Elementos de lógica e linguagem matemática

Ana Carolina Boero

E-mail: ana.boero@ufabc.edu.br
Página: `http://professor.ufabc.edu.br/~ana.boero`

Sala 512-2 - Bloco A - Campus Santo André

Universidade Federal do ABC

Linguagem matemática

A linguagem matemática é composta de símbolos que denotam relações, operações, constantes e variáveis, além do *modificador lógico*

$$\neg \quad (\text{“não”})$$

dos *conectivos lógicos*

$$\begin{array}{cl} \wedge & (\text{“e”}) \\ \vee & (\text{“ou”}) \\ \rightarrow & (\text{“se ... então”}) \\ \leftrightarrow & (\text{“se e somente se”}) \end{array}$$

e dos *quantificadores*

$$\begin{array}{cl} \exists & (\text{“existe”}) \\ \forall & (\text{“qualquer que seja”}). \end{array}$$

Linguagem matemática

Quando relacionamos variáveis, constantes e (repetidas) operações envolvendo constantes e variáveis, produzimos as mais simples sentenças matemáticas.

Exemplos:

(a) $x \in A$
(b) $0 < 1$
(c) $y = -1$
(d) $z^2 + 3z + 2 = 0$

Linguagem matemática

O modificador lógico, os conectivos lógicos e os quantificadores são usados para produzir novas sentenças matemáticas a partir de sentenças matemáticas já existentes.

Exemplos:

(a) $x \notin A$
(b) $0 < 1$ ou $0 \geq 1$
(c) se $|y| \leq 1$, então $y \geq -1$ e $y \leq 1$
(d) $z^2 + 3z + 2 = 0$ se, e somente se, $z = 1$ ou $z = 2$
(e) para todo real x, existe um natural n tal que $n > x$
(f) existe um natural n tal que, para todo real x, tem-se $n > x$

Modificador $\neg$

Dada uma sentença matemática p, podemos construir uma outra sentença matemática denominada a *negação* de p, a qual será denotada por $\neg p$ (leia "não p").

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
p&: \ 12 + 12 = 0 \\
\neg p&: \ 12 + 12 \neq 0
\end{aligned}
$$

Modificador $\neg$

Critério que estabelece o *valor-verdade* de $\neg p$ com base no de p:

- $\neg p$ será falsa quando p for verdadeira;
- $\neg p$ será verdadeira quando p for falsa.

Tabela-verdade de $\neg p$

p	$\neg p$
V	F
F	V

Observação

As noções de veracidade e falsidade não são absolutas!!!
Elas estão sempre vinculadas a um contexto fixado.

Exemplo:

- no contexto de números inteiros, "$12 + 12 = 0$" é falsa
- no contexto de um relógio que marca vinte e quatro horas, "$12 + 12 = 0$" é verdadeira

Conectivo $\wedge$

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada a *conjunção* de p e q, a qual será denotada por $p \wedge q$ (leia "p e q").

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
p&: \ 6+6 \neq 0 \\
q&: \ 12+12 \neq 0 \\
p \wedge q&: \ 6+6 \neq 0 \text{ e } 12+12 \neq 0
\end{aligned}
$$

Conectivo $\wedge$

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \wedge q$ com base nos de p e q:

- $p \wedge q$ será verdadeira quando p e q forem verdadeiras;
- em qualquer outro caso, $p \wedge q$ será falsa.

Tabela-verdade de $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conectivo $\vee$

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada a *disjunção* de p e q, a qual será denotada por $p \vee q$ (leia "p ou q").

Exemplo:

$$\begin{aligned} p&: \ 6+6 \neq 0 \\ q&: \ 12+12 \neq 0 \\ p \vee q&: \ 6+6 \neq 0 \text{ ou } 12+12 \neq 0 \end{aligned}$$

Conectivo $\vee$

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \vee q$ com base nos de p e q:

- $p \vee q$ será falsa quando p e q forem falsas;
- em qualquer outro caso, $p \vee q$ será verdadeira.

Tabela-verdade de $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observação: $\vee$ deve ser pensado como “e/ou”.

Conectivo $\rightarrow$

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada o *condicional* com *antecedente* p e *consequente* q, a qual será denotada por $p \rightarrow q$ (leia "se p, então q").

Exemplo:

p: $6 + 6 \neq 0$

q: $12 + 12 \neq 0$

$p \rightarrow q$: se $6 + 6 \neq 0$, então $12 + 12 \neq 0$

Conectivo $\rightarrow$

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \rightarrow q$ com base nos de p e q:

- $p \rightarrow q$ será falsa quando p for verdadeira e q for falsa;
- em qualquer outro caso, $p \rightarrow q$ será verdadeira.

Tabela-verdade de $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Explicação da tabela-verdade de $p \to q$

Pense em $p \to q$ como "se p acontecer, eu prometo que q acontecerá".

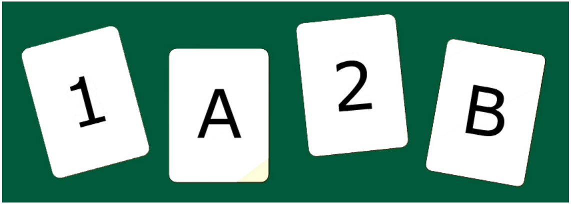
- $p \to q$ será falsa quando a promessa for descumprida;
- $p \to q$ será verdadeira quando a promessa não for descumprida.

Por exemplo, considere a seguinte promessa: "se eu for aprovada no vestibular, subirei de joelhos a escadaria da Igreja da Penha".

Quando ela é descumprida? Somente no caso de o antecedente ser verdadeiro (isto é, de eu ser aprovada no vestibular) e o consequente ser falso (eu não subir de joelhos a escadaria da Igreja da Penha).

Exercício: Wason selection task

Há quatro cartas numa mesa, cada uma com um número de um lado e uma letra do outro. As faces visíveis das cartas mostram 1, 2, A e B.



Quais cartas devem ser viradas de modo a estabelecer o valor-verdade da seguinte proposição: se uma carta tem um número par de um lado, então tem uma vogal do outro?

Contrapositiva, recíproca e inversa

Sejam p e q duas sentenças matemáticas.

- A *contrapositiva* de $p \to q$ é a sentença matemática $(\neg q) \to (\neg p)$.
- A *recíproca* de $p \to q$ é a sentença matemática $q \to p$.
- A *inversa* de $p \to q$ é a sentença matemática $(\neg\, p) \to (\neg q)$.

Exemplo:

	se $\sqrt{2}$ é inteiro, então 2 é inteiro
contapositiva:	se 2 não é inteiro, então $\sqrt{2}$ não é inteiro
recíproca:	se 2 é inteiro, então $\sqrt{2}$ é inteiro
inversa:	se $\sqrt{2}$ não é inteiro, então 2 não é inteiro

Contrapositiva, recíproca e inversa

Observações:

- $p \rightarrow q$ é verdadeira exatamente quando sua contrapositiva o é:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

- os valores-verdade de $p \rightarrow q$ e de sua recíproca podem ser diferentes;
- a inversa de $p \rightarrow q$ é a contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$.

Conectivo $\leftrightarrow$

Dadas duas sentenças matemáticas p e q, podemos construir uma outra sentença matemática denominada o *bicondicional* com componentes p e q, a qual será denotada por $p \leftrightarrow q$ (leia "p se, e somente se, q").

Exemplo:

$$\begin{aligned} p&: \ x > 1 \\ q&: \ x \geq 2 \\ p \leftrightarrow q&: \ x > 1 \text{ se, e somente se, } x \geq 2 \end{aligned}$$

Conectivo $\leftrightarrow$

Critério que estabelece o valor-verdade de $p \leftrightarrow q$ com base nos de p e q:

- $p \leftrightarrow q$ será verdadeira quando ambas as sentenças p e q forem verdadeiras ou quando ambas as sentenças p e q forem falsas;
- em qualquer outro caso, $p \leftrightarrow q$ será falsa.

Tabela-verdade da sentença $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observação: $\leftrightarrow$ deve ser pensado como "exatamente quando".

Variáveis livres

Material adicional

Sejam x uma variável e p uma sentença matemática na qual x ocorre.

Uma ocorrência de x em p é denominada *livre* se não há quantificadores agindo sobre ela. Dizemos que x *ocorre livre* em p se existe uma ocorrência livre de x em p.

Exemplos:

(a) x ocorre livre em $x^2 = 2$

(b) x e y ocorrem livres em $x < y$

(c) x ocorre livre em $\exists y(y < x)$, mas y não

(d) x e y não ocorrem livres em $\forall x \exists y(y < x)$

Proposições abertas

Material adicional

Sejam x uma variável e p uma sentença matemática na qual x ocorre.

Dizemos que p é uma *proposição aberta em x* se

- x ocorre livre em p e
- nenhuma outra variável ocorre livre em p.

Notação: Quando quisermos enfatizar que p é uma proposição aberta em x, escreveremos $p(x)$ em vez de p.

Exemplos:

(a) $x^2 = 2$ pode ser denotada por $p(x)$

(b) $x < y$ não pode ser denotada por $p(x)$ nem por $p(y)$

(c) $\exists y(y < x)$ pode ser denotada por $p(x)$, mas não por $p(y)$

(d) $\forall x \exists y(y < x)$ não pode ser denotada por $p(x)$ nem por $p(y)$

Quantificador existencial

O *quantificador existencial* é indicado pelo símbolo $\exists$ (leia "existe").

Exemplo:

$$\begin{aligned} p(x)\!:&\ \ x^2 = 2 \\ \exists x p(x)\!:&\ \ \exists x(x^2 = 2) \\ &\ \ \text{existe } x \text{ tal que } x^2 = 2 \end{aligned}$$

Observações:

- $\exists$ deve ser pensado como "existe pelo menos um";
- o símbolo $\exists!$ significa "existe um único".

Quantificador universal

O *quantificador universal* é indicado pelo símbolo $\forall$ (leia "qualquer que seja", "para todo", "para cada", "todo", "cada").

Exemplos:

$p(x)$: $x^2 \geq 0$
$\forall x p(x)$: $\forall x (x^2 \geq 0)$
$x^2 \geq 0$, qualquer que seja x

$p(x)$: $\exists y (y < x)$
$\forall x p(x)$: $\forall x \exists y (y < x)$
para todo x existe y tal que $y < x$
para cada x existe y tal que $y < x$

Sentenças matemáticas particulares e universais

- Uma sentença matemática da forma $\exists x p(x)$ é dita *particular*.
- Uma sentença matemática da forma $\forall x p(x)$ é dita *universal*.

Exemplos:

(a) a sentença matemática $\exists x(x^2 = 2)$ é particular
(b) a sentença matemática $\forall x(x^2 \geq 0)$ é universal
(c) a sentença matemática $\forall x \exists y(x < y)$ é universal
(d) a sentença matemática $\exists y \forall x(x < y)$ é particular

Universo de discurso

Um *universo de discurso* (ou *domínio de discurso*) é um conjunto $\mathbb{U}$ no qual interpretamos os símbolos que denotam relações, operações, constantes e variáveis da linguagem matemática.

Você se lembra do tal "contexto" na discussão do valor-verdade da sentença matemática "$12 + 12 = 0$"?

Conjunto-verdade de uma proposição aberta

Suponha fixado um universo de discurso $\mathbb{U}$.

Seja $p(x)$ uma proposição aberta.

O *conjunto-verdade* de $p(x)$ em $\mathbb{U}$ é formado pelos elementos a de $\mathbb{U}$ que "verificam" $p(a)$.

Exemplos:

(a) O conjunto-verdade da proposição aberta $x^2 = 2$ em $\mathbb{R}$ é formado pelos números reais $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$; contudo, seu conjunto-verdade em $\mathbb{Q}$ é vazio.

(b) O conjunto-verdade da proposição aberta $\exists y(y < x)$ em $\mathbb{N}$ é $\mathbb{N} - \{0\}$; em $\mathbb{Z}$, é o próprio $\mathbb{Z}$.

Exemplos e contraexemplos

Suponha fixado um universo de discurso $\mathbb{U}$.

Seja $p(x)$ uma proposição aberta.

- Um *exemplo* para $p(x)$ em $\mathbb{U}$ é um elemento de $\mathbb{U}$ que pertence ao conjunto-verdade da proposição aberta $p(x)$ em $\mathbb{U}$.
- Um *contraexemplo* para $\forall x p(x)$ em $\mathbb{U}$ é um elemento de $\mathbb{U}$ que não pertence ao conjunto-verdade da proposição aberta $p(x)$ em $\mathbb{U}$.

Exemplos:

(a) $\sqrt{2}$ é um exemplo para $x^2 = 2$ em $\mathbb{R}$; contudo, $x^2 = 2$ não possui exemplo em $\mathbb{Q}$.

(b) 0 é um contraexemplo para $\forall x \exists y (y < x)$ em $\mathbb{N}$; contudo, $\forall x \exists y (y < x)$ não possui contraexemplo em $\mathbb{Z}$.

Valor-verdade de uma sentença particular

Suponha fixado um universo de discurso $\mathbb{U}$.

Seja $p(x)$ uma proposição aberta.

A sentença matemática particular $\exists x p(x)$ será *verdadeira* em $\mathbb{U}$ se o conjunto-verdade de $p(x)$ em $\mathbb{U}$ for não vazio; caso contrário, ela será *falsa* em $\mathbb{U}$.

Exemplo:

(a) $\exists x(x^2 = 2)$ é verdadeira em $\mathbb{R}$; contudo, $\exists x(x^2 = 2)$ é falsa em $\mathbb{Q}$.

Valor-verdade de uma sentença universal

Suponha fixado um universo de discurso $\mathbb{U}$.

Seja $p(x)$ uma proposição aberta.

A sentença matemática universal $\forall x p(x)$ será *verdadeira* em $\mathbb{U}$ se o conjunto-verdade de $p(x)$ em $\mathbb{U}$ for o próprio $\mathbb{U}$; caso contrário, ela será *falsa* em $\mathbb{U}$.

Exemplos:

(a) $\forall x(x^2 \geq 0)$ é verdadeira em $\mathbb{R}$.

(b) $\forall x \exists y(y < x)$ é falsa em $\mathbb{N}$, pois 0 é um contraexemplo; contudo, $\forall x \exists y(y < x)$ é verdadeira em $\mathbb{Z}$.

Negação de $\neg p$

As sentenças matemáticas $\neg(\neg p)$ e p são *equivalentes*.

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

Por esta razão, negamos a sentença matemática $\neg p$ escrevendo a sentença matemática p.

Exemplo:

9 e 18 não são primos entre si

negação: 9 e 18 são primos entre si

Negação de $p \wedge q$

As sentenças matemáticas $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p) \vee (\neg q)$ são equivalentes.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Por esta razão, negamos a sentença matemática $p \wedge q$ escrevendo a sentença matemática $(\neg p) \vee (\neg q)$.

Exemplo:

n é divisível por 2 e 3

negação: n não é divisível por 2 ou n não é divisível por 3

Negação de $p \vee q$

As sentenças matemáticas $\neg(p \vee q)$ e $(\neg p) \wedge (\neg q)$ são equivalentes.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Por esta razão, negamos a sentença matemática $p \vee q$ escrevendo a sentença matemática $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

Exemplo:

$x \leq 0$ ou $x > 1$

negação: $x > 0$ e $x \leq 1$ (abreviadamente, $0 < x \leq 1$)

Negação de $p \to q$

As sentenças matemáticas $\neg(p \to q)$ e $p \wedge (\neg q)$ são equivalentes.

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Por esta razão, negamos a sentença matemática $p \to q$ escrevendo a sentença matemática $p \wedge (\neg q)$.

Exemplo:

se $x \in A$, então $x \in B$

negação: $x \in A$ e $x \notin B$

Negação de $\exists x p(x)$

As sentenças matemáticas $\neg \exists x p(x)$ e $\forall x(\neg p(x))$ assumem o mesmo valor-verdade em qualquer universo de discurso fixado.

Por esta razão, negamos a sentença matemática $\exists x p(x)$ escrevendo a sentença matemática $\forall x(\neg p(x))$.

Exemplo:

existe x tal que $x^2 = 2$

negação: $x^2 \neq 2$, qualquer que seja x

Negação de $\forall x p(x)$

As sentenças matemáticas $\neg\forall x p(x)$ e $\exists x(\neg p(x))$ assumem o mesmo valor-verdade em qualquer universo de discurso fixado.

Por esta razão, negamos a sentença matemática $\forall x p(x)$ escrevendo a sentença matemática $\exists x(\neg p(x))$.

Exemplo:

	para cada x, se $x \in A$ então $x \in B$
negação:	existe x tal que $x \in A$ e $x \notin B$

Implicação lógica

Sejam p e q sentenças matemáticas.

Escrevemos $p \Rightarrow q$ (leia *p implica q*) para indicar que q é verdadeira sempre que p é verdadeira.

Exemplo:

p: x é um número real não-negativo que verifica $\sqrt{x} + 2 = x$

q: $x \in \{a \in \mathbb{R} : a = 1 \text{ ou } a = 4\}$

$p \Rightarrow q$: ✓

$q \not\Rightarrow p$: 1 não é raiz de $\sqrt{x} + 2 = x$

Outras maneiras de ler $p \Rightarrow q$:

- q é *condição necessária* para p;
- p é *condição suficiente* para q.

Equivalência lógica

Sejam p e q sentenças matemáticas.

Escrevemos $p \Leftrightarrow q$ (leia p e q são *equivalentes*) para indicar que p e q sempre assumem os mesmos valores-verdade.

Observação: $p \Leftrightarrow q$ exatamente quando $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Exemplo:

p: x é um número real tal que $x^2 - x - 2 = 0$

q: $x \in \{a \in \mathbb{R} : a = -1 \text{ ou } a = 2\}$

$p \Leftrightarrow q$: ✓

Outra maneira de ler $p \Leftrightarrow q$: p é *condição necessária e suficiente* para q.

Demonstrações

Uma *demonstração* deve ser encarada como um conjunto organizado de evidências de que o resultado que desejamos obter está correto.

Em outras palavras, demonstrar uma sentença matemática consiste basicamente em adotar certos "pressupostos" e, valendo-se de raciocínios "preservadores da verdade", usá-los para obter a conclusão desejada.

Demonstração direta

Sejam p e q duas sentenças matemáticas.

A fim de provar que $p \Rightarrow q$, basta assumir a hipótese, p, como verdadeira e, valendo-se de raciocínios "preservadores da verdade", chegar à conclusão de que a tese, q, é verdadeira.

Exemplo:

Seja n um número inteiro. Se n é par, então n^2 é par.

Demonstração: Na lousa.

Demonstração do tipo “se e somente se”

Sejam p e q duas sentenças matemáticas.

A fim de provar que $p \Leftrightarrow q$ basta provar que $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$.

Exemplo:

Seja n um número inteiro. n é par se, e somente se, n^2 é par.

Demonstração: Na lousa.

Demonstração por contraposição

Sejam p e q duas sentenças matemáticas.

A fim de provar que $p \Rightarrow q$ basta provar que $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

Exemplo:

Seja n um número inteiro. Se n^2 é par, então n é par.

Demonstração: Na lousa.

Demonstração por absurdo

Seja p uma sentença matemática.

A fim de provar p basta tomar $\neg p$ como "pressuposto" e, valendo-se de raciocínios "preservadores da verdade", obter uma contradição.

Exemplo:

Não existe número racional cujo quadrado seja 2.

Demonstração: Na lousa.

Uma outra demonstração

Exemplo:

Existem infinitos números primos.

Demonstração: Na lousa.