BCM0506 – Comunicação e Redes

Aula 8

Sistemas Dinâmicos Lineares

Prof. Dr. Aritanan Gruber

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Quadrimestre Suplementar 2020

Sistemas Dinâmicos

Consideramos sistemas com *tempo discreto*:

- Tempo indexado por $k \geq 0$ inteiro;
- Estado do sistema denotado por $\boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^n$.

A sequência

$$\boldsymbol{x}(0),\ \boldsymbol{x}(1),\ \boldsymbol{x}(2),\ \ldots,\ \boldsymbol{x}(k),\ \ldots$$

descreve toda a evolução do sistema.

Exemplos: Para $j \in [n]$, no instante k, $\big(\boldsymbol{x}(k)\big)_j$ pode ser

- o número de amigos em uma rede social do usuário j, ou
- a quantidade de infectados na zona de quarentena j, ou
- o número de pacotes de dados trafegando pelo canal j, ou
- a probabilidade (em equilíbrio) do elemento j ser escolhido representante de um grupo, ou
- o valor de uma ação da companhia j sendo negociada na bolsa.

Sistemas Dinâmicos

$\boldsymbol{x}(0)$ fornece (descreve) as *condições iniciais*.

Dinâmica do sistema: para qualquer $k \geq 0$,

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f(\boldsymbol{x}(k)), \tag{1}$$

para alguma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Questões de interesse:

- Existe um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}^* = f(\boldsymbol{x}^*)$? (ponto fixo)
- Em caso afirmativo, o quão rápido $\boldsymbol{x}(k) \longrightarrow \boldsymbol{x}^*$?

Sistemas Dinâmicos Lineares

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ for *linear*, isto é,

- $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, e
- $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

temos que f pode ser representada por uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $f(\boldsymbol{x})$ equivale ao mapeamento $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Assim, a *dinâmica de sistema linear* tem a forma

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k), \tag{2}$$

para todo $k \geq 0$ inteiro.

Objetivos:

- Determinar condições para existência de equilíbrio;
- Caracterizar equilíbrios existentes;
- Analisar taxa de convergência para o equilíbrio.

Sistemas Dinâmicos Lineares

Para $k \geq 1$ grande o suficiente, temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-2) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(k-2) \\
&\ \vdots \\
&= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0).
\end{aligned}$$

Se $n = 1$, tomando $\boldsymbol{A} = a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, temos que

$$\boldsymbol{x}(k) = a^k\boldsymbol{x}(0) \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq a < 1, \\ \boldsymbol{x}(0) & \text{se } a = 1, \\ \infty & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

E se $n > 1$?

Sistemas Dinâmicos Lineares

Se $n > 1$ e $\boldsymbol{A}$ for *diagonal*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

temos que

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}$$

Boas chances de analisar o comportamento de $\boldsymbol{x}(k)$.

No entanto, poucas matrizes são diagonais!

Sistemas Dinâmicos Lineares

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é *diagonalizável* se existem matrizes

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

com $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonal e $\boldsymbol{V}$ não singular (invertível) tais que

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Lambda} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}.$$

Pergunta: Mas quem são λ_i e $\boldsymbol{v}_i$?

Sistemas Dinâmicos Lineares

Observe que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i.$$

Logo,

- λ_i é um *autovalor* de $\boldsymbol{A}$, uma raiz do *polinômio característico*:

  $$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0.$$

  O polinômio característico de $\boldsymbol{A}$ tem n raízes em $\mathbb{C}$; se $\boldsymbol{A}$ é simétrica, todas as raízes são reais.
- $\boldsymbol{v}_i \neq \boldsymbol{0}$ é um *autovetor* de $\boldsymbol{A}$, associado ao autovalor λ_i.

Considere os autovalores de $\boldsymbol{A}$ nomeados em ordem crescente de magnitude:

$$0 \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|.$$

Sistemas Dinâmicos Lineares

Se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}$, então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k) &= (\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})^k\, \boldsymbol{x}(0) \\
&= \underbrace{(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})\cdots(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})}_{k \text{ vezes}}\, \boldsymbol{x}(0) \\
&= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{V}^{-1}\, \boldsymbol{x}(0) \\
&= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

em que $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(0)) := \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(0) \in \mathbb{R}^n$.

Mais ainda,

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k \boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n.$$

Sistemas Dinâmicos Lineares

Temos então que

$$\boldsymbol{x}(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \lambda_1^k \left(c_1 \boldsymbol{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{\lambda_i^k}{\lambda_1^k} \boldsymbol{v}_i \right)$$

o que resulta em

$$\|\boldsymbol{x}(k)\| \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 0 & \text{se } |\lambda_1| < 1, \\ |c_1| \cdot \|\boldsymbol{v}_1\| & \text{se } |\lambda_1| = 1, \\ \infty & \text{se } |\lambda_1| > 1. \end{cases}$$

Mais ainda, para $|\lambda_1| > 1$,

$$\|\lambda_1^k \boldsymbol{x}(k) - c_1 \boldsymbol{v}_1\| \longrightarrow 0$$

Sistemas Dinâmicos Lineares

Pergunta: Quando uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonalizável?

Uma condição suficiente:

Teorema

Se todos os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são distintos, então os autovetores de $\boldsymbol{A}$ são linearmente independentes.

Prova. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ os autovalores e autovetores de $\boldsymbol{A}$, com $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, e suponha que os autovetores são linearmente dependentes.

Isto é, existem $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que

$$\mu_1\boldsymbol{v}_1 + \mu_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}. \qquad (\bullet)$$

Em particular, seja j um índice tal que $\mu_j \neq 0$.

Multiplicando $(\bullet)$ por $\boldsymbol{A}$, temos que

$$\mu_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0},$$

e assim, que

$$\mu_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \mu_2 \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \mu_n \lambda_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Multiplicando $(\bullet)$ por λ_j e subtraindo acima, vem que

$$\mu_1(\lambda_j - \lambda_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \mu_i(\lambda_j - \lambda_i)\boldsymbol{v}_i + \cdots + \mu_n(\lambda_j - \lambda_n)\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}.$$

Como $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ para $i \in [n] \setminus \{j\}$ e $\boldsymbol{v}_n \neq \mathbf{0}$, claramente $\mu_i = 0$ para todo i; contradizendo a hipótese de que os autovalores são linearmente dependentes. $\square$

Sistemas Dinâmicos Lineares

Com $\boldsymbol{\Lambda}$ sendo a matriz diagonal dos autovalores de $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{V}$ sendo a matriz cujas colunas são os autovetores de $\boldsymbol{A}$, temos que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda} &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{V}$ é invertível já que suas colunas são linearmente independentes. Logo, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}$ é a diagonalização de $\boldsymbol{A}$.

Sistemas Dinâmicos Afins

Considere agora um sistema dinâmico em que a função de evolução do sistema é afim:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b} \qquad \text{para todo} \qquad k \geq 0,$$

em que $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor.

Para $k \geq 1$ grande o suficiente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{b} \\
&= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-2) + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(k-2) + (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} \\
&\vdots \\
&= \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0) + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^j\right)\boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Sistemas Dinâmicos Afins

Para $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k) &= (\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})^k\boldsymbol{x}(0) + \left(\sum_{j=0}^{k-1}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^{-1})^j\right)\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \left(\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^j\boldsymbol{V}^{-1}\right)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

Definindo $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{x}(0)$ e $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{c} + \left(\sum_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^j\right)\boldsymbol{d} = \sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i^k c_i\boldsymbol{v}_i + \left(\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_i^j\right)d_i\boldsymbol{v}_i\right).$$

Sistemas Dinâmicos Afins

Sendo $|\lambda_1| \geq |\lambda_i|$, o maior autovalor em módulo de $\boldsymbol{A}$, temos que

$$\boldsymbol{x}(k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{se } |\lambda_1| \geq 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{1-\lambda_i}\,\boldsymbol{v}_i & \text{se } |\lambda_1| < 1. \end{cases}$$

Podemos reescrever a soma para o caso $|\lambda_1| < 1$ como:

$$\boldsymbol{x}(k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Sistemas Dinâmicos Afins

Um ponto de equilíbrio $\boldsymbol{x}^*$ de um sistema dinâmico afim deve satisfazer

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b}.$$

Temos que $\boldsymbol{x}^*$ existe e é igual a

$$\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$$

quando $\boldsymbol{A}$ não tem um autovalor igual a 1.

Mais ainda: caso $|\lambda_1| > 1$, apesar de $\boldsymbol{x}^*$ existir, ele pode não ser atingido.

Sistemas Dinâmicos Lineares Positivos

Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *positiva* se $\boldsymbol{A}_{i,j} > 0$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Como antes, ordene os autovalores de $\boldsymbol{A}$ tais que

$$0 \leq |\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_1|.$$

Teorema (Perron-Frobënius)

Se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva, então

(a) $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda_1 > 0$;

(b) $\lambda_1 > |\lambda_2|$; *(a multiplicidade de λ_1 é 1)*

(c) $\boldsymbol{x}_1 > 0$ *se* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$; *i.é, as entradas de $\boldsymbol{x}_1$ não positivas.*

Vamos provar (a) e (c); a prova de (b) requer ferramental além do que estamos dispostos a usar neste curso.

Prova. (a): Sejam $A_{\min} := \min_{i,j}\{\boldsymbol{A}_{i,j}\}$ e $A_{\max} := \max_{i,j}\{\boldsymbol{A}_{i,j}\}$.

Defina $\mathcal{P} := \{\lambda > 0 : \boldsymbol{Ax} \geq \lambda \boldsymbol{x} \text{ para algum } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}\}$. Temos que

- $\boldsymbol{A}\mathbf{1} \geq A_{\min}\mathbf{1}$ e $A_{\min} > 0$; logo, $\mathcal{P} \neq \emptyset$;
- $\boldsymbol{Ax} \not\geq nA_{\max}\boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$; logo, $\mathcal{P}$ é limitado.

Tome, então, $\lambda_1 = \max\{\lambda : \lambda \in \mathcal{P}\}$. Por definição, $\boldsymbol{Ax}_1 \geq \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ para algum $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Afirmamos que $\boldsymbol{Ax}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$ e que λ_1 é o maior autovalor de $\boldsymbol{A}$.

Como $\boldsymbol{A}$ é positiva, se $\boldsymbol{Ax}_1 \geq \lambda_1\boldsymbol{x}_1$, então $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}_1 > \lambda_1\boldsymbol{Ax}_1$, contrariando a maximalidade de λ_1 em $\mathcal{P}$. Logo, $\boldsymbol{Ax}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1$.

Sejam $(\mu, \boldsymbol{x}')$ um outro auto-par para $\boldsymbol{A}$, i.é, $\boldsymbol{Ax}' = \mu\boldsymbol{x}'$. Temos que $|\mu| \cdot |\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{Ax}'| \leq \boldsymbol{A}|\boldsymbol{x}'|$, o que implica em $|\mu| \leq \lambda_1$.

Portanto, o maior autovalor de $\boldsymbol{A}$ é λ_1, real e positivo. $\square$

Sistemas Dinâmicos Lineares Positivos

Prova. (c): Pelo argumento anterior, temos que $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$. Ou seja, as entradas de $\boldsymbol{x}_1$ são não negativas.

Como $\boldsymbol{A}$ é positiva e $\boldsymbol{x}_1 \neq \mathbf{0}$, é o caso de que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1$ tem todas as entradas positivas.

Mas $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$, com $\lambda_1 > 0$. Portanto, todas as entradas de $\boldsymbol{x}_1$ tem de ser positivas. $\square$

Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *não-negativa* se $\boldsymbol{A}_{i,j} \geq 0$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Uma matriz não-negativa $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *regular* se para algum inteiro $k \geq 1$, $\boldsymbol{A}^k$ é positiva.

Se os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são λ_i, os autovalores de $\boldsymbol{A}^k$ são λ_i^k. Se $\boldsymbol{A}$ é regular, a aplicação de Perron-Frobënius em $\boldsymbol{A}^k$ implica conclusões similares para $\boldsymbol{A}$.