

Primeira Prova Fundamentos de Aritmética e
Álgebra
Licenciatura em Matemática diurno
UFRJ

Stefano Nardulli

15/01/2016

Duração 2 horas. É permitido só o uso da caneta ou do lapis, não é permitido ir no banheiro, não é possível sair antes de 1 hora do início da prova e não é permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova. O objetivo não é fazer tudo, mas fazer o máximo possível.

1. Provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ vale $n! > 2^n$.
2. Provar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $mp = np$, então $m = n$.
3. Dada $f : A \rightarrow B$, prove que para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$. Além disso prove que f é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$, para todo $Z \subseteq B$.
4. Provar que $\text{card}(X \cup Y) + \text{card}(X \cap Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$. Generalizar ao caso de 3 conjuntos e depois ao caso de n conjuntos.
5. Provar que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é Arquimediano. (Feito em aula)
6. Provar que não existe uma bijeção entre um conjunto qualquer X e $\mathcal{P}(X)$. (Feito em aula)
7. Mostrar que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado Arquimediano, mas que $\mathbb{Q}$ não é completo. (Feito em aula)
8. Computar o extremo superior e o extremo inferior do conjunto $A := \{x + \frac{1}{x^2} : x \in]0, +\infty[, n \in \mathbb{N}\}$.
9. Definir $\mathbb{R}$ com as classes de equivalências de sequências de Cauchy. Assumindo de ter já demonstrado que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Provar que $\mathbb{R}$ é completo.
10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{K}$ e $x < 1$. Provar que $(1-x)^n \geq 1-nx$.