Funções de uma variável real a valores reais

Ana Carolina Boero

E-mail: ana.boero@ufabc.edu.br
Página: http://professor.ufabc.edu.br/~ana.boero

Sala 512-2 - Bloco A - Campus Santo André

Universidade Federal do ABC

Funções de uma variável real a valores reais

Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *de uma variável real a valores reais*.

Exemplos:

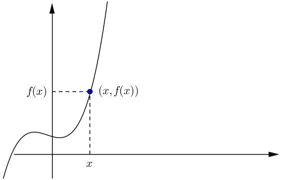
(a) Funções afins, quadráticas, polinomiais e racionais em geral.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.
(c) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.
(d) Funções exponenciais e logarítmicas.
(e) Funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

Representação gráfica

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O *gráfico* de f é o conjunto $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \text{ e } y = f(x)\}$.

Munindo o plano de um sistema de coordenadas cartesianas, podemos representar o gráfico de f como o lugar geométrico dos pontos associados aos pares $(x, f(x))$, com $x \in A$.



Observação: O domínio de f é representado no *eixo das abscissas* e sua imagem, no *eixo das ordenadas*.

Funções afins

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

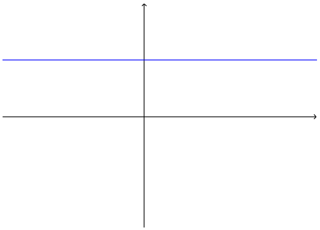
Observação: A representação gráfica de uma função afim é uma reta.

Exemplos

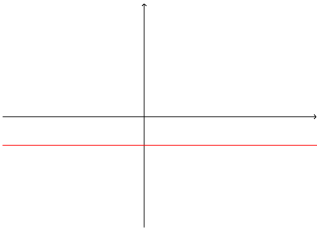
(a) Seja b um número real fixado. O gráfico da *função constante*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & b \end{array}$$

possui a seguinte representação no plano cartesiano:



Representação para $b > 0$.



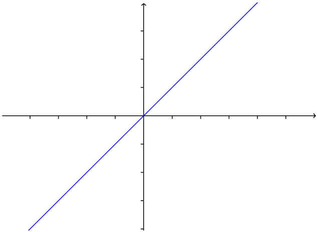
Representação para $b < 0$.

Exemplos

(b) O gráfico da *função identidade*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

possui a seguinte representação no plano cartesiano:

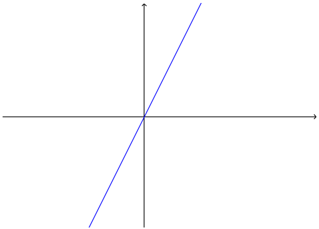


Exemplos

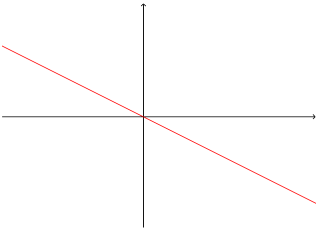
(c) Seja $a \neq 0$ um número real. O gráfico da *função linear*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

possui a seguinte representação no plano cartesiano:



Representação para $a > 0$.



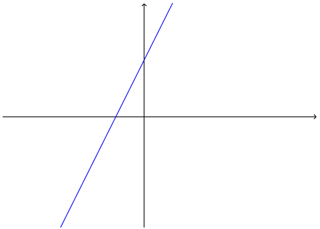
Representação para $a < 0$.

Exemplos

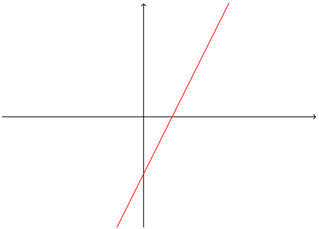
(d) Sejam $a \neq 0$ e b números reais. O gráfico da *função afim*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

possui a seguinte representação no plano cartesiano:



Representação para $a > 0$ e $b > 0$.



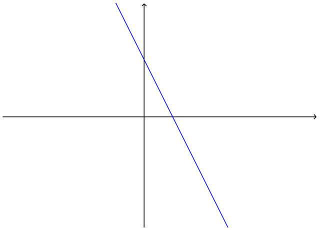
Representação para $a > 0$ e $b < 0$.

Exemplos

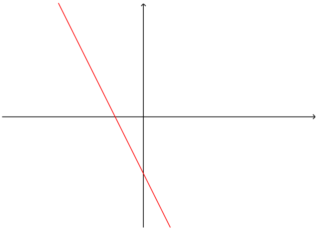
(d) Sejam $a \neq 0$ e b números reais. O gráfico da *função afim*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$$

possui a seguinte representação no plano cartesiano:



Representação para $a < 0$ e $b > 0$.



Representação para $a < 0$ e $b < 0$.

Monotonicidade

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

- f é *crescente* se $\forall x_1, x_2 \in A \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$;
- f é *decrescente* se $\forall x_1, x_2 \in A \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$;
- f é *monótona não-decrescente* se $\forall x_1, x_2 \in A \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$;
- f é *monótona não-crescente* se $\forall x_1, x_2 \in A \ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Observações: Uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é crescente quando $a > 0$ e descrescente quando $a < 0$ (e é, portanto, injetora nesses casos).

Funções quadráticas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A *forma canônica do trinômio do segundo grau* $ax^2 + bx + c$ obtida abaixo nos permite deduzir diversas propriedades interessantes a respeito das funções quadráticas:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]
\end{aligned}
$$

Observações

(1) Seja $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $\Delta < 0$: a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raiz real.
- $\Delta = 0$: a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem uma única raiz real.
- $\Delta > 0$: a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{4a}$$

Observações

(2) Note que $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \geq \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- $a > 0$: o valor mínimo de f é $-\frac{\Delta}{4a}$ e f é ilimitada superiormente.
- $a < 0$: o valor máximo de f é $-\frac{\Delta}{4a}$ e f é ilimitada inferiormente.

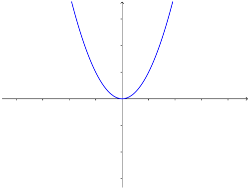
(3) Temos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

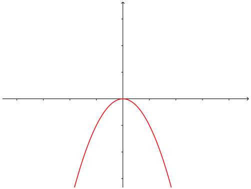
Logo, a reta vertical $y = -\frac{b}{2a}$ é um eixo de simetria do gráfico de f.

Observações

(4) A representação gráfica de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = ax^2$ é uma parábola (de foco $F = (0, 1/4a)$ e diretriz $d : y = -1/4a$).



Representação para $a > 0$.



Representação para $a < 0$.

Como a representação gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é obtida da de g fazendo uma translação horizontal seguida de uma vertical, temos que a de f também é uma parábola.

Soma e diferença de funções

Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, onde $A, B \subset \mathbb{R}$.

A função $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo $x \in A \cap B$ é denominada a *soma* de f e g.

A função $f - g : A \cap B \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

para todo $x \in A \cap B$ é denominada a *diferença* de f e g.

Produto e quociente de funções

A função $fg : A \cap B \to \mathbb{R}$ definida por

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

para todo $x \in A \cap B$ é denominada o *produto* de f e g.

Considere $C = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

A função $\frac{f}{g} : C \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo $x \in C$ é denominada o *quociente* de f e g.

Funções polinomiais

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *polinomial* quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observações:

- Se $a_n \neq 0$, dizemos que f tem grau n.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ é raiz de f (isto é, $f(\alpha) = 0$) se, e somente se, f é divisível por $x - \alpha$ (ou seja, $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$ para alguma função polinomial g).
- Uma função polinomial de grau n tem, no máximo, n raízes.
- Soma, diferença e produto de funções polinomiais é polinomial.
- Representações gráficas de funções polinomiais não são padronizadas.

Funções racionais

O quociente de duas funções polinomiais é chamado de *função racional*.

Observações:

- Toda função polinomial é racional.
- Soma, diferença, produto e quociente de funções racionais é racional.
- Representações gráficas de funções racionais não são padronizadas.

Potenciação com expoente natural

Recordamos que se $a > 0$ é um número real e n é um número natural, então

$$a^n = n \cdot n \cdot \ldots n \ (n \text{ fatores})$$

e que valem:

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

(2) $a > 1$: $1 < a < a^2 < \ldots < a^n < \ldots$

$0 < a < 1$: $1 > a > a^2 > \ldots > a^n > \ldots$

Potenciação com expoente inteiro

Sejam $a > 0$ um número real e n um número natural. Definimos

$$a^{-n} = 1/a^n.$$

Proposição

Seja $a > 0$ um número real e sejam m e n números inteiros. Valem:

(1) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$a^{mn} = (a^m)^n$

(2) $a^0 = 1$

(3) $a > 1$: $m < n \Rightarrow a^m < a^n$

$0 < a < 1$: $m < n \Rightarrow a^m > a^n$

Potenciação com expoente racional

Sejam $a > 0$ um número real, m um número inteiro e n um número natural. Definimos

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Observações:

- A potenciação com expoente racional está "bem definida".
- Se x é um número racional, então $a^x > 0$.

Proposição

Seja $a > 0$ um número real e sejam r e s números racionais. Valem:

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

$(a^r)^s = a^{rs}$

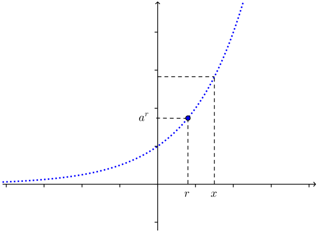
(2) $a > 1$: $r < s \Rightarrow a^r < a^s$

$0 < a < 1$: $r < s \Rightarrow a^r > a^s$

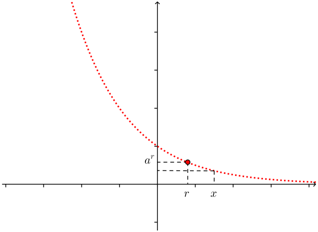
Potenciação com expoente real

Sejam $a > 0$ um número real e x um número real.

- Se $a \geq 1$, definimos $a^x = \sup\{a^r : r \text{ é racional e } r \leq x\}$.
- Se $a < 1$, definimos $a^x = \inf\{a^r : r \text{ é racional e } r \leq x\}$.



Representação para $a > 1$.



Representação para $0 < a < 1$.

Potenciação com expoente real

Observações:

- Se x é um número real, então $a^x > 0$.
- Sendo x_n o "truncamento" de x até a n-ésima casa decimal, temos:

$$a^x = \begin{cases} \sup\{a^{x_n} : n \in \mathbb{N}\} & \text{se} \quad a \geq 1 \\ \inf\{a^{x_n} : n \in \mathbb{N}\} & \text{se} \quad a < 1 \end{cases}$$

Exemplos: $x = \sqrt{2}$ e $x_0 = 1$, $x_1 = 1,4$, $x_2 = 1,41$, etc.

(a) $3^{\sqrt{2}} = \sup\{3^1, 3^{1,4}, 3^{1,41}, \ldots\}$
(b) $(1/3)^{\sqrt{2}} = \inf\{(1/3)^1, (1/3)^{1,4}, (1/3)^{1,41}, \ldots\}$

Propriedades da potenciação com expoente real

Proposição

Seja $a > 0$ *um número real e sejam* x *e* y *números reais. Valem:*

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^x / a^y = a^{x-y}$;

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Proposição

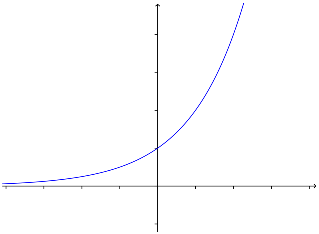
Sejam $a, b > 0$ *números reais e* x *um número real. Valem:*

(1) $(ab)^x = a^x b^x$;

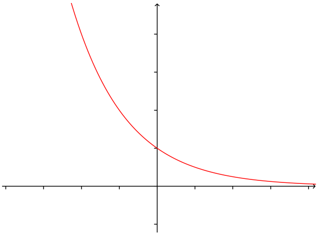
(2) $(a/b)^x = a^x / b^x$.

Função exponencial

Seja $a > 0$ um número real tal que $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ dada por $f(x) = a^x$ recebe o nome de *função exponencial de base a*.



Representação para $a > 1$.



Representação para $0 < a < 1$.

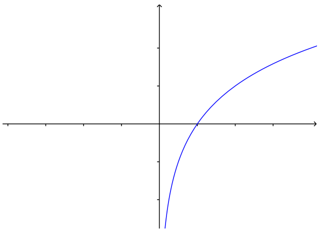
Função exponencial

Observações:

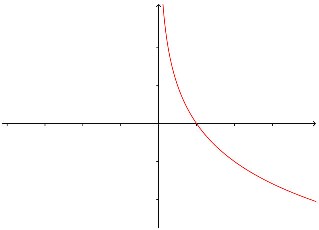
- $a^0 = 1$.
- Se $a > 1$, então f é crescente (e, portanto, injetora).
- Se $a < 1$, então f é decrescente (e, portanto, injetora).
- f é sobrejetora.

Função logarítmica

Seja $a > 0$ um número real tal que $a \neq 1$. A inversa $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ da função exponencial de base a é denominada a *função logarítmica de base a*.



Representação para $a > 1$.



Representação para $0 < a < 1$.

Função logarítmica

$\log_a(y) = x$ é equivalente a $a^x = y$.

Observações:

- $\log_a(1) = 0$.
- Se $a > 1$, então $\log_a$ é crescente.
- Se $a < 1$, então $\log_a$ é decrescente.
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
  $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$
  $\log_a(x^z) = z \cdot \log_a(x)$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, onde $a, b > 0$ são tais que $a, b \neq 1$.

Propriedades dos logaritmos

Proposição

Sejam $a, x, y > 0$ tais que $a \neq 1$ e seja z um número real. Valem:

(1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

(2) $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

(3) $\log_a(x^z) = z \cdot \log_a(x)$.

Proposição

Sejam $a, b, x > 0$ tais que $a, b \neq 1$. Vale:

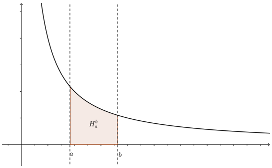
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Caracterização das funções logarítmicas

Caracterização das funções logarítmicas

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função crescente (ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y > 0$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a(x)$, para todo $x > 0$.

Dados $a, b > 0$, seja H_a^b a região do plano limitada pelas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pelo ramo positivo da hipérbole equilátera $y = 1/x$.



Logaritmos naturais

Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \text{área}(H_1^x) & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -\text{área}(H_1^x) & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

Temos que:

(1) f é crescente.

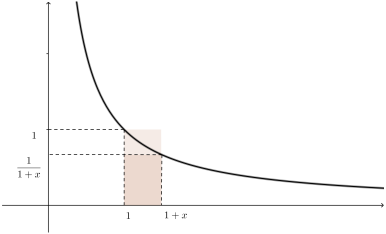
(2) $f(xy) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Portanto, existe e um número real positivo tal que $f(x) = \log_e(x)$.

Observações:

- Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_e(x)$ e chamaremos o número $\ln x$ de *logaritmo natural* de x.
- e é tal que a área da região H_1^e é igual a 1.

O número e



Comparando as áreas, obtemos $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, o que equivale a

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Fazendo $x = \frac{1}{n}$, chegamos a $\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$ e, portanto,

$$e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e. \text{ Logo, } e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

O círculo trigonométrico

A circunferência de raio 1 centrada no ponto de abscissa 0 e ordenada 0 é denominada *círculo trigonométrico*. O ponto de abscissa 1 e ordenada 0 é chamado a *origem* do círculo trigonométrico.

Dado um número real x, seja P_x o seu correspondente no círculo:

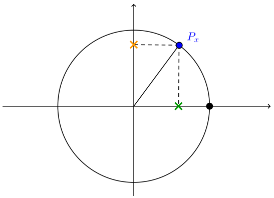
- se $x = 0$, P_x coincide com a origem do círculo;
- se $x > 0$, realizamos a partir da origem do círculo um percurso de comprimento x no sentido anti-horário e marcamos P_x como o ponto final do percurso;
- se $x < 0$, realizamos a partir da origem do círculo um percurso de comprimento $|x|$ no sentido horário e marcamos P_x como o ponto final do percurso.

Funções cosseno e seno

Seja x um número real.

Definimos o *cosseno* de x como a abscissa de P_x e o denotamos por $\cos x$.

Definimos o *seno* de x como a ordenada de P_x e o denotamos por $\operatorname{sen} x$.



Representação do cosseno e seno.

As funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $\cos(x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen} x$ são denominadas *cosseno* e *seno*, respectivamente.

Propriedades do cosseno e seno

Proposição

Sejam x e y números reais. Valem:

(1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;

(2) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$;

(3) $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$.

Proposição

Se $0 < x < \pi/2$, *então* $0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}$.

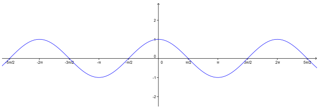
Propriedades das funções cosseno e seno

Proposição

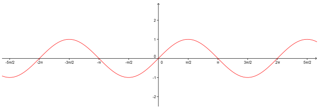
A função cosseno é par e a função seno é ímpar.

Proposição

As funções cosseno e seno são periódicas, de período 2π.



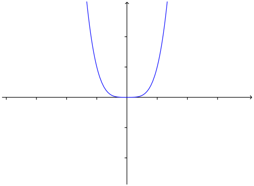
Representação gráfica da função cosseno.



Representação gráfica da função seno.

Função par

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Exemplos:

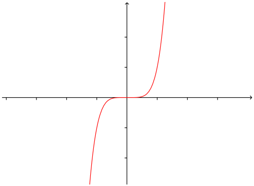
(a) $f(x) = x^n$, com n par

(b) $f(x) = |x|$

Significado geométrico: o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

Função ímpar

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Exemplos:

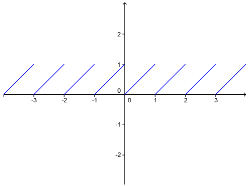
(a) $f(x) = x^n$, com n ímpar

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$

Significado geométrico: o gráfico de f é simétrico em relação à origem.

Periodicidade

Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *periódica* se existe $\tau > 0$ tal que $f(x + \tau) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Observação: O menor τ (se existir) é denominado o *período* de f.

Exemplos:

(a) Toda função constante é periódica (mas não possui período).

(b) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, tem período 1.

Funções tangente, cotangente, secante e cossecante

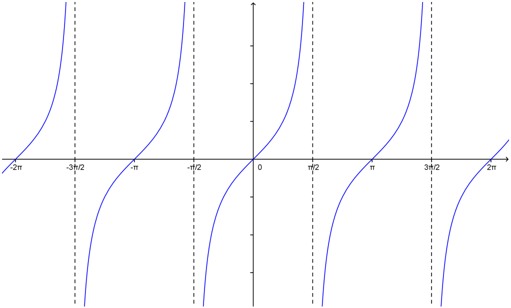
Sejam

- $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ e
- $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

As funções *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante* são dadas por:

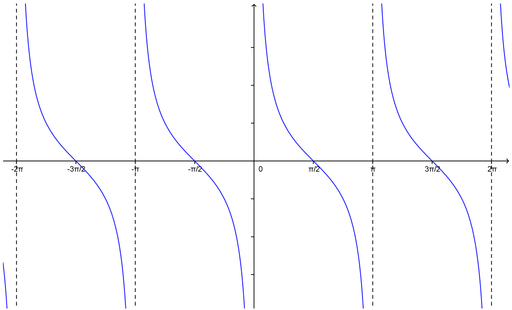
- $\text{tg} : A \to \mathbb{R}$, $\text{tg}(x) = \operatorname{sen} x / \cos x$;
- $\text{cotg} : B \to \mathbb{R}$, $\text{cotg}(x) = \cos x / \operatorname{sen} x$;
- $\sec : A \to \mathbb{R}$, $\sec(x) = 1/ \cos x$;
- $\text{cossec} : B \to \mathbb{R}$, $\text{cossec}(x) = 1/ \operatorname{sen} x$.

Representação gráfica da função tangente



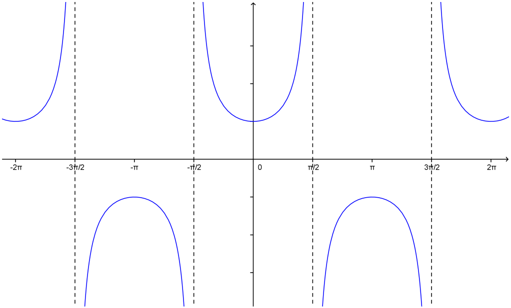
Representação gráfica da função tangente.

Representação gráfica da função cotangente



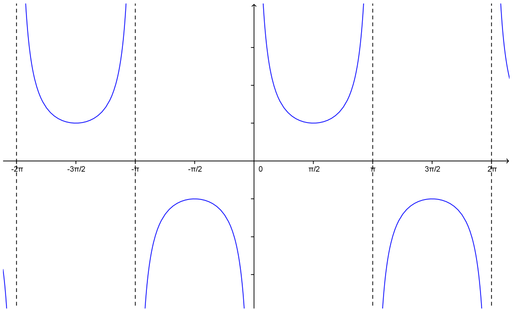
Representação gráfica da função cotangente.

Representação gráfica da função secante



Representação gráfica da função secante.

Representação gráfica da função cossecante



Representação gráfica da função cossecante.

Funções trigonométricas inversas

As funções

- $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ dada por $f(x) = \cos x$
- $g : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$
- $h :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \operatorname{tg} x$

são bijetoras.

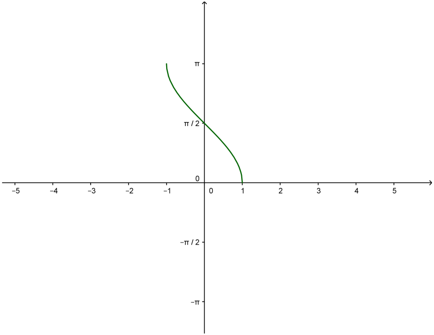
A inversa da função f é chamada *arco-cosseno* e é denotada por arccos.

A inversa da função g é chamada *arco-seno* e é denotada por arcsen.

A inversa da função h é chamada *arco-tangente* e é denotada por arctg.

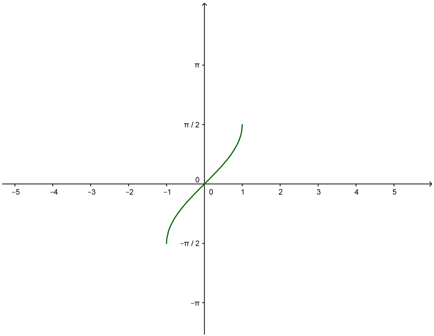
Analogamente para *arco-secante*, *arco-cossecante* e *arco-cotangente*...

Representação gráfica da função arco-cosseno



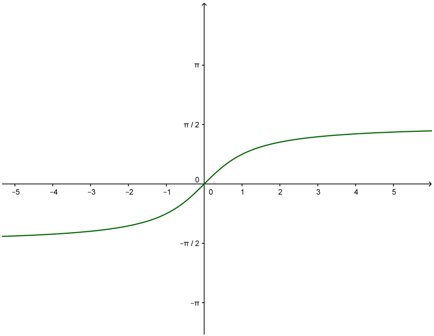
Representação gráfica da função arco-cosseno.

Representação gráfica da função arco-seno



Representação gráfica da função arco-seno.

Representação gráfica da função arco-tangente



Representação gráfica da função arco-tangente.

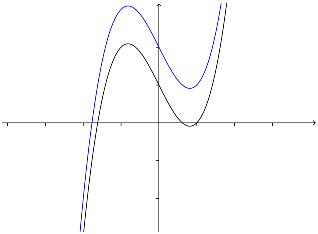
Translações verticais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 0$.

A representação gráfica de $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x) + c$$

é obtida transladando a de f para cima, de c.



Representação dos gráficos de f e g.

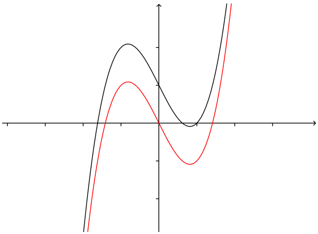
Translações verticais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 0$.

A representação gráfica de $h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x) - c$$

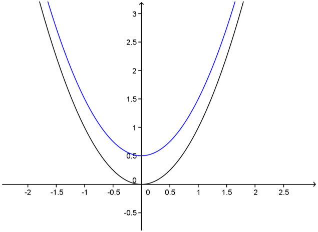
é obtida transladando a de f para baixo, de c.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

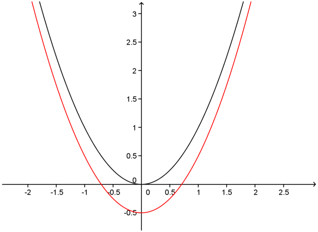
(a) $g(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ é da forma $g(x) = f(x) + c$ onde $f(x) = x^2$ e $c = \frac{1}{2}$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) $h(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ é da forma $h(x) = f(x) - c$ onde $f(x) = x^2$ e $c = \frac{1}{2}$.



Representação dos gráficos de f e h.

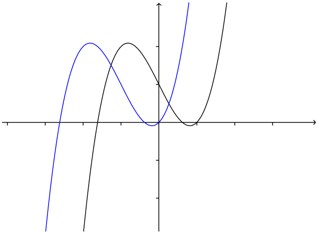
Translações horizontais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 0$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : x + c \in A\}$.

A representação gráfica de $g : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(x + c)$$

é obtida transladando a de f para a esquerda, de c.



Representação dos gráficos de f e g.

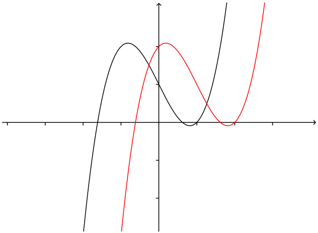
Translações horizontais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 0$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : x - c \in A\}$.

A representação gráfica de $h : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x - c)$$

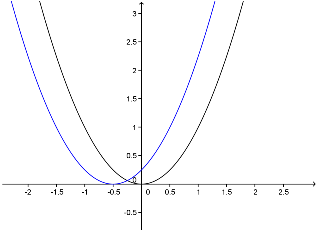
é obtida transladando a de f para a direita, de c.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

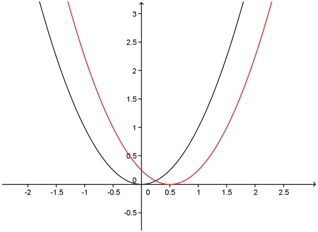
(a) $g(x) = (x + \frac{1}{2})^2$ é da forma $g(x) = f(x + c)$ onde $f(x) = x^2$ e $c = \frac{1}{2}$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) $h(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ é da forma $h(x) = f(x - c)$ onde $f(x) = x^2$ e $c = \frac{1}{2}$.



Representação dos gráficos de f e h.

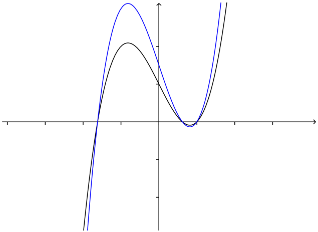
Homotetias verticais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 1$.

A representação gráfica de $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

é obtida esticando a de f na vertical (ponto a ponto) por um fator c.



Representação dos gráficos de f e g.

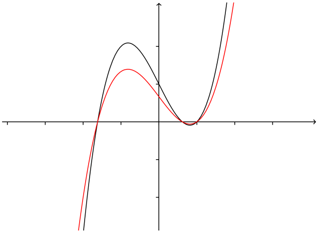
Homotetias verticais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 1$.

A representação gráfica de $h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x)/c$$

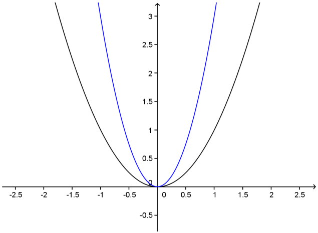
é obtida contraindo a de f na vertical (ponto a ponto) por um fator c.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

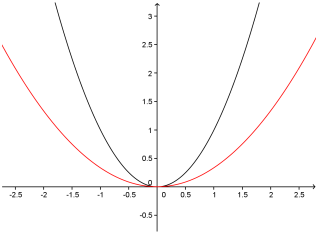
(a) $g(x) = 3x^2$ é da forma $g(x) = c \cdot f(x)$ onde $f(x) = x^2$ e $c = 3$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) $h(x) = x^2/3$ é da forma $h(x) = f(x)/c$ onde $f(x) = x^2$ e $c = 3$.



Representação dos gráficos de f e h.

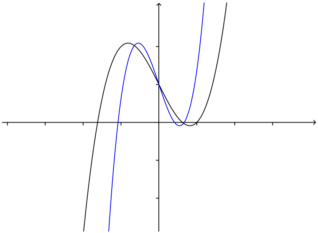
Homotetias horizontais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 1$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : cx \in A\}$.

A representação gráfica de $g : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = f(cx)$$

é obtida contraindo a de f na horizontal (ponto a ponto) por um fator c.



Representação dos gráficos de f e g.

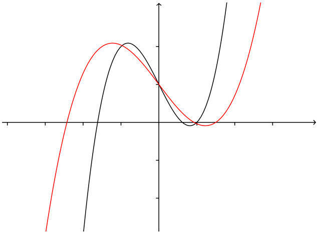
Homotetias horizontais

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c > 1$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : x/c \in A\}$.

A representação gráfica de $h : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(x/c)$$

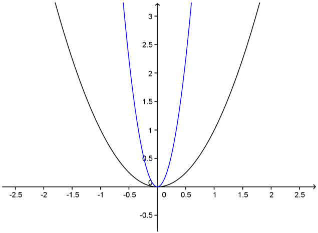
é obtida esticando a de f na horizontal (ponto a ponto) por um fator c.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

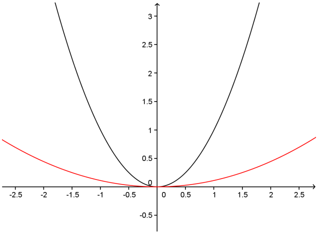
(a) $g(x) = (3x)^2$ é da forma $g(x) = f(cx)$ onde $f(x) = x^2$ e $c = 3$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) $h(x) = (x/3)^2$ é da forma $h(x) = f(x/c)$ onde $f(x) = x^2$ e $c = 3$.



Representação dos gráficos de f e h.

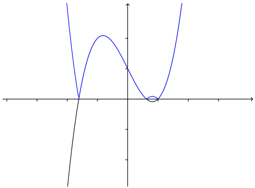
Compostas envolvendo a função módulo

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A representação gráfica de $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = |f(x)|$$

é obtida da de f mantendo os pontos do semiplano superior e refletindo os do semiplano inferior em relação ao eixo das abscissas.



Representação dos gráficos de f e g.

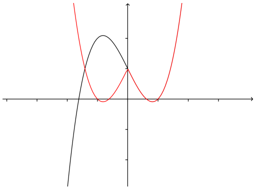
Compostas envolvendo a função módulo

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in A\}$.

A representação gráfica de $h : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(|x|)$$

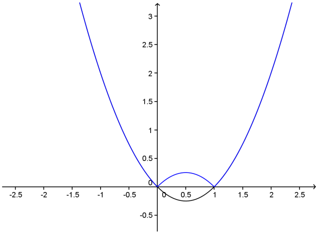
é obtida da de f mantendo os pontos do semiplano da direita e substituindo os do semiplano da esquerda de modo a torná-la simétrica em relação ao eixo das ordenadas.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

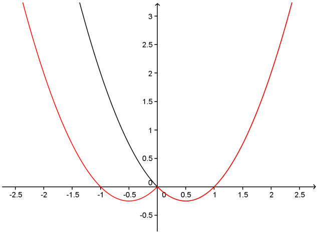
(a) $g(x) = |x(x-1)|$ é da forma $g(x) = |f(x)|$ onde $f(x) = x(x-1)$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) $h(x) = |x|(|x| - 1)$ é da forma $h(x) = f(|x|)$ onde $f(x) = x(x-1)$.



Representação dos gráficos de f e h.

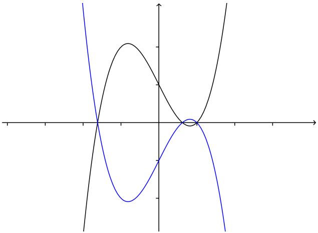
Reflexões

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

A representação gráfica de $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = -f(x)$$

é obtida refletindo a de f em relação ao eixo das abscissas.



Representação dos gráficos de f e g.

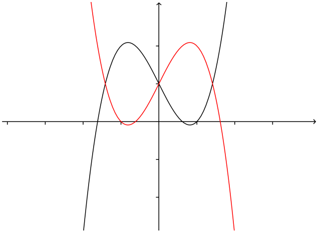
Reflexões

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $\tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$.

A representação gráfica de $h : \tilde{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = f(-x)$$

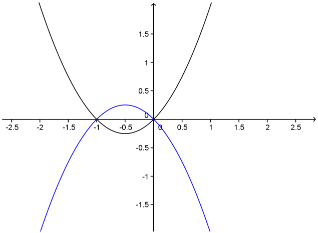
é obtida refletindo a de f em relação ao eixo das ordenadas.



Representação dos gráficos de f e h.

Exemplos

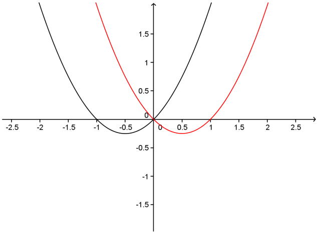
(a) Se $f(x) = x^2 + x$, então $g(x) = -f(x)$ é dado por $g(x) = -x^2 - x$.



Representação dos gráficos de f e g.

Exemplos

(b) Se $f(x) = x^2 + x$, então $h(x) = f(-x)$ é dado por $h(x) = x^2 - x$.

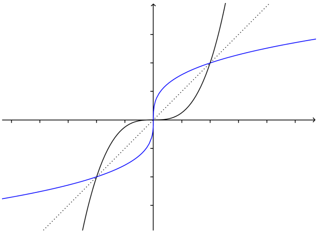


Representação dos gráficos de f e h.

Gráfico da inversa

Seja f uma função de uma variável real a valores reais bijetora.

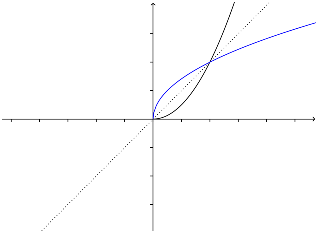
A representação gráfica de f^{-1} é obtida refletindo a de f em torno diagonal principal.



Representação dos gráficos de f e f^{-1}.

Exemplos

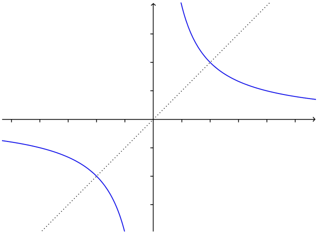
(a) Se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$, então $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.



Representação dos gráficos de f e f^{-1}.

Exemplos

(b) Se $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1/x$, então $f^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(y) = 1/y$.



Representação dos gráficos de f e f^{-1}.