Linguagem matemática e elementos de lógica

Ana Carolina Boero

Quantificadores

Em Matemática, os *quantificadores* "existe" e "para todo", denotados respectivamente pelos símbolos $\exists$ e $\forall$, são amplamente utilizados. Eles aparecem em afirmações que envolvem *parâmetros* (também chamados de *variáveis*). Cada parâmetro se refere a objetos num determinado conjunto, chamado *universo de discurso*.

Exemplos:

- $\exists x \in \mathbb{Q}\ x^2 = 2$
- $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$

- $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \epsilon > 0\ \exists r \in \mathbb{Q}\ |x - r| < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon$

O quantificador existencial $\exists$ ("existe")

Além da palavra "existe", há outras expressões que sugerem a presença do quantificador existencial, como: "para algum", "algum", "pelo menos (um)", "é possível encontrar" etc.

Exemplo:

- $\exists x \in \mathbb{Q}\ x^2 = 2$
  Existe um número racional cujo quadrado é 2.
  $x^2 = 2$, para algum número racional x.
  O quadrado de algum número racional é 2.
  $x^2 = 2$, para pelo menos um número racional.
  É possível encontrar um número racional cujo quadrado é 2.

Observação: Em Matemática, "existe um" deve ser lido como "existe pelo menos um". O "um" em "existe um" é um artigo indefinido, e não um numeral. Quando quisermos frisar que existe exatamente um, escrevemos explicitamente "existe um único". O símbolo $\exists!$ é usado para indicar que existe um único.

O valor-verdade de $\exists x \in A\ p(x)$

Uma afirmação da forma $\exists x \in A\ p(x)$ será verdadeira quando $p(a)$ for verdadeira para algum elemento a do universo de discurso A. A proposição $p(a)$ é obtida substituindo as ocorrências de x em $p(x)$ por a. Se para cada a no universo de discurso tivermos que $p(a)$ é falsa, então a afirmação $\exists \in Ax\ p(x)$ será falsa.

Exemplos:

- A afirmação "$\exists x \in \mathbb{Q}\ x^2 = 2$" é falsa.[1]
- A afirmação "$\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 = 2$" é verdadeira.[2]

O quantificador universal $\forall$ ("para todo")

Além de "para todo", o símbolo $\forall$ pode ser lido como "para cada", "para qualquer", "sempre que", "todo", "cada", "qualquer" etc.

Exemplo:

- $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$
  Para todo número real x vale que $x^2 \geq 0$.
  $x^2 \geq 0$, para cada número real x.
  $x^2 \geq 0$, para qualquer número real x.

[1]Mostraremos isso no fim deste artigo, ao ilustrar o método de demonstração por redução ao absurdo.

[2]Falaremos sobre isso nas aulas dedicadas ao estudo dos números reais.

$x^2 \geq 0$ sempre que x é um número real.

O quadrado de todo número real é não-negativo.

O quadrado de cada número real é maior ou igual a 0.

O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a 0.

O valor-verdade de $\forall x \in A\ p(x)$

Uma afirmação da forma $\forall x \in A\ p(x)$ será verdadeira quando $p(a)$ for verdadeira para todos os elementos a do universo de discurso A. Se para algum a no universo de discurso tivermos que $p(a)$ é falsa, então a afirmação $\forall \in Ax\ p(x)$ será falsa. Um elemento a do universo de discurso A tal que $p(a)$ é falsa é chamado de *contraexemplo* para a afirmação $\forall x \in A\ p(x)$.

Assim, para mostrar que $\forall x \in A\ p(x)$ é falsa, basta apresentar um contraexemplo. (Observe que não é suficiente exibir um exemplo de a em A tal que $p(a)$ é verdadeira para concluir que $\forall x \in A\ p(x)$ é verdadeira).

Exemplos:

- A afirmação "$\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$" é verdadeira. De fato, basta lembrar que o produto de dois números reais positivo é um número positivo, que o produto de dois números reais negativos é um número positivo e que $0^2 = 0$.[3]

- A afirmação "$\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 > 0$" é falsa. De fato, essa afirmação é da forma $\forall x \in A\ p(x)$, onde $A = \mathbb{R}$ e $p(x)$ é dada por $x^2 > 0$. Temos que 0 pertence ao universo de discurso, $\mathbb{R}$, e $p(0)$ é falsa (pois $0^2 = 0$ e, portanto, 0^2 não é maior que 0). Em outras palavras, 0 é um contraexemplo para a afirmação $\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0$.

[3]Essas propriedades serão exploradas com mais detalhe nas aulas dedicadas ao estudo dos números reais.

Compreendendo afirmações matemáticas que envolvem quantificadores

Considere a seguinte afirmação matemática:

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y > x.$$

Para entender o que uma afirmação matemática como essa, que envolve múltiplos quantificadores, diz, vamos analisá-la gradativamente.

Começamos olhando para a parte que não envolve quantificadores, $y > x$. Ela pode ser lida como "y é maior que x". Incorporando o quantificador mais próximo da parte que acabamos de analisar, obtemos $\exists y \in \mathbb{N}\ y > x$, que pode ser lida como "é possível encontrar um número natural y tal que $y > x$". Incorporando, por fim, o próximo quantificador, chegamos a $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y >$

x, que pode ser lida como "para cada número natural x, é possível encontrar um número natural y tal que $y > x$".

Agora que compreendemos o significado da afirmação $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y > x$, vamos decidir se ela é verdadeira ou falsa. Sendo da forma $\forall x P(x)$, onde x percorre o universo de discurso — que, no caso, é conjunto dos números naturais —, ela será verdadeira se $P(n)$ for verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vemos que $P(1)$ é "$\exists y \in \mathbb{N}\ y > 1$", o que significa que é possível encontrar um número natural y tal que $y > 1$. Isso é verdade? Sim. Posso, por exemplo, tomar $y = 2$. E $P(2)$, é verdadeira ou falsa? $P(2)$ é "$\exists y \in \mathbb{N}\ y > 2$". Isso é verdade? Sim, pois conseguimos exibir um número natural maior que 2 — por exemplo, $y = 3$. Verificar que $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ etc. são verdadeiras, uma por uma, é inviável, pois o conjunto dos números naturais é infinito, e seu tempo não o é. O que fazemos, neste caso?

A ideia é muito simples — e esperta! Precisamos mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, correto? Para tanto, fixaremos m um número natural arbitrário (isto é, não específico) e apresentaremos um argumento que mostra que $P(m)$ é verdadeira. Como a única coisa que sabemos a respeito desse m é que ele é um número natural, o argumento apresentado pode ser utilizado para mostrar que $P(n)$ é verdadeira, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Fim!

Vamos aplicar essa ideia ao nosso exemplo. Fixemos m um número natural arbitrário. A fim de mostrar que $P(m)$ dada por $\exists y \in \mathbb{N}\ y > m$ é verdadeira, precisamos exibir um número natural maior que m. Quem poderia ser? Bem, os casos específicos que tratamos nos dão uma ideia (para 1, tomamos 2; para 2, tomamos, 3). Que tal tomarmos $m + 1$? Como $m + 1$ é um número natural e $m+1 > m$, concluímos que $P(m)$ é verdadeira. Note que o argumento utilizado (de tomar o sucessor do número dado) funciona para qualquer número natural: se $n = 1$, tomo 2; se $n = 2$, tomo 3; se $n = 1024$, tomo 1025. Com isso, fica provado que $P(n)$ é verdadeira, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Considere, agora, a seguinte afirmação matemática:

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$$

A diferença entre essa afirmação e a que acabamos de analisar é a ordem dos quantificadores. E essa alteração muda completamente o significado da afirmação considerada!

Vamos, primeiramente, entender o que essa nova afirmação significa. Começando pela parte sem quantificadores, $y > x$, nada muda: continuamos tendo "y é maior que x". Incorporando o quantificador mais próximo, obtemos $\forall x \in \mathbb{N}\ y > x$, que pode ser lida como "y é maior que qualquer número natural x". Incorporando o próximo quantificador, chegamos a $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$, que diz que "existe um número natural y que é maior que qualquer número natural x".

Perceba que o significado mudou: antes, $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y > x$ dizia que sempre que escolhíamos um número natural, era possível exibir um outro número natural maior do que aquele que havíamos escolhido; agora, $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$ diz que é possível exibir, *a priori*, um número natural maior que qualquer número natural que escolhamos.

Vamos, agora, decidir se a afirmação $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$ é verdadeira ou falsa. Para mostrar que ela é verdadeira, seria necessário apresentar um número natural y logo de cara e, depois, verificar que ele possui a propriedade desejada — no caso, ser maior que qualquer número natural x. É fácil ver por que o 5 não serve, né? Se eu falar "5", logo perceberei que 5 não é maior que 6, por exemplo. O que está por trás desse raciocínio é o seguinte: para qualquer número natural $y = n$ que eu pegue, consigo exibir alguém maior que ele — por exemplo, o seu sucessor $x = n + 1$. Isso garante que a afirmação $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y > x$ é falsa? Sim, pois mostramos que não é possível substituir y por um número natural n de modo que a afirmação $\forall x \in \mathbb{N}\ n > x$ seja verdadeira.

Conectivos

Além dos quantificadores "existe" e "para todo", os *conectivos* "e", "ou", "não" e "se... então" são elementos essenciais da linguagem matemática. Eles são utilizados para produzir afirmações mais complexas a partir de afirmações mais simples. O valor-verdade da afirmação mais complexa dependerá não apenas dos valores-verdade das afirmações mais simples que a compõem, mas também da maneira como essa afirmação mais complexa é construída a partir das mais simples, por meio dos conectivos.

O conectivo $\wedge$ ("e")

Dadas duas afirmações p e q, podemos construir uma nova afirmação denominada a *conjunção* de p e q, a qual será denotada por $p \wedge q$ (leia "p e q").

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \wedge q$ com base nos de p e q:

- $p \wedge q$ será verdadeira quando p e q forem ambas verdadeiras;
- em qualquer outro caso, $p \wedge q$ será falsa.

Esse critério pode ser apresentado de forma resumida por meio de uma *tabela-verdade*:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo:

- n é primo e n é par.

  Para $n = 2$, a afirmação "n é primo e n é par" é verdadeira, pois 2 é primo e 2 é par.

  Para $n = 3$, a afirmação "n é primo e n é par" é falsa, porque embora 3 seja primo, 3 não é par.

  Para $n = 4$, a afirmação "n é primo e n é par" é falsa, porque embora 4 seja par, 4 não é primo.

  Para $n = 9$, a afirmação "n é primo e n é par" é falsa, porque 9 não é primo e 9 não é par.

O conectivo $\vee$ ("ou")

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada a *disjunção* de p e q, a qual será denotada por $p \vee q$ (leia "p ou q").

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \vee q$ com base nos de p e q:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo:

- n é primo ou n é ímpar.

  Para $n = 2$, a afirmação "n é primo ou n é ímpar" é verdadeira, porque 2 é primo, embora 2 não seja é par.

  Para $n = 3$, a afirmação "n é primo ou n é ímpar" é verdadeira, porque 3 é primo e 3 é ímpar.

  Para $n = 9$, a afirmação "n é primo ou n é ímpar" é verdadeira, porque embora 9 não seja primo, 9 é ímpar.

  Para $n = 4$, a afirmação "n é primo ou n é ímpar" é falsa, porque 4 não é primo e tampouco é ímpar.

Observe que o sentido do "ou" em Matemática é inclusivo, em vez de exclusivo: quando dizemos que uma afirmação da forma $p \vee q$ é verdadeira, estamos incluindo a possibilidade de p e q serem, ambas, verdadeiras.

O conectivo $\neg$ ("não")

Dada uma sentença matemática p, podemos construir uma outra sentença matemática denominada a *negação* de p, a qual será denotada por $\neg p$ (leia "não p").

Critério que estabelece o valor-verdade de $\neg p$ com base no de p:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Exemplo:

- "n não é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m" é a negação de "n é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m".

  Para $n = 5$, temos que $n = 4 \cdot 1 + 1$ e, portanto, a afirmação "n é da forma $4m+1$ para algum inteiro

m" é verdadeira. Neste caso, a afirmação "n não é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m" é falsa. Para $n = 6$, a afirmação "n é da forma $4m+1$ para algum inteiro m" é falsa (porque o único número m que satisfaz a igualdade $6 = 4m + 1$ é $5/4$, que não é inteiro). Neste caso, a afirmação "n não é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m" é verdadeira.

O conectivo $\rightarrow$ ("se ... então")

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada o *condicional com antecedente p e consequente q*, a qual será denotada por $p \rightarrow q$ (leia "se p, então q").

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \rightarrow q$ com base nos de p e q:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo:

- Se n é primo e $n > 1$ então n é par.

  Para $n = 2$, a afirmação "se n é primo e $n > 1$ então n é par" é verdadeira, pois "2 é primo e $2 > 1$" é verdadeira e "2 é par" é verdadeira.

  Para $n = 3$, a afirmação "se n é primo e $n > 1$ então n é par" é falsa, pois "3 é primo e $3 > 1$" é verdadeira e "3 é par" é falsa.

  Para $n = 4$, a afirmação "se n é primo e $n > 1$ então

n é par" é verdadeira, pois "4 é primo e $4 > 1$" é falsa e "4 é par" é verdadeira.

Para $n = 9$, a afirmação "se n é primo e $n > 1$ então n é par" é verdadeira, pois "9 é primo e $9 > 1$" é falsa e "9 é par" é falsa.

Uma analogia para tornar a tabela-verdade de $p \to q$ mais palatável.

Pense em $p \to q$ como "se p acontecer, então eu prometo que q acontecerá".

- $p \to q$ será falsa quando a promessa for descumprida;
- $p \to q$ será verdadeira quando a promessa não for descumprida.

Por exemplo, considere a seguinte promessa: "se eu for aprovada no vestibular, subirei de joelhos a escadaria da

Igreja da Penha". Quando ela é descumprida? Somente no caso de o antecedente ser verdadeiro (isto é, de eu ser aprovada no vestibular) e o consequente ser falso (eu não subir de joelhos a escadaria da Igreja da Penha).

Qual a motivação dos matemáticos para interpretar $p \to q$ dessa forma?

Considere a seguinte afirmação:

"Todos os cães são mamíferos."

Para um matemático, é útil reescrevê-la da seguinte maneira:

"Para todo animal x, se x é cão então x é mamífero."

Utilizando símbolos, podemos denotar o conjunto de todos os animais por A, a frase "x é cão" por $C(x)$ e a frase “x é mamífero” por $M(x)$, obtendo

$$\forall x \in A(C(x) \to M(x)).$$

Aprendemos na escola que todos os cães são mamíferos. Logo, a afirmação $\forall x \in A(C(x) \to M(x))$ é verdadeira. O que isso nos diz? Isso nos diz que, para cada elemento a do conjunto A, a afirmação $C(a) \to M(a)$ é verdadeira.

Se tomo, por exemplo, $a = \text{Bob}$, meu cachorro, a afirmação $C(\text{Bob}) \to M(\text{Bob})$ será verdadeira. Se tomo $a = \text{Jade}$, a gatinha de uma aluna, a afirmação $C(\text{Jade}) \to M(\text{Jade})$ será verdadeira. Se tomo $a = \text{Nemo}$, um peixinho, a afirmação $C(\text{Nemo}) \to M(\text{Nemo})$ será verdadeira.

Observe que tanto o antecedente quanto o consequente do condicional $C(\text{Bob}) \to M(\text{Bob})$ são verdadeiros, uma vez que Bob é cachorro e Bob é mamífero. No caso do condicional $C(\text{Jade}) \to M(\text{Jade})$, o antecedente é falso (pois Jade não é um cachorro) e o consequente é verdadeiro (pois Jade é um mamífero) — o que corresponde à terceira linha da tabela-verdade de $\to$. Por fim, tanto o antecedente quanto o consequente do condicional $C(\text{Nemo}) \to M(\text{Nemo})$ são falsos (pois Nemo não é um cachorro e tampouco é um mamífero) — e essa situação corresponde à quarta linha da tabela-verdade de $\to$.

Portanto, para que um matemático possa considerar que "todos os cães são mamíferos" e "para todo animal x, se x é cão então x é mamífero" dizem a mesma coisa, é necessário que a terceira e quarta linhas da tabela-verdade do conectivo $\to$ sejam definidas da forma como apresentamos.

A noção de implicação

Voltemos nossa atenção à afirmação $C(x) \to M(x)$. Ela é da forma $p \to q$. Podemos pensar em p e q como propriedades que dependem de um parâmetro x, que varia em um conjunto (no caso, A, o conjunto de todos os animais).

Quando dizemos que p *implica* q, ou seja, que "ser cão" implica "ser mamífero", estamos dizendo que a afirmação

$$\forall x \in A\ (C(x) \to M(x))$$

é verdadeira. Isso significa que para cada substituição do parâmetro x por um elemento a do universo de discurso A, o condicional $C(a) \to M(a)$ é verdadeiro. A notação utilizada para indicar que "p implica q" é $p \Rightarrow q$.

Exemplos:

- $x > 3 \Rightarrow x \geq 3$, para $x \in \mathbb{N}$. De fato, esta é uma afirmação da forma $p \Rightarrow p \vee q$, onde p é dada por $x > 3$ e q é dada por $x = 3$. Portanto, para cada valor assumido por x no universo de discurso $\mathbb{N}$, a afirmação $x > 3 \rightarrow x \geq 3$ será verdadeira. (Por quê?)

- $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, para $x \in \mathbb{R}$. De fato, quando substituímos x por um número real a diferente de 2, o condicional $a = 2 \rightarrow a^2 = 4$ é verdadeiro, pois seu antecendente é falso. Tomando $a = 2$, temos que o condicional $a = 2 \rightarrow a^2 = 4$ é verdadeiro, pois tanto o antecedente quando o consequente são verdadeiros.

- $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$, para $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, quando substituímos x por um número real a diferente de 2, o condicional $a = 2 \Rightarrow a^3 = 8$ é verdadeiro, pois seu antecendente é falso. Tomando $a = 2$, temos que o condicional $a = 2 \Rightarrow a^3 = 8$

é verdadeiro, pois tanto o antecedente quando o consequente são verdadeiros.

Outras maneiras de ler "$p \Rightarrow q$" são:

- p é condição suficiente para q;
- q é condição necessária para p.

Note que essa nomenclatura faz sentido: por um lado, é suficiente saber que p é verdadeira para concluir que q é verdadeira; por outro, se q for falsa, então p também deve ser falsa — logo, é necessário que q seja verdadeira para que p seja verdadeira.

Exemplos revisitados (aqui, novamente, o universo de discurso é o conjunto dos números reais):

- Como $x > 3 \Rightarrow x \geq 3$, podemos dizer que $x > 3$ é condição suficiente para $x \geq 3$ e que

$x \geq 3$ é condição necessária para $x > 3$. Contudo, $x \geq 3 \not\Rightarrow x > 3$ (leia "$x \geq 3$" não implica "$x > 3$"), uma vez que $3 \geq 3 \to 3 > 3$ é falso. Portanto, $x \geq 3$ não é condição suficiente para $x > 3$ e $x > 3$ não é condição necessária para $x \geq 3$.

- Como $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$, podemos dizer que $x = 2$ é condição suficiente para $x^2 = 4$ e que $x^2 = 4$ é condição necessária para $x = 2$. Contudo, $x^2 = 4 \not\Rightarrow x = 2$, uma vez que $(-2)^2 = 4 \to -2 = 2$ é falso. Portanto, $x^2 = 4$ não é condição suficiente para $x = 2$ e $x = 2$ não é condição necessária para $x^2 = 4$.

- Como $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$ e $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$, dizemos que p é condição necessária e suficiente para q e, analogamente, que q é é condição necessária e suficiente para p.

Quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$, dizemos que *p e q são equivalentes* e escrevemos $p \Leftrightarrow q$.

Exemplo (aqui, o universo de discurso continua sendo o conjunto dos números reais):

- $x = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8$. Isso significa que $\forall x \in \mathbb{R}[(x = 2 \rightarrow x^3 = 8) \wedge (x^3 = 8 \rightarrow x = 2)]$ é verdadeira. Observe que, dentro dos colchetes, apareceu uma expressão da forma $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Os matemáticos costumam reescrevê-la de modo sucinto como $p \leftrightarrow q$ (leia "p se, e somente se, q"). O conectivo $\leftrightarrow$ é chamado de *bicondicional*.

Observação importante: Em diversas ocasiões, vocês se depararão com frases do tipo "demonstre/prove/mostre que se p então q" e "demonstre/prove/mostre que p se, e somente se, q". Vocês devem entender esse pequeno abuso de linguagem da seguinte maneira: “demonstre/prove/mostre que p implica q” e “demonstre/prove/mostre que p e q são equivalentes (ou seja, que p implica q e que q implica p)”, respectivamente.

Demonstração direta e demonstração do tipo “se e somente se”

Afirmamos, acima, que $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Como justificamos isso? Já sabemos que não precisamos nos preocupar com os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x^3 \neq 8$ (pois, neste caso, o antecedente do condicional $x^3 = 8 \to x = 2$ será falso e, portanto, o condicional será verdadeiro). Tomamos x um número real arbitrário, tal que $x^3 = 8$. Sabemos que, se somarmos -8 a ambos os membros dessa equação, obteremos $x^3 - 8 = 0$. Esse argumento mostra que $x^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 8 = 0$. Sabemos, ainda, que $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, donde segue que

$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = 0$. Por fim, sabemos que a única raíz da equação $(x-2)(x^2+2x+4) = 0$ é 2. Disto decorre que $(x-2)(x^2+2x+4) \Rightarrow x = 2$. Juntando tudo, obtemos $x^3 = 8 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2+2x+4) \Rightarrow x = 2$. Portanto, $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$.

O raciocínio empregado no exemplo acima indica que, a fim de mostrar que $p \Rightarrow q$, basta assumir a *hipótese*, p, como verdadeira e, valendo-se de raciocínios "preservadores da verdade", chegar à conclusão de que a *tese*, q, é verdadeira. Uma demonstração que segue essa estrutura é chamada de *demonstração direta*.

Para mostrar que $x = 2 \Leftrightarrow x^3 = 8$ precisamos mostrar que $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$ e que $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$. Como fazemos isso? Simples: tratamos de cada implicação separadamente. Já mostramos que $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ utilizando a técnica de demonstração direta. Faremos o mesmo, agora, para mostrar que

$x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$. Essa técnica nos diz que devemos assumir a hipótese, $x = 2$ como verdadeira e, por meio de argumentos corretos e claros, verificar que a tese, $x^3 = 8$, é verdadeira. Mãos à obra! Começamos tomando um número real arbitrário x tal que $x = 2$. Elevando ambos os membros da igualdade $x = 2$ ao cubo, obtenho $x^3 = 8$. Logo, $x = 2 \Rightarrow x^3 = 8$. Isto encerra a demonstração.

Resumindo: a fim de provar que $p \Leftrightarrow q$ basta provar que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. E isso é feito em duas etapas distintas: a "ida", $p \Rightarrow q$, e a "volta", $q \Rightarrow p$. Essa técnica se aplica a *demonstrações do tipo "se e somente se"*.

Recíproca e contrapositiva

Dado um condicional $p \to q$, a sua *recíproca* é o condicional $q \to p$.

Exemplos:

- Já vimos que o condicional "$-2 = 2 \to (-2)^2 = 4$" é verdadeiro. Contudo, a sua recíproca "$(-2)^2 = 4 \to -2 = 2$" é falsa.

- O condicional "$x = 2 \to x^3 = 8$" é verdadeiro para todo número real x, bem como sua recíproca "$x^3 = 8 \to x = 2$".

Os exemplos acima mostram que um condicional e sua recíproca não têm, necessariamente, os mesmos valores-verdade.

Dado um condicional $p \to q$, a sua *contrapositiva* é o condicional $(\neg q) \to (\neg p)$.

Exemplos:

- A contrapositiva do condicional "$x = 2 \to x^2 = 4$" é o condicional "$x^2 \neq 4 \to x \neq 2$".

- A contrapositiva do condicional "$x = 2 \rightarrow x^3 = 8$" é o condicional "$x^3 \neq 8 \rightarrow x \neq 2$".

Um condicional $p \rightarrow q$ será falso exatamente quando p for verdadeira e q for falsa. O que podemos dizer acerca de sua contrapositiva? Ora, por também se tratar de um condicional, $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ será falso exatamente quando o antecedente $\neg q$ for verdadeiro e o consequente, $\neg p$, for falso — ou seja, exatamente quando q for falsa e p for verdadeira. Em outras palavras, um condicional $p \rightarrow q$ e a sua contrapositiva $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ têm, sempre, os mesmos valores-verdade.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Embora um condicional e sua contrapositiva sejam equivalentes, a importância da contrapositiva é que, às vezes, ela é mais fácil de ser verificada do que o condicional original.

Exemplo:

- Seja n um número inteiro. Prove que se n^2 é par então n é par.

  A contrapositiva de "se n^2 é par então n é par" é o condicional "se n é ímpar então n^2 é ímpar". Como um condicional e sua contrapositiva são equivalentes, a fim de concluir que n^2 é par $\Rightarrow n$ é par, basta provar que n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar. Verificar a segunda implicação é mais fácil. (Por quê?) Tome n um número ímpar arbitrário. Temos que $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ e $2k^2 + 2k$ é um número inteiro, concluímos que n^2 é ímpar.

Resumindo: a fim de provar que $p \Rightarrow q$ basta provar que $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$. Essa técnica é chamada de *demonstração por contraposição*.

Como negar afirmações matemáticas?

Vimos acima que, para construir a contrapositiva de um condicional, é necessário negar afirmações matemáticas. Essa necessidade também se fará presente quando formos fazer demonstrações por redução ao absurdo.

A negação de uma dada afirmação matemática é uma outra afirmação matemática que será falsa exatamente quando a afirmação dada for verdadeira. Portanto, para negar uma afirmação matemática, devemos nos perguntar: o que precisa ser verdadeiro para que a afirmação dada seja falsa? A resposta dessa pergunta será a negação da afirmação dada.

Negação de $\exists x \in A\ p(x)$

Para que $\exists x \in A\ p(x)$ seja falsa, é necessário que, para cada $a \in A$, a afirmação $p(a)$ seja falsa. Em outras palavras, é necessário que, para cada $a \in A$, $\neg p(a)$ seja verdadeira — ou seja, que $\forall x \in A\ (\neg p(x))$ seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $\exists x \in A\ p(x)$ será a afirmação $\forall x \in A\ (\neg p(x))$.

Exemplo:

- Negando "existe um número primo ímpar" obtemos "todos os números primos são pares". De fato, podemos reescrever "existe um número primo ímpar" como "$\exists p \in P\ p$ é ímpar", onde P denota o conjunto dos números primos. A negação dessa afirmação é dada por "$\forall p \in P\ p$ não é ímpar" (ou, equivalentemente, "$\forall p \in P\ p$ é par").

Negação de $\forall x \in A\ p(x)$

Para que $\forall x \in A\ p(x)$ seja falsa, é necessário que exista $a \in A$ tal que a afirmação $p(a)$ seja falsa. Em outras palavras, é necessário que exista $a \in A$ tal que $\neg p(a)$ seja verdadeira — ou seja, que $\exists x \in A\ (\neg p(x))$ seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $\forall x \in A\ p(x)$ será a afirmação $\exists x \in A\ (\neg p(x))$.

Exemplos:

- Negando "todo número primo é ímpar" obtemos "existe um número primo que é par". De fato, podemos reescrever "todo número primo é ímpar" como "$\forall p \in P\ p$ é ímpar", onde P denota o conjunto dos números primos. A negação dessa afirmação é dada por "$\exists p \in P\ p$ não é ímpar" (ou, equivalentemente, "$\exists p \in P\ p$ é par").

- $\neg(\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$ pode ser obtida por etapas, aplicando sucessivamente as regras de negação de quantificadores. De fato, $\neg(\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$ é dada por $\exists \epsilon > 0\ \neg(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$. Mas $\neg(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$ é dada por $\forall N \in \mathbb{N}\ \neg(\forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$. Contudo, $\neg(\forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$ é dada por $\exists n \geq N\ \neg(|a_n - a| < \epsilon)$, ou seja, por $\exists n \geq N\ |a_n - a| \geq \epsilon$. Juntando tudo, temos que $\neg(\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ |a_n - a| < \epsilon)$

é a afirmação $\exists \epsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N \, |a_n - a| \geq \epsilon$.

Negação de $p \wedge q$

Para que $p \wedge q$ seja falsa, preciso que pelo menos uma entre p e q seja falsa. Em outras palavras, preciso que pelo menos uma entre $\neg p$ e $\neg q$ seja verdadeira — ou seja, que $(\neg p) \vee (\neg q)$ seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $p \wedge q$ será a afirmação $(\neg p) \vee (\neg q)$.

Exemplo:

- Negando "n é primo e n é par" obtemos "n não é primo ou n não é par".

Negação de $p \vee q$

Para que $p \vee q$ seja falsa, preciso que p e q sejam ambas falsas. Em outras palavras, preciso que $\neg p$ e $\neg q$ sejam ambas verdadeira — ou seja, que $(\neg p) \wedge (\neg q)$ seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $p \vee q$ será a afirmação $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

Exemplos:

- Negando "n é primo ou n é ímpar" obtemos "n não é primo e n não é ímpar".
- Negando "$x \geq 2$" (ou seja, "$x > 2 \vee x = 2$") obtemos $x < 2$ (pois a negação de "$x > 2$" é "$x \leq 2$" e a negação de "$x = 2$" é "$x \neq 2$").

Negação de $\neg p$

Para que $\neg p$ seja falsa, preciso que p seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $\neg p$ será a afirmação p.

Exemplo:

- Negando "n não é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m" obtemos "n é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m". Observe que "$\forall m \in \mathbb{Z}\ n \neq 4m+1$" é uma outra forma de escrever a afirmação "n não é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m" e que a negação de "$\forall m \in \mathbb{Z}\ n \neq 4m + 1$" é "$\exists m \in \mathbb{Z}\ n = 4m + 1$", que diz justamente que "n é da forma $4m + 1$ para algum inteiro m".

Negação de $p \to q$

Para que $p \to q$ seja falsa, preciso que p seja verdadeira e que q seja falsa. Em outras palavras, preciso que p seja verdadeira e que $\neg q$ seja verdadeira — ou seja, que $p \wedge (\neg q)$ seja verdadeira.

A negação de uma afirmação da forma $p \to q$ será a afirmação $p \wedge (\neg q)$.

Exemplo:

- Negando "se n é primo e $n > 1$ então n é par" obtemos "n é primo e $n > 1$ e n é ímpar".

O método de redução ao absurdo

O *método de redução ao absurdo*, mencionado em duas ocasiões neste artigo, é uma técnica de demonstração bastante útil e frequentemente utilizada. Ele se baseia no *princípio da não-contradição* (que diz que uma afirmação matemática não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa) e no *princípio do terceiro excluído* (que diz que, fixado um contexto específico, uma afirmação matemática ou a sua negação é verdadeira).

A fim de provar que uma afirmação matemática p é verdadeira, supomos "por absurdo" que $\neg p$ seja verdadeira. Usando a informação de que $\neg p$ é verdadeira (além de outros fatos que já sabemos ser verdadeiros), derivamos que uma afirmação matemática q e a sua negação $\neg q$ são ambas verdadeiras, o que viola o princípio da não-contradição. Deste absurdo, concluímos que $\neg p$ não pode ser verdadeira, donde segue (pelo princípio do terceiro excluído) que a sua negação, p, é verdadeira.

Exemplo:

- Desejamos provar que $\sqrt{2}$ (isto é, o número real positivo cujo quadrado é 2) é irracional. Por absurdo, suponhamos que $\sqrt{2}$ seja racional. Nesse caso, existem p e q inteiros positivos e relativamente primos (isto é, tais que $\text{mdc}(p, q) = 1$) satisfazendo $\sqrt{2} = p/q$. Dessa igualdade segue que $p = q\sqrt{2}$. Elevando ambos os membros ao quadrado obtemos $p^2 = 2q^2$, donde segue que p^2 é par. Sendo p^2 par, temos que p é par. Logo, $p = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $p = 2k$ em $p^2 = 2q^2$, obtemos $q^2 = 2k^2$, donde segue que q^2 é par e, portanto, que q é par. Mas o fato de p e q serem ambos pares contradiz o fato de que $\text{mdc}(p, q) = 1$. Este absurdo nos permite concluir que $\sqrt{2}$ é irracional.