

P2 de Teoria da medida
Bacharelado em Matemática
UFABC

Stefano Nardulli

24/08/2018

1. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função limitada. Provar que f é Riemann integrável se e só se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é de medida de Lebesgue nula. Neste caso $f \in \mathcal{B}([a, b])_\lambda$ e $\int_{[a, b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$, λ é a medida de Lebesgue e $\int_a^b f(x) dx$ denota a integral de Riemann.
2. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Provar que $g \circ f$ é absolutamente contínua sobre $[a, b]$.
3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua. Definamos a **variação total de f** , $F(x) := \sup_{\sigma \in \Sigma_{a,x}} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, onde $\Sigma_{a,x}$ é o conjunto de todas as partições $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x\}$, $f_+(x) := \frac{1}{2}(F(x) + f(x))$, $f_-(x) := \frac{1}{2}(F(x) - f(x))$. Mostrar que F está bem definida e que F, f_-, f_+ são monotonas não-decrescentes e absolutamente contínuas.
4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ uma função representável como $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$, $\forall x \in [a, b]$ com $g \in L^1([a, b], \lambda)$, se e só se f é absolutamente contínua.
5. Seja $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ um espaço de medida. Provar que para todo $p \in [1, +\infty]$, o espaço de todas as funções simples μ integráveis, é denso em $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$.
6. Seja $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < +\infty$, onde X é um espaço métrico e $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra dos Borelianos de X . Provar que para todo $p \in [1, +\infty[$ o espaço $C_b(X)$ das funções contínuas e limitadas é denso em $L^p(X, \mathcal{B}(X), \mu)$.
7. Definir a medida produto de dois espaços de medida σ -finita.
8. Enunciar e provar o Teorema de Fubini-Tonelli.
9. Seja μ uma medida σ -finita mas não finita. Mostrar através de exemplos que nenhuma inclusão entre espaços $L^p(\mu)$ é válida. Provar que para toda função

mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o conjunto $\{p \in [1, +\infty] : f \in L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)\}$, é um intervalo.

10. Seja $f \in L^p$, $g \in L^q$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, with $r \geq 1$. Então $fg \in L^r$ e além disso vale $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.