Prova Final
Licenciatura em Matemática diurno
UFRJ

Stefano Nardulli

26/02/2016

Durao das 13:00 horas s 15:00 horas, permitido s o uso da caneta ou do lapis, no permitido ir no banheiro, no possvel sair antes de 1 hora do incio da prova e no permitido entrar para fazer a prova depois de 1/2 hora do início da prova.

1. Provar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ vale $n! > 2^n$.

2. Provar que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se $mp = np$, então $m = n$.

3. Dada $f : A \to B$, prove que para todo $Z \subset B$, tem-se $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$. Além disso prove que f é sobrejetiva se, e somente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$, para todo $Z \subseteq B$.

4. Provar que $card(X \cup Y) + card(X \cap Y) = card(X) + card(Y)$. Generalizar ao caso de 3 conjuntos e depois ao caso de n conjuntos.

5. Provar que se $\mathbb{K}$ é um corpo ordenado completo, então $\mathbb{K}$ é Arquimediano. (Feito em aula)

6. Provar que não existe uma bijeção entre um conjunto qualquer X e $\mathcal{P}(X)$. (Feito em aula)

7. Mostrar que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado Arquimediano, mas que $\mathbb{Q}$ não é completo. (Feito em aula)

8. Computar o extremo superior e o extremo inferior do conjunto $A := \{x + \frac{1}{x^2} : x \in]0, +\infty[, n \in \mathbb{N}\}$.

9. Definir $\mathbb{R}$ com as classes de equivalências de sequências de Cauchy. Assumindo de ter já demonstrado que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Provar que $\mathbb{R}$ é completo.

10. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{K}$ e $x < 1$. Provar que $(1-x)^n \geq 1-nx$.

11. Fazer a construção dos números reais com os cortes de Dedekind. (Feito em aula)

12. Provar a desigualdade geometrico-aritmetica. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, então

$$(\Pi_{i=1}^n a_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \tag{1}$$

(Feito em aula).

13. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Prove que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, se e só se $a = c$, $b = d$.

14. Prove que o conjunto $\mathbb{K}$ dos números reais da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b racionais é um corpo relativamente às operações de adição e multiplicação de números reais. Examine se isso ocorre também com os números da forma $a + b\sqrt{2}$, com a e b pertencentes a $\mathbb{Q}$.

15. Sejam A e B conjuntos de números reais positivos. Definamos $AB := \{xy : x \in A, y \in B\}$. Prove que se A e B forem limitados então AB é limitado sendo $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ e $\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$.

16. Sejam $B \subseteq A$ conjuntos não-vazios de números reais. Suponha que A seja limitado superiormente e que para cada $x \in A$ exista u $y \in B$ tal que $x \leq y$. Prove que, nestas condições, tem-se $\sup(B) = \sup(A)$. Enuncie e demonstre um resultado análogo para inf.

17. Un número real r chama-se **algébrico** quando existe um polinômio P não identicamente nulo com coeficientes inteiros tal que $P(r) = 0$.
    (a) Prove que o conjunto dos polinômios de coeficientes inteiros é enumerável.
    (b) Conclua que O conjunto dos números algébricos A é enumerável.
    (c) Mostre que A é denso em $\mathbb{R}$.

18. Seja $a \in]0, +\infty[$. Dado um número racional p/q com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, defina a potência de base a e exponente racional p/q como $a^{p/q} := b$ tal que $b^q = a^p$. Prove que
    (a) Para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{rs}$.
    (b) Para todo $r \in \mathbb{Q}^+$ a funçnao $f :]0, +\infty[\to]0, \infty[$, dada por $f(x) = x^r$, é uma bijeção crescente.
    (c) A função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $g(r) = a^r$, (onde a é um número real positivo fixado) é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um isomorfismo de $\mathbb{R}$ em si mesmo. Prove que $f = \textit{identidade}$. Conclua que se $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ são corpos ordenados completos, existe um único isomorfismo de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{L}$. (Feito em aula)

20. Verifique que $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ definida por $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma biijeção de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo $]-1, 1[$.