MCTA017 – Programação Matemática

EPR202 – Métodos de Otimização Aplicados à Eng. de Produção

Aula 2

Introdução à Otimização Linear (Parte II)

Prof. Dr. Aritanan Gruber

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Quadrimestre Suplementar 2020

Outline

Problema de Otimização Linear

Modelo de minimização

A forma geral de um *programa linear* (PL) é

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{z} \le \boldsymbol{d} \\
& \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e} \\
& \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{f} \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{z} \le \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{1}
$$

em que $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ são vetores e $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{K}$ matrizes de dimensões apropriadas; descrevem os *dados* do problema. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ são vetores de *variáveis de decisão* reais.

- $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}$ é a *função objetivo* do PL.
- A equação mais as quatro desigualdades formam o conjunto de *restrições* do PL.

Problema de Otimização Linear

Restrições elementares

As restrições $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{z} \leq \mathbf{0}$ podem ser facilmente absorvidas em $\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Fy} + \boldsymbol{Kz} \geq \boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Dy} + \boldsymbol{Gz} \leq \boldsymbol{d}$, respectivamente.

No entanto, dada a simplicidade das mesmas, é conveniente tratá-las em separado como o fizemos (o motivo ficará aparente em breve).

Uso de limitantes:

Em alguns casos, podemos desejar $\boldsymbol{\ell} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$ em vez de $\boldsymbol{x} \geq 0$, com $\ell_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $u_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ representando *limitantes inferior* e *superior* à variável x_i.

Uma absorção semelhante é possível. Neste caso, há circunstâncias em que é vantajoso absorvê-las e casos em que a absorção é indesejável (forneceremos exemplos no futuro).

Problema de Otimização Linear

Soluções

Claramente, o PL (1) consiste em determinar valores (reais) para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ que satisfaçam as restrições e, ao mesmo tempo, minimize o valor da função objetivo.

Historicamente, qualquer atribuição de valores a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ é uma *solução* (nome ruim, mas tem suas explicações) para o PL. Uma tal solução $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ é:

- *viável* se satisfaz as restrições do PL — se é, de fato, uma solução para o sistema de equações e desigualdades; ou
- *inviável* em caso contrário.

Uma solução viável $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ é (globalmente) *ótima* se

$$\delta^* = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}^* + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}^* \leq \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}$$

para qualquer solução viável $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. δ^* é o valor de uma solução ótima e, portanto, o *valor ótimo* do PL.

Problema de Otimização Linear

Soluções

Algumas perguntas surgem...

- Dada uma instância do PL, ela sempre tem soluções viáveis?

  Não. Caso o sistema de restrições (equações e desigualdades) seja inconsistente, não há soluções viáveis. A instância é dita inviável neste caso.

- Tá, mas em caso de consistência, sempre existe solução ótima?

  Não. Dependendo do sistema de restrições, para qualquer solução viável $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, existe outra solução viável $\boldsymbol{w}' = (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ com $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{w}'$ tal que

  $$\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}' < \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z}.$$

  No limite, temos então que o valor da função objetivo é $\delta^* = -\infty$ e a instância é dita ilimitada.

Problema de Otimização Linear

Soluções

Mmmmm... certo... mas...

- Como é que diferenciamos entre estes casos?
- Mais ainda, mesmo que o PL não seja inviável ou ilimitado, dada uma solução viável, como temos certeza de que ela é ótima?

Responder a essas perguntas adequadamente — de forma estrutural e algorítmica – é a essência da teoria de otimização linear.

Problema de Otimização Linear (provisório)

Dada uma instância do PL (1), determinar se ela é inviável, ou se é ilimitada, ou devolver uma solução ótima — com provas!.

Nota: Em otimização linear, se uma solução ótima existe, ela é atingível (o que justifica o uso de $\min$ no lugar de $\inf$). Além disso, todo ótimo local é um ótimo global.

Um Programa Linear Inviável

Considere o PL em duas variáveis:

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \geq 1 \\
& 4x_1 - x_2 \geq 10 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Proposição

O PL acima é inviável.

Você consegue ver o porquê?

Tente provar essa proposição antes de prosseguir...

Um Programa Linear Inviável

Prova:

- Primeiro, rearrumamos as desigualdades, multiplicando a terceira restrição por -1. Temos, então, que (x_1, x_2) satisfaz o lado esquerdo se e somente se satisfaz o lado direito.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ 4x_1 - x_2 & \geq & 10 \\ x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ 4x_1 - x_2 & \geq & 10 \\ -x_1 - 6x_2 & \geq & -15 \end{array} \right\}$$

- Agora, multiplicamos a primeira restrição por 6, obtendo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -6x_1 + 6x_2 & \geq & 6 \\ 4x_1 - x_2 & \geq & 10 \\ -x_1 - 6x_2 & \geq & -15 \end{array} \right\}.$$

- Somando as desigualdades, temos que $-3x_1 - x_2 \geq 1$. Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, o lado esquerdo é no máximo $0 < 1$. Logo, o PL (2) não possui soluções viáveis. $\square$

Um Programa Linear Ilimitado

Considere o PL em duas variáveis:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Proposição

O PL acima é ilimitado.

Você consegue ver o porquê?

Tente provar essa proposição antes de prosseguir...

Um Programa Linear Ilimitado

Note que $(x_1, x_2) = (1, 1)$ é uma solução viável.

Prova:

- Multiplicando a primeira restrição por -1, obtemos

$$x_1 - x_2 \geq -1.$$

- Somando-a com a segunda restrição, vem que $x_1 \geq \frac{1}{2}$.
- Isto é, qualquer solução viável satisfaz $x_1 \geq \frac{1}{2}$ e $x_2 \geq 0$.
- Como $\delta^* := \min\{-x_1 - x_2\} = -\max\{x_1 + x_2\}$, é claro que

$$\delta^* \longrightarrow -\infty$$

à medida que $x_1 \longrightarrow \infty$ ou $x_2 \longrightarrow \infty$. $\square$

Um Programa Linear com Solução Ótima

Considere agora o PL em duas variáveis (para variar um pouco, vamos fazer uma versão de maximização):

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{4}
$$

Proposição

O PL acima possui solução ótima igual a 5.

Você consegue ver o porquê?

Tente encontrar uma solução viável de valor 5 e provar que ela, de fato, é ótima antes de prosseguir...

Um Programa Linear com Solução Ótima

Limitantes superiores

Claramente, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é uma solução viável. Além disso, a segunda restrição limita superiormente o valor da função objetivo:

$$x_1 + x_2 \leq x_1 + 6x_2 \leq 15.$$

Logo, o PL não é ilimitado.

Conseguimos um limitante superior melhor somando o dobro da restrição 1 à restrição 3:

$$x_1 + x_2 \leq 2(x_2 - x_1) + (4x_1 - x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 2 + 10 = 12$$

Dividindo as 3 restrições por quatro e somando-as obtemos

$$x_1 + x_2 \leq x_1 + \frac{3}{2}x_2 \leq \frac{26}{4} = 6.5$$

E podemos continuar tentando...

Um Programa Linear com Solução Ótima

Limitantes superiores

Não é claro, no momento, se este processo de busca por limitantes superiores ao valor ótimo do PL ajuda na determinação de uma solução ótima.

Após determinarmos três limitantes, parecemos estar tão longe de determinar uma solução ótima quanto quando começamos.

No entanto, a ideia por trás de tal processo certamente ajuda na obtenção de uma boa caracterização de uma tal solução.

Este é um dos resultados mais belos e fortes da otimização linear...

Um Programa Linear com Solução Ótima

Nossa busca por limitantes superiores baseou-se na adição de múltiplos não negativos das restrições não elementares.

Sejam então y_1, y_2, y_3 três variáveis. Multiplicando a restrição j do PL (4) por y_j, obtemos

$$\begin{aligned} -y_1x_1 + y_1x_2 &\leq y_1 \\ y_2x_1 + 6y_2x_2 &\leq 15y_2 \\ 4y_3x_1 - y_3x_2 &\leq 10y_3 \end{aligned}$$

assegurando que $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$ para respeitar o sentido das desigualdades.

Somando essas desigualdades e comparando com a função objetivo do PL, vem que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq (-y_1 + y_2 + 4y_3)x_1 + (y_1 + 6y_2 - y_3)x_2 \\ &\leq y_1 + 15y_2 + 10y_3. \end{aligned}$$

Um Programa Linear com Solução Ótima

Dualidade

O limitante é tão melhor quanto menor for o valor da última expressão, com os coeficientes das variáveis x_1 e x_2 na expressão do meio maiores ou iguais aos da expressão mais à esquerda.

Temos, então, um novo programa linear na variáveis y_1, y_2, y_3:

$$\begin{array}{cr} \min\limits_{y_1, y_2, y_3} & y_1 + 15y_2 + 10y_3 \\ \text{s.t.} & -y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 1 \\ & y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \tag{5}$$

O PL (4) é chamado *primal* e o PL (5) é chamado *dual*. Juntos formam um par *primal-dual* de PLs.

Note que o PL dual é viável e não ilimitado.

Um Programa Linear com Solução Ótima

Dualidade

Primal (P):

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2} \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual (D):

$$
\begin{aligned}
\min_{y_1, y_2, y_3} \quad & y_1 + 15y_2 + 10y_3 \\
\text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 1 \\
& y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 1 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Faça $\boldsymbol{c} = (1, 1)^\top$, $\boldsymbol{b} = (1, 15, 10)^\top$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$,

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Um Programa Linear com Solução Ótima

Temos, então, que o PL primal é igual a

$$\max\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\},$$

e que o PL dual é igual a

$$\min\{\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b} : \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

Teorema (Dualidade Fraca)

Se $\boldsymbol{x}$ é uma solução viável para o primal e $\boldsymbol{y}$ é uma solução viável para o dual, então $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b}$.

Prova: Para $\boldsymbol{x}$ primal-viável e $\boldsymbol{y}$ dual-viável, temos que

$$\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b}.$$

$\square$

Um Programa Linear com Solução Ótima

Dualidade

Corolário

Se $\boldsymbol{x}$ é primal-viável e $\boldsymbol{y}$ é dual-viável e $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{b}$, então $\boldsymbol{x}$ é uma solução ótima para o primal e $\boldsymbol{y}$ uma solução ótima para o dual.

Temos que $\boldsymbol{x} = (3, 2)$ é viável para o primal (4) e que $\boldsymbol{y} = (0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ é viável para o dual (5) — verifique! — e que

$$3 + 2 = 5 = 0 + 15 \cdot \frac{1}{5} + 10 \cdot \frac{1}{5}$$

e, portanto, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são soluções ótimas e 5 é o valor ótimo. $\square$

Um Programa Linear com Solução Ótima

Dualidade

Com um pouco mais de trabalho (e teoria), mostramos que a recíproca do Corolário acima é válida e, com isso, que:

Teorema (Dualidade Forte)

O PL primal tem solução-ótima se e somente se o PL dual tem solução ótima — e seus valores ótimos são iguais.

Mais ainda, as soluções ótimas compartilham estrutura:

Corolário (Folgas Complementares)

$\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *são primal- e dual-ótimas se e somente se* $\boldsymbol{x}$ *é primal-viável* $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0)$, $\boldsymbol{y}$ *é dual-viável* $(\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y} \geq 0)$ *e*

$$y_i(b_i - \boldsymbol{A}_{i,*}^\top \boldsymbol{x}) = 0, \ \forall i \qquad \text{e} \qquad x_j(\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A}_{*,j} - c_j) = 0, \ \forall j.$$

Mais Sobre Dualidade Fraca

A prova do Teorema Fraco da Dualidade garante mais alguns resultados.

Corolário

- *Se o PL primal é ilimitado, então o PL dual é inviável.*
- *Se o PL dual é ilimitado, então o PL primal é inviável.*

Antes de prosseguir, mostre que esse corolário é valido nos PLs (2) e (3) que usamos de exemplo.

Nota: Lembre-se que $\min_S\{f\} = -\max_S\{-f\}$.

- É possível que os PLs primal e dual sejam simultaneamente inviáveis!

De Volta ao Exemplo Inviável

Primal (P) inviável:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x_1, x_2} & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 4x_1 - x_2 \geq 10 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Dual (D):

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{y_1, y_2, y_3} & y_1 + 10y_2 - 15y_3 \\ \text{s.t.} & -y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 - 6y_3 \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Temos que $(y_1, y_2, y_3) = (\alpha, \alpha - 1, 0)$ é dual-viável para todo $\alpha \geq 2$. Logo, o valor de (D) é $\alpha + 10(\alpha - 1) = 2\alpha - 10 \longrightarrow \infty$ à medida que $\alpha \longrightarrow \infty$ e (D) é ilimitado. $\square$

De Volta ao Exemplo Ilimitado

Primal (P) ilimitado:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual (D):

$$\begin{aligned} \max_{y_1, y_2} \quad & y_1 - 2y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como $y_1 \geq 0$ e $y_2 \geq 0$, segue que $-(y_1 + y_2) < 0$ contradizendo a primeira restrição do dual. Logo, (D) é inviável. $\square$

De Volta ao Exemplo com Solução Ótima

Até este ponto:

- Mostramos que os PLs primal e dual são viáveis;
- Exibimos soluções primal- e dual-viáveis que possuem o mesmo valor e, portanto, são ótimas.

Mais do que isso, argumentamos (junto com os exemplos de inviabilidade e ilimitação) que programas lineares admitem uma *boa caracterização*: existência de *certificados*, verificáveis em tempo polinomial nos tamanhos das instâncias, para as três possibilidades. Em um linguajar de Complexidade Computacional, otimização linear está em $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.

Só não temos, ainda, algoritmos que encontrem tais certificados em tempo polinomial (mostrando que otimização linear está em P).

Conceitos geométricos nos ajudarão a encontrá-los.

Outline

Otimização sobre Poliedros

Considere que temos $n = n_x + n_y + n_z > 0$ variáveis de decisão. Logo, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_z} = \mathbb{R}^n$.

É conveniente definirmos

$$\mathcal{P} := \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{z} & \leq & \boldsymbol{d}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{e}, \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} & \geq & \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{z} & \leq & \boldsymbol{0} \end{array} \right\}.$$

Geometricamente, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um *poliedro* – uma estrutura convexa e compacta (definições na próxima aula).

Otimização sobre Poliedros

Podemos re-escrever o PL (1) como

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad & \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} \\ \text{s.t.} \quad & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{6}$$

Defina $\mathcal{F}_\delta = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} = \delta\}$, em que $\delta \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. $\mathcal{F}_\delta$ também é um poliedro, denominado *hiperplano afim* por ser definido por uma única equação. O hiperplano é *linear* se $\delta = 0$. Hiperplanos afins são translações de hiperplanos lineares.

Não é difícil perceber que o PL (6) equivale a

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} \quad & \delta \\ \text{s.t.} \quad & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{F}_\delta. \end{aligned} \tag{7}$$

Nota: A intersecção de poliedros é um poliedro (prove!).

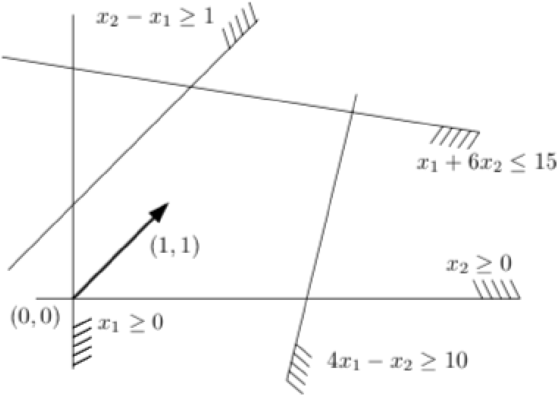
Otimização sobre Poliedros

Assim, do ponto de vista geométrico, determinar uma solução para o PL (1) consiste em

- detectar que o poliedro $\mathcal{P}$, definido pelas restrições do PL, é vazio; ou
- identificar o menor valor δ de translação tal que o hiperplano $\mathcal{F}_\delta$ (induzido pela função objetivo e δ) intersecta o poliedro $\mathcal{P}$; ou
- exibir uma direção de ilimitação em $\mathcal{P}$, em que o valor da função objetivo fique cada vez menor à medida que avançamos nesta direção.

Otimização sobre Poliedros

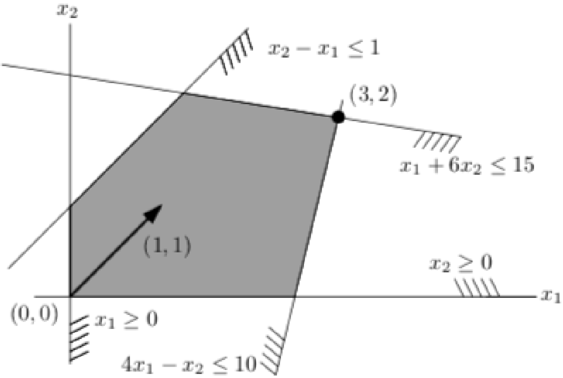
Exemplo inviável



Extraído de Matoušek-Gärtner (pg. 4)

Otimização sobre Poliedros

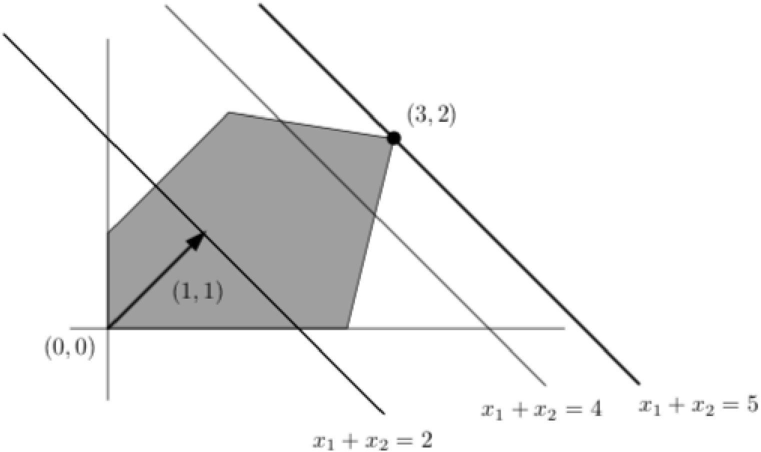
Exemplo com solução ótima



Extraído de Matoušek-Gärtner (pg. 2)

Otimização sobre Poliedros

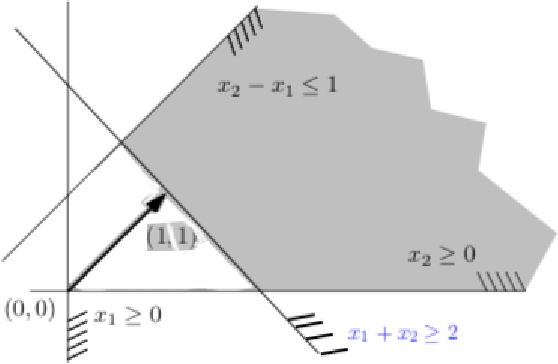
Exemplo com solução ótima



Extraído de Matoušek-Gärtner (pg. 2)

Otimização sobre Poliedros

Exemplo ilimitado



Extraído de Matoušek-Gärtner (pg. 5) — modificado

Outline

Formas Canônica e Padrão

Um PL está na forma *canônica* se tem a forma

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

e na forma *padrão* se tem a forma

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Claramente, ambas as formas, populares na literatura, são casos particulares da forma geral (1).

Formas Canônica e Padrão

O interessante é que qualquer PL pode ser escrito em qualquer uma das duas formas, às custas de incrementos nos números de variáveis e restrições.

Tais formas são úteis no estudo de poliedros, em provas de resultados estruturais, e no desenvolvimento de algoritmos.

O motivo subjacente: são sintaticamente e estruturalmente mais simples.

As técnicas de redução de PLs na forma geral para as formas canônica e padrão são simples e úteis na construção de modelos.

Da Forma Geral à Canônica

Lembramos que a forma geral é:

$$\min_{\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0};\,\boldsymbol{y}\gtrless\mathbf{0};\,\boldsymbol{z}\leq\mathbf{0}} \left\{ \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{z} : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Dy} + \boldsymbol{Gz} & \leq & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{Ey} + \boldsymbol{Hz} & = & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Fy} + \boldsymbol{Kz} & \geq & \boldsymbol{f} \end{array} \right\}.$$

Temos que

$$\boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Fy} + \boldsymbol{Kz} \geq \boldsymbol{f} \quad \Longleftrightarrow \quad -\boldsymbol{Cx} - \boldsymbol{Fy} - \boldsymbol{Kz} \leq -\boldsymbol{f},$$

e que

$$\boldsymbol{Bx}+\boldsymbol{Ey}+\boldsymbol{Hz} = \boldsymbol{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{Bx} + \boldsymbol{Ey} + \boldsymbol{Hz} & \leq & \boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{Ey} - \boldsymbol{Hz} & \leq & -\boldsymbol{e} \end{array} \right\}.$$

Além disso, $\boldsymbol{z} \leq \mathbf{0} \iff -\boldsymbol{z} \geq \mathbf{0}$.

Da Forma Geral à Canônica

Resta tratarmos da variáveis irrestritas $\boldsymbol{y}$, que podem ser positivas, negativas, ou nulas. Defina vetores de variáveis $\boldsymbol{y}^{+} \geq 0$ e $\boldsymbol{y}^{-} \geq 0$ de mesmas dimensões que $\boldsymbol{y}$. Temos que uma variável y_i pode ser escrita como $y_i = y_i^{+} - y_i^{-}$.

Fazendo

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{H} \\ -\boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{H} \\ -\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{K} \end{pmatrix}, \; \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^{+} \\ -\boldsymbol{y}^{-} \\ -\boldsymbol{z} \end{pmatrix}, \; \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{f} \end{pmatrix},$$

e $\widehat{\boldsymbol{c}} = (-\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c})^{\top}$, obtemos o PL na forma canônica

$$-\max\left\{\widehat{\boldsymbol{c}}^{\top}\widehat{\boldsymbol{x}} : \widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}} \leq \widehat{\boldsymbol{b}},\, \widehat{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Exercício: Compare o tamanho deste PL com o da forma geral.

Da Forma Geral à Padrão

Forma geral:

$$\min_{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0};\, \boldsymbol{y} \gtrless \mathbf{0};\, \boldsymbol{z} \leq \mathbf{0}} \left\{ \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{z} & \leq & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} & \geq & \boldsymbol{f} \end{array} \right\}.$$

Defina vetores de variáveis de *folga* $\boldsymbol{r} \geq \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{0}$ de mesmas dimensões que $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{f}$, respectivamente.

Temos que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{d} \quad \iff \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}$$

e que

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{f} \quad \iff \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{f}.$$

Da Forma Geral à Padrão

Defina vetores de variáveis $\boldsymbol{y}^+ \geq 0$ e $\boldsymbol{y}^- \geq 0$ de mesmas dimensões que $\boldsymbol{y}$. Temos que uma variável y_i pode ser escrita como $y_i = y_i^+ - y_i^-$.

Além disso, $\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{0} \iff -\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$.

Com $\boldsymbol{I}$ denotando matrizes identidades de dimensões apropriadas e

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{D} & \boldsymbol{G} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{H} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{K} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix},$$

$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}^+ & -\boldsymbol{y}^- & -\boldsymbol{z} & \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \end{pmatrix}^\top, \widehat{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^\top,$

obtemos o PL na forma padrão

$$\min \{\widehat{\boldsymbol{c}}^\top \widehat{\boldsymbol{x}} : \widehat{\boldsymbol{A}} \widehat{\boldsymbol{x}} = \widehat{\boldsymbol{b}}, \widehat{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

Exercício: Compare o tamanho deste PL com o da forma geral.

Outline

Otimização e Viabilidade

Problema de Otimização Linear (forma canônica)

Dados uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e vetores $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$,

- encontrar um vetor $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*$ é máximo, ou
- decidir que $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ é vazio, ou
- decidir que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ com $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ e tal que $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} > \alpha$.

Problema de Viabilidade Linear (forma canônica)

Dados uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vetor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$,

- encontrar vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, ou
- decidir que $\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ é vazio.

Otimização e Viabilidade

Podemos usar um algoritmo para o problema de otimização para resolver o problema de viabilidade. A redução é imediata neste caso: use uma constante como função objetivo.

Caso a função objetivo seja limitada em $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$, isto é, existem constantes reais L_1 e U_1 tais que $L_1 \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \leq U_1$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}$, podemos usar um algoritmo de viabilidade $\mathscr{V}$ para resolver o problema de otimização.

A redução faz uso de $\mathscr{V}$ via busca binária. No que segue, $\varepsilon > 0$ é uma constante pequena, de tolerância.

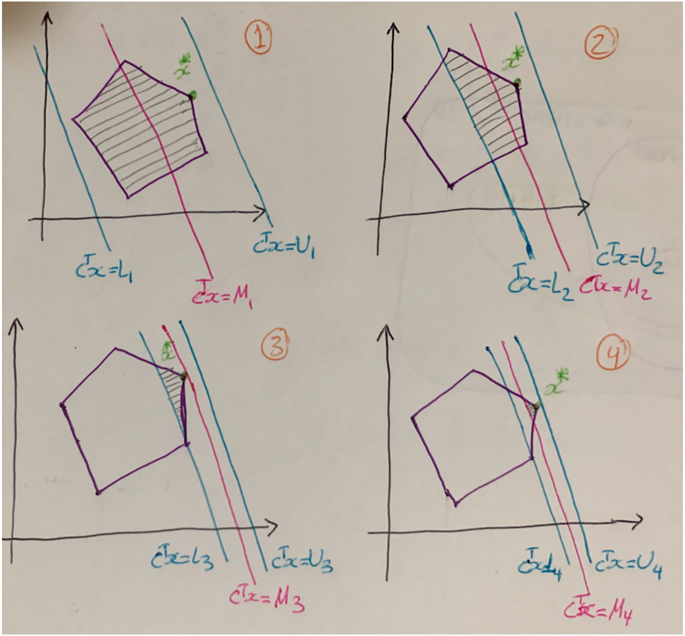
Nota: Adição de restrições em sistemas/programas lineares equivale a intersecção de poliedros.

Otimização via Questões de Viabilidade

O algoritmo recebe $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, L_1, U_1 e ε como entrada e devolve $\boldsymbol{x}^*$ tal que $\max\{\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \leq \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}^* + \varepsilon$ ou "inviável".

```
maxfeas (A, b, c, L_1, U_1, ε)
  k ← 1; P_1 ← {x : Ax ≤ b, x ≥ 0}
  se P_1 = ∅ então devolva "inviável"
  enquanto U_k − L_k > ε faça
    M_k ← (L_k + U_k)/2
    teste se P_k ∩ {x : cᵀx ≥ M_k} ≠ ∅
    em caso positivo:
      x* é o vetor devolvido pelo teste
      P_{k+1} ← P_k ∩ {x : cᵀx ≥ M_k}
      L_{k+1} ← M_k; U_{k+1} ← U_k; k ← k + 1
    em caso contrário:
      P_{k+1} ← P_k ∩ {x : cᵀx ≤ M_k}
      U_{k+1} ← M_k; L_{k+1} ← L_k; k ← k + 1
  devolva x*
```

Otimização via Questões de Viabilidade



Otimização via Questões de Viabilidade

Não é difícil provar que `maxfeas` resolve corretamente um problema de otimização na forma canônica que é inviável ou possui solução ótima. Mais ainda, o faz em $\lceil \log \frac{U_1 - L_1}{\varepsilon} \rceil$ iterações (prove!).

Note que:

- As descrições dos conjuntos viáveis (poliedros) $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ ficam cada vez maiores;
- Uma desigualdade introduzida num passo i pode tornar-se redundante num passo $j > i$.

Pergunta: E se o PL (canônico) for ilimitado?

Tente achar uma resposta antes de prosseguir...

Otimização via Questões de Viabilidade

Vimos que o Teorema Fraco de Dualidade implica que se um PL (primal) é ilimitado, então seu dual é inviável. Logo, basta testar se $\{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c},\, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\} = \emptyset$, e uma chamada a $\mathscr{V}$ resolve a questão.

Podemos explorar um pouco melhor esta ideia e obter um resultado mais polido.

O Teorema Forte de Dualidade (ainda não provado) diz que se o PL (primal) tem solução ótima, então seu dual tem solução ótima. Mais ainda, as soluções ótimas (primal e dual) têm o mesmo valor.

Otimização via Questões de Viabilidade

Logo, se o PL (Q)

$$\max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \left\{ 0 : \begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} & \geq & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \right\}$$

admite uma solução viável $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, temos que $\boldsymbol{x}$ é primal-ótima e $\boldsymbol{y}$ é dual-ótima.

Seja $\mathcal{Q}$ o poliedro definido pelas restrições do PL (Q), após colocado na forma canônica. Teste se $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Em caso afirmativo, $\boldsymbol{x}$ é uma solução ótima ao PL original. Em caso negativo, se $\mathcal{P} = \emptyset$, o PL original é inviável; se $\mathcal{P} \neq \emptyset$, ele é ilimitado.

Tudo isso com duas chamadas a $\mathscr{V}$. (Certifique!)

Outline

Mensagem destas duas aulas

Problemas de Otimização / Programação Matemática ocorrem em quase todas as áreas.

Otimização / Programação Linear é a versão "mais simples" (possui boas caracterizações e algoritmos polinomiais para solução – apesar de não termos visto nenhum ainda).

Não obstante, PL é expressiva (modelos interessantes), tem uma teoria "bonita" (álgebra linear com máximos, mínimos e desigualdades; poliedros, convexidade) e ideias algorítmicas "avançadas" e "sutis."

Dualidade é um conceito "poderoso!"