P2 FVV-UFABC
Simulação
Stefano Nardulli

1. (2.0 pontos. Exercício 5 da lista Gradmat) Determine o volume máximo V de uma caixa retangular inscrita no elipsóide $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. (2.0 pontos. Exercício feito em sala de aula) Determine a melhor aproximação cubica para a expressão $x^2 + y^3 - 3xy$, no ponto $(1, 2)$ e use-a para estimar o seu valor em $(0.99; 2.01)$. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

3. (2.0 pontos. Exercício 6 da lista 5 da Gradmat) Determine os valores máximo e mínimo, se existirem, das funções relacionadas sujeitas ao respectivo vinculo indicado
   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 = 9$;
   (b) $f(x, y) = x^2 y$, $4x^2 + 9y^2 = 36$;
   (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$, $3x + 2y + 2z = 1$;
   (d) $f(x, y) = x + y + z$, $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

4. (3.0 pontos. Exercícios 10-11 da lista 7 da Gradmat e feito em sala de aula com números diferentes) Calcule a integral fazendo uma mudança de variáveis apropriada
   (a) $\int_R (x-3y)dxdxy$, onde R é a região triangular de vertices $O = (0, 0)$, $A = (2, 1)$ e $B = (1, 2)$.
   (b) $\int_R \frac{x-2y}{3x-y} dxdy$, onde R é o paralelogramo delimitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$.

   Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

5. (2.0 pontos. Exercício $7 - c$ lista 7 da Gradmat) Utilize as coordenadas esféricas, para calcular a seguinte integral $\int_R e^{x^2+y^2+z^2} dxdydz$, onde R é a região delimitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no primeiro octante. Mostrar todas as contas e justificar as respostas.

Gabarito

1.

2.

3.

4. (a)
   (b) Temos que $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leq x - 2y \leq 4, 1 \leq 3x - y \leq 8\}$. Pondo $x - 2y = u$ e $3x - y = v$ obtemos que $\tilde{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 8\}$. Logo

   $dudv = |du \wedge dv| = |(dx - 2dy) \wedge (3dx - dy)| = | - dx \wedge dy - 6dy \wedge dx| = 5|dx \wedge dy| = 5dxdy.$

   Logo $dxdy = \frac{1}{5} dudv$, o que implica

   $$\int_R \frac{x - 2y}{3x - y} dxdy = \frac{1}{5} \int_{\tilde{R}} \frac{u}{v} dudv.$$

   Aplicando o Teorema de Fubini-Tonelli para calcular este último integral obtemos

   $$\frac{1}{5} \int_{\tilde{R}} \frac{u}{v} dudv = \int_0^4 \left\{ \int_1^8 \frac{u}{v} dv \right\} du = \frac{3 \log(2)}{5} \int_0^4 udu = \frac{24}{5} \log(2).$$

   Remark 0.1. *Seja $\Phi : (x, y) \mapsto (x - 2y, 3x - y)$. Observem que não é preciso calcular a transformação inversa de Φ para calcular $dxdy$ em função de $dudv$. Lembrem-se que vale em geral a relação* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

5.