Conjuntos numéricos

Ana Carolina Boero

E-mail: ana.boero@ufabc.edu.br
Página: `http://professor.ufabc.edu.br/~ana.boero`

Sala 512-2 - Bloco A - Campus Santo André

Universidade Federal do ABC

Números naturais

Como somos apresentados aos números?

- Num primeiro momento, aprendemos a enunciar uma série de palavras (*um*, *dois*, *três*, ...) sem atribuir qualquer significado a elas.
- Algum tempo depois, aprendemos a usar essa sequência de palavras para *contar* os elementos de um conjunto.

Algo parecido será feito para apresentar os números naturais: primeiro, eles serão vistos como *números ordinais* e, em seguida, como *números cardinais*.

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

(2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

(3) Existe um único número natural, denotado por 1, que não é sucessor de nenhum outro.

(4) Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$ e, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Observação: $n + 1$ designará o sucessor do número natural n.

Adição, multiplicação e ordem em $\mathbb{N}$

Adição

- $m + 1$ é o sucessor de m;
- $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

Intuitivamente, $m + n$ é obtido a partir de m repetindo-se n vezes seguidas a operação de tomar o sucessor.

Multiplicação

- $m \cdot 1 = m$;
- $m \cdot (n + 1) = (m \cdot n) + m$.

Intuitivamente, $m \cdot n$ é a soma de n parcelas iguais a m.

Ordem

A expressão $m < n$ significa que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Exercício resolvido

Defina, por recorrência:

(1) $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n fatores)

(2) $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Solução:

(1) $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a^n \cdot a$

(2) $1! = 1$ e $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(1)$ é verdadeira e,
- para todo número natural n, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- A verificação de que $P(1)$ é verdadeira costuma ser chamada de *caso base* de uma prova por indução, enquanto a de que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é denominada *passo de indução*.
- No passo de indução, faça uma demonstração direta para obter $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Uma singela variação do PIF

Proposição

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n e seja n_0 um número natural. Se

- $P(n_0)$ *é verdadeira e,*
- *para todo número natural* $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

então $P(n)$ *é verdadeira para todo número natural* $n \geq n_0$.

Exemplo

Mostrar que $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$ para todo número natural n.

Seja $P(n): 1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

(1) $P(1)$ é verdadeira, já que $1^2=1$.

(2) Tome n um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que

$$P(n+1): 1+3+5+\ldots+2n-1+2(n+1)-1=(n+1)^2$$

é verdadeira.

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+2n-1+2(n+1)-1 &= n^2+2(n+1)-1 \text{ (HI)} \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo

Mostrar que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo número natural n.

Seja $P(n) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(1) $P(1)$ é verdadeira, já que $\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$.

(2) Tome n um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que

$$P(n+1) : 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

é verdadeira.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ (HI)} \\ &= \ldots \text{ (contas na lousa)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo

Mostrar que $2n+1 \leq 2^n$ para todo número natural $n \geq 3$.

Seja $P(n) : 2n+1 \leq 2^n$.

(1) $P(3)$ é verdadeira, já que $2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$.

(2) Tome $n \geq 3$ um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que

$$P(n+1) : 2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$$

é verdadeira.

$$\begin{aligned} 2(n+1)+1 &= 2n+1+2 \\ &\leq 2^n + 2 \text{ (HI)} \\ &\leq 2^n + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 3$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n$ para todo número natural $n \geq 5$.

Seja $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) $P(5)$ é verdadeira, já que $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Tome $n \geq 5$ um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que

$$P(n+1) : (n+1)^2 < 2^{n+1}$$

é verdadeira.

$$\begin{array}{rcl} (n+1)^2 & = & n^2 + 2n + 1 \\ & < & 2^n + 2n + 1 \text{ (HI)} \\ & \leq & 2^n + 2^n \text{ (exemplo anterior)} \\ & = & 2^{n+1} \end{array}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 5$.

Exemplo

Mostrar que o produto de quaisquer três números naturais consecutivos é divisível por 6.

Seja $P(n) : 6 \mid n(n+1)(n+2)$.

(1) $P(1)$ é verdadeira, já que $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ e $6 \mid 6$.

(2) Tome n um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que

$$P(n+1) : 6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$$

é verdadeira.

Note que $(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$. Assim, $6 \mid (n+1)(n+2)(n+3)$, pois

- $6 \mid n(n+1)(n+2)$ por (HI);
- $(n+1)(n+2)$ é par, o que implica $6 \mid 3(n+1)(n+2)$.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Seja $P(n)$: as partes de um conjunto com n elementos tem 2^n elementos.

(1) $P(1)$ é verdadeira, já que os únicos subconjuntos de um conjunto unitário são o vazio e o próprio conjunto.

(2) Tome n um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que P(n + 1): as partes de um conjunto com $n+1$ elementos tem 2^{n+1} elementos é verdadeira.

Considere X um conjunto arbitrário com $n+1$ elementos e fixe $x \in X$. Como $X - \{x\}$ tem n elementos, de HI segue que $\mathcal{P}(X \setminus \{x\})$ tem 2^n elementos. Portanto, $\mathcal{P}(X)$ tem $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ elementos.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo

Dados n ($n \geq 2$) objetos de pesos distintos, mostre que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo $2n - 3$ pesagens em uma balança de dois pratos.

Seja $P(n)$: é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado entre n objetos de pesos distintos fazendo $2n - 3$ pesagens.

(1) $P(2)$ é verdadeira, pois uma só pesagem é suficiente para saber, dentre dois objetos, qual é o mais leve e qual é o mais pesado.

(2) Tome $n \geq 2$ um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira.

    Supondo $P(n)$ verdadeira, efetuamos $2n - 3$ pesagens e encontramos, dentre n dos $n+1$ objetos dados, qual o mais leve, L, e qual o mais pesado, P. Tome o $(n+1)$-ésimo objeto e faça duas pesagens adicionais, comparando-o com L e com P. Daí conclui-se que $P(n+1)$ é verdadeira.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural $n \geq 2$.

Exemplo - Torre de Hanoi

Qual o número mínimo de movimentos necessários para transferir todos os discos para uma outra haste, respeitando a restrição de que um disco nunca seja colocado sobre um disco de diâmetro menor?

Exemplo - Torre de Hanoi

A ideia fundamental é reduzir um problema de n discos a um problema de $n-1$ discos. De fato, para transferir n discos da primeira para a terceira haste, será necessário em algum momento transferir o disco de maior diâmetro da primeira para a terceira haste. A única forma de fazer isso é removendo os $n-1$ discos superiores para a segunda haste. E, nessa transferência, tudo se passa como se apenas esses $n-1$ discos estivessem presentes. Após a passagem do disco de maior diâmetro para a terceira haste, resta apenas transferir os $n-1$ discos da segunda para a terceira haste.

Assim, se denotarmos por f_n o número mínimo de movimentos para transferir n discos de uma haste para outra, teremos $f_n = 2f_{n-1} + 1$ para $n > 1$ e $f_1 = 1$ (pois basta um movimento para transferir um único disco).

Daí, nota-se que $f_1 = 1$, $f_2 = 3$, $f_3 = 7$, $f_4 = 15$, $f_5 = 31$, etc.

Conjectura: $f_n = 2^n - 1$.

Exemplo - Torre de Hanoi

Confirmação da conjectura:

Seja $P(n)$: o número mínimo de movimentos para transferir n discos de uma haste para outra é $2^n - 1$.

(1) $P(1)$ é verdadeira, pois basta um movimento para transferir um único disco.

(2) Tome n um número natural arbitrário e suponha que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que $P(n+1)$: o número mínimo de movimentos para transferir $n+1$ discos de uma haste para outra é $2^{n+1} - 1$ é verdadeira.

Temos que $f_{n+1} = 2f_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Números naturais e contagem

Dizemos que dois conjuntos X e Y *têm a mesma quantidade de elementos* quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de X e os de Y.

Observação: Uma *correspondência biunívoca* entre dois conjuntos X e Y é uma função bijetora $f : X \to Y$, ou seja, é uma regra que associa a cada elemento de X um único elemento de Y, de modo que cada elemento de Y seja imagem de exatamente um elemento de X.

Quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ e X, diremos que X é um *conjunto finito com n elementos*.

Observação: $\emptyset$ é, por definição, um conjunto finito com 0 elementos.

Princípio da Casa dos Pombos

Princípio da Casa dos Pombos (PCP)

Se há mais pombos do que casas num pombal, então qualquer modo de alojar os pombos deverá colocar pelo menos dois deles numa mesma casa.

Vamos usar o PCP para mostrar que numa reunião com $n \geq 2$ pessoas, há pelo menos duas que têm o mesmo número de amigos naquele grupo.

Para isto, imaginemos n caixas numeradas de 0 a $n-1$. A cada uma das n pessoas, entregamos um cartão e pedimos para que ela o deposite na caixa correspondente ao número de amigos que tem naquele grupo. As caixas de número 0 e $n-1$ não podem ambas receber cartões, pois se houver alguém que não tem amigos ali, nenhum dos presentes pode ser amigo de todos, e vice-versa. Portanto, na realidade, temos n cartões para serem depositados em $n-1$ caixas. Pelo PCP, pelo menos uma das caixas vai receber dois ou mais cartões. Isto significa que pelo menos duas pessoas ali têm o mesmo número de amigos entre os presentes.

Conjuntos infinitos

Dizemos que um conjunto X é *infinito* se ele não é finito.

Exemplo: $\mathbb{N}$ é infinito.

Observações:

- É possível que dois conjuntos infinitos tenham a mesma quantidade de elementos, sendo um deles um subconjunto próprio do outro. Por exemplo, sendo P o conjunto dos números pares, temos a seguinte bijeção:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & P \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}$$

- Nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos. Por exemplo, considere X o conjunto de todas as sequências infinitas cujos termos são iguais a 0 ou a 1. Temos que $\mathbb{N}$ e X são infinitos, mas não têm a mesma quantidade de elementos.

Números reais

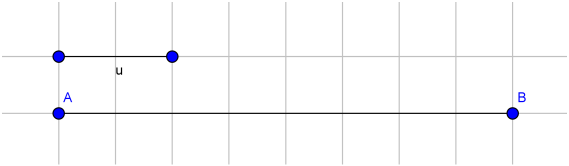
Até o presente momento, introduzimos os números naturais e vimos como eles são empregados nas operações de contagem.

Veremos agora de que modo o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduz à noção de número real.

Protótipo: Medir o comprimento de um segmento de reta.

Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

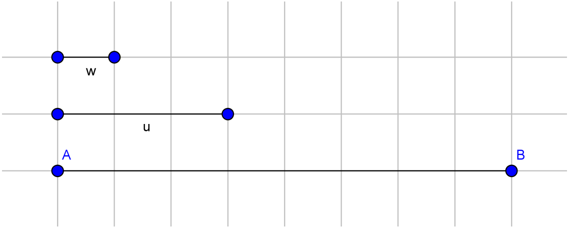
Seja AB um segmento de reta. Para medi-lo, é necessário fixar um segmento padrão u, denominado *segmento unitário*. Por definição, u mede 1.



Se u cabe exatas n vezes em AB, então a medida de AB será n.

Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

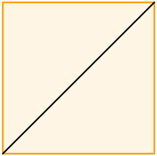
Pode ocorrer do segmento unitário u não caber um número exato de vezes em AB. Neste caso, procuraremos um segmento de reta w que caiba n vezes no segmento unitário u e m vezes no segmento AB.



Encontrado um tal w, diremos que AB e u são *comensuráveis*. A medida de w será a fração $1/n$ e a medida de AB será m/n.

Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Por muito tempo, pensou-se que quaisquer dois segmentos de reta eram comensuráveis. Contudo, um dos discípulos de Pitágoras observou que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos *incomensuráveis*.

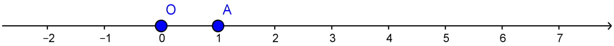


Conclusão: A existência de segmentos incomensuráveis significa que os números naturais mais as frações são insuficientes para medir todos os segmentos de reta. **Solução?** Ampliar o conceito de número, introduzindo os chamados *números irracionais*, de tal modo que, fixando uma unidade de comprimento arbitrária, qualquer segmento de reta possa ter uma medida numérica.

Reta real

Imaginemos uma reta, na qual foram fixados um ponto O, denominado *origem*, e um ponto A, diferente de O. Tomaremos o segmento OA como unidade de comprimento.

Seja X um ponto qualquer da reta OA. Se o segmento de reta OA couber um número exato n de vezes em OX, diremos que a abscissa de X é o número natural n ou o número negativo $-n$, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem. Se X coincidir com a origem, sua abscissa será 0.



O conjunto $\mathbb{Z}$, formado pelo 0 e pelas abscissas dos pontos X tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em OX, chama-se o *conjunto dos números inteiros*.

Reta real

Mais geralmente, se o ponto X é tal que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, de modo que algum segmento w caiba n vezes em OA e m vezes em OX, diremos que a abscissa do ponto X é m/n ou $-m/n$, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem.

O conjunto $\mathbb{Q}$, formado pelas abscissas dos pontos X tais que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, chama-se o *conjunto dos números racionais*.

Reta real

Se, agora, tomarmos um ponto X tal que os segmentos OX e OA sejam incomensuráveis, inventaremos um número x, que chamaremos de *número irracional*, e diremos que x é a abscissa do ponto X. O número x será considerado positivo ou negativo, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem.

O conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos são os números racionais e os números irracionais, chama-se o *conjunto dos números reais*.

Observação: Note que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Expressões decimais

Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

onde $a_0 \geq 0$ é um número inteiro e $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

- $13, 428000 \ldots$
- $0, 999999 \ldots$
- $2, 171717 \ldots$
- $0, 351727272 \ldots$
- $\pi = 3, 14159265 \ldots$

Expressões decimais

- Os truncamentos servem para estabelecer uma ordem no conjunto das expressões decimais. De fato, se α e β são expressões decimais, dizemos que $\alpha < \beta$ se $\alpha(n) < \beta(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $\alpha(n)$ e $\beta(n)$ denotam, respectivamente, o truncamento de α e de β na n-ésima casa depois da vírgula.
- Se $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots$ é uma sequência não decrescente e limitada de expressões decimais, então existe uma expressão decimal α da qual esta sequência se aproxima, no seguinte sentido: dado $\epsilon > 0$, é possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \alpha - \alpha_n < \epsilon$.
- Adicionamos e multiplicamos duas expressões decimais trabalhando com seus truncamentos. De fato, se α e β são expressões decimais, então $\alpha(n) + \beta(n)$ e $\alpha(n) \cdot \beta(n)$ são aproximações para os resultados que desejamos obter, tanto melhores quanto maior for n.

Os números reais introduzidos de maneira axiomática

O que realmente importa não é o que os números reais *são*, mas como eles se comportam.

Assumiremos a existência de um conjunto $\mathbb{R}$ no qual estão definidas duas operações $+$ e $\cdot$ (denominadas *adição* e *multiplicação*, respectivamente) além de uma relação de ordem $<$ satisfazendo as propriedades:

- (A1)-(A4), (M1)-(M4), (D);
- (O1)-(O4);
- (C).

Os elementos de $\mathbb{R}$ serão denominados *números reais*.

(A1)-(A4)

A adição associa cada par ordenado (x, y) de números reais a um único número real $x + y$, denominado a *soma* de x e y.

Propriedades:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(A2) $x + y = y + x$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$;

(A3) existe um (único) número real — o qual será denotado por 0 — satisfazendo $x + 0 = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;

(A4) para cada número real x existe um (único) número real — o qual será denotado por $-x$ e denominado o *oposto* de x — satisfazendo $x + (-x) = 0$.

Observação: De (A1) e (A2) decorre que a adição de três ou mais números reais pode ser feita em qualquer ordem.

(M1)-(M4)

A multiplicação associa cada par ordenado (x, y) de números reais a um único número real $x \cdot y$ (também denotado por xy), denominado o *produto* de x e y.

Propriedades:

(M1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(M2) $x \cdot y = y \cdot x$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$;

(M3) existe um (único) número real — o qual será denotado por 1 — satisfazendo $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$;

(M4) para cada número real $x \neq 0$ existe um (único) número real — o qual será denotado por x^{-1} e denominado o *inverso* de x — satisfazendo $x \cdot x^{-1} = 1$.

Observação: De (M1) e (M2) decorre que a multiplicação de três ou mais números reais pode ser feita em qualquer ordem.

(D)

Propriedade:

(D) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Observação: Estamos adotando a convenção de que a multiplicação tem prioridade em relação à adição e, por isso, escrevemos $x \cdot y + x \cdot z$ em vez de $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Algumas consequências de (A1)-(A4), (M1)-(M4) e (D)

Proposição

Sejam x, y e z números reais. Valem:

(1) *se* $x+y=x+z$ *então* $y=z$;

(2) *se* $xy=xz$ *e* $x\neq 0$ *então* $y=z$;

(3) $0x=0$;

(4) *se* $xy=0$ *então* $x=0$ *ou* $y=0$;

(5) $-(-x)=x$;

(6) *se* $x\neq 0$ *então* $x^{-1}\neq 0$ *e* $(x^{-1})^{-1}=x$;

(7) *se* $x\neq 0$ *e* $y\neq 0$ *então* $xy\neq 0$ *e* $(xy)^{-1}=x^{-1}y^{-1}$;

(8) $(-x)y=-(xy)$ *e* $(-x)(-y)=xy$.

Subtração e divisão

Dado um par ordenado (x, y) de números reais, definimos a *diferença* $x - y$ como o número real $x + (-y)$.

A operação que associa cada par ordenado (x, y) de números reais ao número real $x - y$ é chamada *subtração*.

Dado um par ordenado (x, y) de números reais com $y \neq 0$, definimos o *quociente* $\frac{x}{y}$ como o número real $x \cdot y^{-1}$.

A operação que associa cada par ordenado (x, y) de números reais com $y \neq 0$ ao número real $\frac{x}{y}$ é chamada *divisão*.

(O1)-(O4)

A relação de ordem $<$ nos permite comparar dois números reais distintos.

Propriedades:

(O1) dados dois números reais x e y quaisquer, vale uma, e somente uma, das seguintes condições: $x < y$, $x = y$, $y < x$;

(O2) se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(O3) quaisquer que sejam x, y e z números reais, se $x < y$ então $x + z < y + z$;

(O4) quaisquer que sejam x e y números reais e qualquer que seja z um número real com $z > 0$, se $x < y$ então $xz < yz$.

Outras notações e abreviações

Outras notações:

- $x \leq y$ significa $x < y \vee x = y$;
- $y > x$ significa $x < y$;
- $y \geq x$ signfica $x \leq y$.

Abreviações:

- $x < y < z$ abrevia $x < y \wedge y < z$;
- $x \leq y < z$ abrevia $x \leq y \wedge y < z$;
- $x < y \leq z$ abrevia $x < y \wedge y \leq z$;
- $x \leq y \leq z$ abrevia $x \leq y \wedge y \leq z$.

Algumas consequências de (O1)-(O4)

Proposição

Sejam x, y e z números reais. Valem:

(1) *se* $x < y$ *e* $z < 0$ *então* $xz > yz$;

(2) *se* $x \neq 0$ *então* $x^2 > 0$;

(3) *se* $x > 0$ *então* $-x < 0$;
se $x < 0$ *então* $-x > 0$;

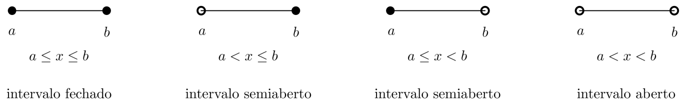
(4) *se* $0 < x < y$ *então* $0 < y^{-1} < x^{-1}$;
se $x < y < 0$ *então* $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

Intervalos

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Os conjuntos

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}
\end{aligned}$$

são denominados *intervalos* (limitados) com extremos a e b.



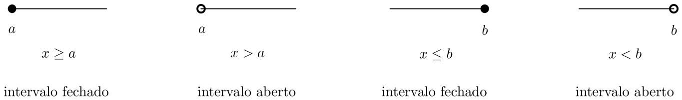
Observação: Quando $a = b$, os intervalos acima são ditos *degenerados*.

Intervalos

Sejam a e b números reais. Os conjuntos

$$
\begin{aligned}
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

também são denominados *intervalos* (ilimitados).



Observação: $+\infty$ e $-\infty$ são apenas símbolos, não números!

Exercício resolvido

Encontre o conjunto-solução de $\frac{2x^2+x}{x^2+1} < 2$.

Solução:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+x}{x^2+1} < 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x < 2(x^2+1)\\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x < 2x^2 + 2\\ &\Leftrightarrow \quad x < 2\end{aligned}$$

Logo, o conjunto-solução desta inequação é $(-\infty, 2)$.

Exercício resolvido

Encontre o conjunto-solução de $\frac{5x+3}{2x+1} > 2$.

Solução:

Caso 1: $2x+1>0$ (isto é, $x > -1/2$, ou seja, $x \in (-1/2, +\infty)$)

$$\begin{aligned} \tfrac{5x+3}{2x+1} > 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 5x+3 > 2(2x+1) \\ &\Leftrightarrow \quad 5x+3 > 4x+2 \\ &\Leftrightarrow \quad x > -1 \end{aligned}$$

Logo, todo $x \in (-1/2, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (-1/2, +\infty)$ é solução.

Caso 2: $2x+1<0$ (isto é, $x < -1/2$, ou seja, $x \in (-\infty, -1/2)$)

$$\begin{aligned} \tfrac{5x+3}{2x+1} > 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 5x+3 < 2(2x+1) \\ &\Leftrightarrow \quad 5x+3 < 4x+2 \\ &\Leftrightarrow \quad x < -1 \end{aligned}$$

Logo, todo $x \in (-\infty, -1/2) \cap (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$ é solução.

Assim, o conjunto-solução desta inequação é $(-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$

Valor absoluto

Seja x um número real. O *valor absoluto* (ou *módulo*) de x é dado por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

(a) $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$
(b) $|0| = 0$
(c) $|-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
(d) $|x-3| = x-3$, se $x \geq 3$ e $|x-3| = -(x-3) = 3-x$, se $x < 3$

Observação: $|x| = \max\{x, -x\}$

Valor absoluto

Observações:

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
- $|x| = |-x|$;
- Se x e y são, respectivamente, as abscissas dos pontos X e Y na reta real, então $|x - y|$ é igual à distância entre X e Y.

Propriedades do valor absoluto

Proposição

Sejam x e r números reais com $r > 0$. Valem:

(1) $|x| < r$ *se, e somente se,* $-r < x < r$;

(2) $|x| > r$ *se, e somente se,* $x < -r$ *ou* $x > r$.

Proposição

Sejam x e y números reais. Valem:

(1) $|xy| = |x||y|$;

(2) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exercício resolvido

Encontre o conjunto-solução de $|x-1|-|x-2| \geq -x$.

Solução:

Caso 1: $x \in [2,+\infty)$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-2| \geq -x \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)-(x-2) \geq -x \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq -1 \end{aligned}$$

Logo, todo $x \in [2,+\infty) \cap [-1,+\infty) = [2,+\infty)$ é solução.

Caso 2: $x \in [1,2)$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-2| \geq -x \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)-[-(x-2)] \geq -x \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

Logo, todo $x \in [1,2) \cap [1,+\infty) = [1,2)$ é solução.

Caso 3: $x \in (-\infty,1)$

$$\begin{aligned} |x-1|-|x-2| \geq -x \quad &\Leftrightarrow \quad -(x-1)-[-(x-2)] \geq -x \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

Logo, todo $x \in (-\infty,1) \cap [1,+\infty) = \emptyset$ é solução.

Assim, o conjunto-solução desta inequação é $\emptyset \cup [1,2) \cup [2,+\infty) = [1,+\infty)$.

Cotas

Seja X um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que $m \in X$ é *mínimo* (respectivamente, *máximo*) de X se $m \leq x$ (respectivamente, $m \geq x$) para todo $x \in X$.

Notação: $\min X$ (respectivamente, $\max X$)

Seja X um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é *cota inferior* (respectivamente, *cota superior*) de X se $c \leq x$ (respectivamente, $c \geq x$) para todo $x \in X$.

Exemplos

(a) $X = \{1, 2, 3\}$

- $\min X = 1$ e $\max X = 3$
- qualquer número real menor ou igual a 1 é cota inferior de X
- qualquer número real maior ou igual a 3 é cota superior de X

(b) $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$

- $\min X = 1$ e X não tem máximo
- qualquer número real menor ou igual a 1 é cota inferior de X
- qualquer número real maior ou igual a 2 é cota superior de X

(c) $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

- X não tem mínimo nem máximo
- qualquer número real menor ou igual a 0 é cota inferior de X
- X não tem cota superior

Ínfimo

Seja X um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o *ínfimo* de X se

(i) a é cota inferior de X e

(ii) nenhum número real maior que a é cota inferior de X.

Notação: $a = \inf X$

O ínfimo de X é a maior das cotas inferiores de X.

Supremo

Seja X um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que $b \in \mathbb{R}$ é o *supremo* de X se

(i) b é cota superior de X e

(ii) nenhum número real menor que b é cota superior de X.

Notação: $b = \sup X$

O supremo de X é a menor das cotas superiores de X.

Exemplos

(a) $X = \{1, 2, 3\}$

- $\min X = \inf X = 1$
- $\max X = \sup X = 3$

(b) $X = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$

- $\min X = \inf X = 1$
- $\sup X = 2$

(c) $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

- $\inf X = 0$
- X não tem supremo

Axioma da completude

Seja X um conjunto não vazio de números reais. Dizemos que X é *limitado inferiormente* (respectivamente, *limitado superiormente*) se X possui uma cota inferior (respectivamente, cota superior).

Axioma da completude:

(C) Todo subconjunto não vazio de números reais que é limitado superiormente tem supremo.

Equivalência:

(C') Todo subconjunto não vazio de números reais que é limitado inferiormente tem ínfimo.

Propriedade arquimediana

Material adicional

Propriedade arquimediana

Sejam $x > 0$ e y números reais. Existe um número natural n tal que $nx > y$.

Observações:

- se y é um número real, existe um número natural n tal que $n > y$;
- se $x > 0$ é um número real, existe um número natural n tal que $1/n < x$.

Densidade dos racionais e dos irracionais

Material adicional

Proposição

Sejam x e y números reais tais que $x < y$. Existe um número racional r tal que $x < r < y$.

Proposição

Sejam x e y números reais tais que $x < y$. Existe um número irracional s tal que $x < s < y$.

A existência da raiz quadrada

Seja a um número real. Dizemos que um número real $x \geq 0$ é *raiz quadrada* de a se $x^2 = a$.

Proposição

Todo número real $a \geq 0$ tem uma única raiz quadrada.

Notação: $\sqrt{a}$

Exemplos:

(a) $\sqrt{36} = 6$ (e não ± 6, embora $(-6)^2 = 6^2 = 36$);
(b) $\sqrt{(-5)^2} = 5$ (e não -5).

Observação: se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = |x|$.

A existência de raízes n-ésimas

Proposição

Seja $n \neq 0$ um número natural. Valem:

(1) *se $a \geq 0$ é um número real, então existe um único número real $x \geq 0$ tal que $x^n = a$;*

(2) *se $a < 0$ é um número real e n é ímpar, então existe um único número real x (necessariamente negativo) tal que $x^n = a$;*

Notação: $\sqrt[n]{a}$ (leia "raiz n-ésima de a").

Propriedades das raízes n-ésimas

Proposição

Sejam $a > 0$ um número real e m um número inteiro. Sejam também $n \neq 0$ e $p \neq 0$ números naturais. Valem:

(1) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$;

(2) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$;

(3) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

Proposição

Sejam $a, b > 0$ números reais e $n \neq 0$ um número natural. Valem:

(1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

(2) $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$.

Potenciação com expoente racional

Sejam $a > 0$ um número real, m um número inteiro e $n \neq 0$ um número natural. Definimos

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Exemplos:

(a) $3^{1/2} = \sqrt{3}$;
(b) $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$;
(c) $(2/3)^{-4/2} = 9/4$.

Observações:

- a potenciação com expoente racional está "bem definida";
- se x é um número racional, então $a^x > 0$.

Propriedades da potenciação com expoente racional

Proposição

Seja $a > 0$ um número real e sejam x e y números racionais. Valem:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^x / a^y = a^{x-y}$;

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Proposição

Sejam $a, b > 0$ números reais e x um número racional. Valem:

(1) $(ab)^x = a^x b^x$;

(2) $(a/b)^x = a^x / b^x$.