(\theta))^2)^3}}. \\ &= \nexists. \end{aligned}$$

O que significa que

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}, \nexists \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f_x(x,y). \tag{5}$$

Logo não podemos aplicar o teorema do diferencial total nos pontos do tipo $(0, y_0)$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado uma computação direta em coordenadas polares mostra que $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2(\theta)(y_0+\rho\sin(\theta))\sin\left(\frac{1}{\rho\cos(\theta)}\right)}{\rho^2\cos^2(\theta) + (y_0+\rho\sin(\theta))^2} = 0,$$

uniformemente a respeito de $\theta \in [0, 2\pi[$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Logo pela sua própria definição f é diferenciável em tais pontos, i.e., existe $df_{(0,y_0)} = 0, \forall y_0 \in \mathbb{R}$. Combinando esta última informação com o teorema do diferencial total podemos asserir com certeza que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$ em particular deduzimos que $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ e existe $f_x(0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y_0)]_{|x=0} = 0$, mas $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$f_x(x,y) := \begin{cases} \frac{y[(2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}))(x^2+y^2) - x^3\sin(\frac{1}{x})]}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Como

$$df_{(x_0,y_0)}(x,y) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0),$$

temos

$$df_{(x_0,y_0)}(x,y) = \begin{cases} \frac{y_0[(2x_0\sin(\frac{1}{x_0}) - \cos(\frac{1}{x_0}))(x_0^2+y_0^2) - x^3\sin(\frac{1}{x_0})]}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^3}}(x - x_0) + \frac{x_0^4\sin(\frac{1}{x_0})}{\sqrt{(x_0^2+y_0^2)^3}}(y - y_0), x_0 \neq 0, \\ 0, x_0 = 0. \end{cases}$$

Uma maneira alternativa de proceder seria de verificar direitamente com a definição que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$ e deduzir as expressões das derivadas parciais da formula $df_{(x_0,y_0)}(x,y) = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$. Para calcular

$$f_{xy}(0,0) := \frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,0)\right]_{|x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4\sin(\frac{1}{x})}{x^4} = \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists.$$

$$f_{yx}(0,0) := \frac{\partial}{\partial y}\left[f_x(0,y)\right]_{|y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left[0\right]_{|y=0} = 0.$$

$$f_{xx}(0,0) = 0.$$

Uma conta direta usando a definição mostra que f_x não é diferenciável em $(0,0)$.

3. Seja $f(x,y) := x^3 - y^3 - xy$, logo $f(1,2) = -9$. Calculamos $f_x(x,y) = 3x^2 - y$, $f_y(x,y) = -3y^2 - x$. Logo $f_x(1,2) = 1$ e $f_y(1,2) = -13$. Logo $df_{(1,2)}(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = -9 + (x-1) - 13(y-2)$. A aproximação procurada é $df_{(1,2)}(0.99, 2.01) = -9 - 0.01 - 13\cdot 0.01 = -9.14$. Observem que $f(0.99, 2.01) = -9.14.....$ Logo até o segundo digito decimal os dois valores coincidem.

4. A equação do plano π tangente no ponto $(1,3,2)$ à superfície definida implicitamente pela equação

$$F(x,y,z) = z^3 + (x+y)z^2 + x^2 + y^2 = 34,$$

é

$$\pi : \frac{\partial F}{\partial x}(1,3,2)(x-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,3,2)(y-3) + \frac{\partial F}{\partial z}(1,3,2)(z-2) = 0.$$

Logo

$$\pi : 6(x-1) + 10(y-3) + 28(z-2) = 0,$$

pois $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x + z^2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y + z^2$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2(x+y)z$.

5. Primeiro verificamos que o ponto de coordenadas $(1,0,1)$ satisfaz a equação (1). Depois que $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) \neq 0$, para estar certos que a equação é resolvível pelo menos localmente. Depois escrevemos

$$F(x,y,z) = z^3 + (x+y)z^2 + x^2 + y^2 = 3,$$

na forma

$$F(x,y,z(x,y)) = z(x,y)^3 + (x+y)z^2(x,y) + x^2 + y^2 = 3, \tag{6}$$

e derivamos a precedente equação a respeito da variável x. Obtemos assim

$$3z^2(x,y)z_x(x,y) + z^2(x,y) + 2(x+y)z(x,y)z_x(x,y) + 2x = 0. \tag{7}$$

Avaliando esta última equação em $(x,y) = (1,0)$ obtemos

$$3z_x(1,0) + 1 + 2z_x(1,0) + 2 = 0.$$

Logo $z_x(1,0) = -\frac{3}{5}$. Analogamente derivamos a equação (6) a respeito da variável y e obtemos

$$3z^2(x,y)z_y(x,y) + z^2(x,y) + 2z(x,y)z_y(x,y)(x+y) + 2y = 0.$$

Avaliando esta última equação em $(x,y) = (1,0)$ obtemos $3z_y(1,0) + 1 + 2z_y(1,0) = 0$, i.e., $z_y(1,0) = -\frac{1}{5}$. Agora derivamos a respeito da variável y a equação (7) e obtemos

$$6z(x,y)z_y(x,y)z_x(x,y) + 3z^2(x,y)z_{yx}(x,y) + 2z_y(x,y)z(x,y) + 2z(x,y)z_x(x,y) + 2(x+y)z_y(x,y)z_x(x,y) + 2(x+y)z(x,y)z_{yx}(x,y) = 0.$$

$$\frac{18}{25} - \frac{10}{25} - \frac{30}{25} + \frac{6}{25} + 5z_{yx}(1,0) = 0,$$

logo $z_{yx}(1,0) = \frac{16}{125}$.

6. Feito em sala de aula.

Gabarito Prova escrita parte facultativa. Incompleto

1. Mostrar usando o principio de indução e as regras de derivação que para todo $x \in]-1,1[$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta $\varphi^{(k)}(x) = R_k(x)\varphi(x)$, onde R_k é uma função racional tal que $\lim_{x\to 1^-} R_k(x) = +\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{x\to 1^-} \varphi^{(k)}(x) = 0$. Usar o teorema do limite da derivada para mostrar que a derivada a esquerda k-esima $\varphi^{(k)}(1^-) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Deduzimos então que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $Supp(\varphi) = [0,1]$. $\varphi'_\alpha(x) = -\frac{2\alpha x}{(1-x^2)^2}\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-x^2}}}{e^{-\alpha}}$,

$$\begin{aligned}\varphi''_\alpha(x) &= [\frac{2\alpha x}{(1-x^2)^2}(\frac{2\alpha x}{(1-x^2)^2}) - 2\alpha\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}]\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-x^2}}}{e^{-\alpha}} \\ &= \left[\frac{4\alpha^2x^2}{(1-x^2)^4} - 2\alpha\frac{(1-x^2)^2 + 4x^2(1-x^2)}{(1-x^2)^4}\right]\frac{e^{-\frac{\alpha}{1-x^2}}}{e^{-\alpha}}.\end{aligned}$$

Se escolhemos $\alpha_\varepsilon = 1+\varepsilon$ é fácil estimar

$$|\varphi'_{\alpha_\varepsilon}(x)| \leq 2(1+\varepsilon)e^{1+\varepsilon}\frac{|x|e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}\chi_{]-1,1[}(x).$$

Logo $||\varphi'_\alpha||_\infty \leq 2(1+\varepsilon)e^{1+\varepsilon}C$, onde $C := ||\frac{|x|e^{-\frac{1}{1-x^2}}}{(1-x^2)^2}\chi_{]-1,1[}(x)||_\infty > 0$. Usando a regra da cadeia temos que $|\nabla f(x)| = |\psi'(|\frac{x-x_0}{r}|)|\frac{1}{r} \leq \frac{2(1+\varepsilon)e^{1+\varepsilon}C}{r}$.

2.

Gabarito Prova Oral e/ou Seminário Incompleto

1. Consideramos a função

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$$

Após umas simples computações feitas em sala de aula é fácil de ver que f não é contínua em $(0,0)$ logo não é diferenciável e que além disso existem as derivadas $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Este exemplo mostra que a existência das derivadas parciais em todo um aberto que contém um ponto não implica necessariamente que a função seja diferenciável naquele ponto. Esta observação motiva a procura de condições suficientes a impor às derivadas parciais para garantir a diferenciabilidade. Neste sentido vale o seguinte teorema, dito Teorema do diferencial total.

Teorema 0.1 (do diferencial total)**.** *Seja $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ aberto, $x_0 \in \mathcal{U}$. Suponhamos que existam $f_x, f_y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ e que f_x, f_y sejam continuas em x_0. Então f é diferenciável em x_0.*

Demonstração: Apedice F do [Ste11]. q.e.d.

Um contraexemplo ao teorema do diferencial total é dado pela função do Problema 1, pois exibe uma função que é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$ mas é de classe C^1 só em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$.

2.

3.

Referências

[Rud91] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1991.

[Ste11] James Stewart. *Cálculo Volume I*. Cengage, sexta edition, 2011.