Lista P2 Matemática Discreta
Stefano Nardulli

1. (Feito em sala de aula) Enunciar e provar a formula do binômio de Newton.
2. (Feito em sala de aula) Enunciar e provar a formula por indução e/ou combinatorialmente
$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{j_1+\cdots+j_k=k} \frac{n!}{j_1! \cdots j_k!} x_1^{j_1} \cdots x_k^{j_k}.$$
3. (Feito em sala de aula) Provar que $\sum_{k=0}^n C_{n,k} = 2^n$.
4. (Feito em sala de aula) Dar uma prova combinatória da formula $\sum_{k=0}^n C_{n,k} = 2^n$.
5. (Feito em sala de aula) Mostrar usando o binômio di Newton que (Convolução de Vandermonde) $C_{n,m} = \sum_{k=0}^m C_{n-p,m-k} C_{p,k}$.
6. Mostrar usando um argumento combinatório que (Convolução de Vandermonde) $C_{n,m} = \sum_{k=0}^m C_{n-p,m-k} C_{p,k}$.
7. (Feito em sala de aula) Dar uma prova combinatória que $C_{n,k} = C_{n-1,k} + C_{n-1,k-1}$, onde $C_{n,k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
8. (Feito em sala de aula) Calcular o número de soluções em inteiros não negativos para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$.
9. (Feito em sala de aula) Calcular o número de soluções em inteiros positivos para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$.
10. (Feito em sala de aula) Calcular o número de soluções em inteiros não negativos para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, com as restrições $x_1, x_3 \geq 2$.
11. Enunciar e demonstrar o Princípio de inclusão exclusão. Na sua forma geral com n conjuntos.
12. (a) Usando o Princípio de inclusão exclusão, calcular o número de funções sobrejetoras de $A \to B$, com $Card(A) = m \geq Card(B) = n$.
    (b) (Feito em sala de aula) calcular o número de funções injetoras de $A \to B$, com $Card(A) = m \leq Card(B) = n$.
13. Sendo $f(x)$, $g(x)$ as funções geradoras das sequências (a_r), (b_r) respectivamente, provar:
    (a) $Af(x) + Bg(x)$ é a função geradora para a sequência $(Aa_r + Bb_r)$.
    (b) $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) x^n$.
    (c) A função geradora para $(a_0 + \cdots + a_r)$ é igual a $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) f(x)$.
    (d) A função geradora para (ra_r) é igual a $xf'(x)$, onde $f'(x)$ é a derivada de f com respeito a x.
    (e) $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.
14. Mostrar usando o teorema binomial generalizado que o coeficiente de x^p na expansão de $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n$, é igual a $C_{n+p-1,p}$.
15. Encontrar a sequência cuja função geradora ordinária é $x^2 + x^3 + e^x$.
16. Encontrar a função geradora ordinária para a sequência $(a_n) = (\frac{2^n}{n!})$.
17. Encontrar a função geradora ordinária para a sequência $(a_n) = (\frac{1}{n} + n)$, $n \geq 1$.

18. (Exemplo 5.15 Livro Santos-Mello-Murari) Encontrar uma expressão para o número de maneiras de se distribuir r objetos idênticos em m caixas distintas, com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos q objetos e no máximo $q + z - 1$.

19. Usando o exercício precedente, calcular o numero de maneiras de distribuir 20 objetos idênticos em 4 caixas distintas com a restrição de que cada caixa contenha pelo menos 2 objetos e no máximo 5.

20. Fazer todos os exemplos e teoremas e exercícios do capitulo 5 de `https://aleph0.info/cursos/md/notas/md.pdf`. (dependendo do contéudo desenvolvido até o final do curso)

21. Exercício 38 pag. 60 de `https://aleph0.info/cursos/md/notas/md.pdf`.

22. (Exemplo 5.25 Livro Santos-Mello-Murari) Usar funções geradoras ordinárias para avaliar $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

23. Mais um exercício sobre aplicações de funções geradoras dependendo do contéudo desenvolvido até o final do curso.

24. Fazer todos os exemplos e teoremas das primeiras 3 seções do capitulo 5 do livro SANTOS, J. P. O; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007. (dependendo do contéudo desenvolvido até o final do curso).

25. (Facultativo) Fazer todos os exemplos e teoremas do capitulo 4 do livro SANTOS, J. P. O; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. Introdução à Análise Combinatória. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007. Para aumentar a nota.