Soluções para a Prova Substitutiva
Processamento da Informação – 2020.1

Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/∼aritanan.gruber

Duração de 4h contíguas, escolhidas entre as 19h de 01/07/2020 até as 23h de 02/07/2020
Submissão via Tidia em pdf único; se não conseguir acesso, envie o pdf para meu email acima

Questões

1. (3×1) *Sequência em disfarce.* Seja h_n uma sequência de inteiros não negativos especificada em forma matricial por: $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, e

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad n \geq 2.$$

(a) Para $n \geq 1$, mostre que

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solução:
Não há muito o que mostrar aqui já que o resultado é trivial. Se $n = 1$, temos que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; logo, $\binom{h_0}{h_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \binom{0}{1} = \binom{0}{1}$, concordando com as definições de h_0 e h_1. Supondo $n \geq 2$ grande o suficiente, por substituição direta[1],

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{1} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-3} \\ h_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{k} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-k-1} \\ h_{n-k} \end{pmatrix} = \cdots$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mais interessante, é observar que

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_{n-2} + h_{n-1} \end{pmatrix},$$

donde temos que $h_n = h_{n-2} + h_{n-1}$ para $n \geq 1$. Isso responde o item (c): h_n é a sequência de Fibonacci com início em 0 em vez de 1. □

(b) Escreva uma função que recebe $n \geq 0$ inteiro e devolve h_n.

Solução:
Do item (a), temos que o código abaixo (que não usa matrizes) resolve a questão.

```
def h (n: int) -> int:
  hi, hj = 1, 0
  for j in range (1, n+1):
    hi, hj = hj, hi + hj
  return hj
```

Certamente, é possível adaptar o código da Questão (4) abaixo para exponenciação de matrizes (em $O(\log n)$ produtos de matrizes) e finalizar com um produto entre as matrizes do lado direito da equação do item (a). O resultado será o mesmo; o tempo requerido, no entanto, será maior. □

[1] Formalmente, estamos realizando uma prova por indução (finita) em n.

(c) Forneça os valores de

$$h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5.$$

Que sequência é esta? Justifique.

Solução:
Do item (a), os valores são

$$0, 1, 1, 2, 3, 5,$$

e h_n é a sequência de Fibonacci com início em 0 em vez de 1. $\square$

2. (3×1) *Matrizes espirais.* Seja r um inteiro. Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ é **r-espiral** se suas entradas, quando percorridas em sentido horário e concêntrico, à partir do canto superior esquerdo, formam uma progressão aritmética de razão r com início em 1. Exemplos de matrizes 1-espirais com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 6 \\ 15 & 24 & 25 & 20 & 7 \\ 14 & 23 & 22 & 21 & 8 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Qual a estrutura de uma matriz 0-espiral?

Solução: Todas as entradas são iguais a 1. $\square$

(b) Escreva uma função que recebe uma matriz $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ e determina se A é r-espiral, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Em caso afirmativo, devolva um tal r. O que deve ser devolvido em caso negativo?

Solução: Caso A não seja r-espiral, podemos devolver ∞.

```python
from math import inf as oo

def is_r_spiral(A: [[int]]) -> int:
  if (n := len(A)) <= 1: return 0
  if A[0][0] != 1: return oo

  m = (n-1) // 2
  r = A[0][1] - A[0][0]

  for k in range(n // 2):
    for j in range(k, n-k-1):
      if A[k][j] + r != A[k][j+1]:
        return oo

    for i in range(k+1, n-k-2):
      if A[i][n-k-1] + r != A[i+1][n-k-1]:
        return oo

    for j in reversed(range(k+1, n-k)):
      if A[n-k-1][j] + r != A[n-k-1][j-1]:
        return oo

    for i in reversed(range(k+2, n-k-1)):
      if A[i][k] + r != A[i-1][k]:
        return oo

  if n % 2 == 1 and A[m][m] != A[m][m-1] + r:
    return oo
  return r
```

(c) Escreva uma função que recebe inteiros r e $n > 0$ e devolve uma matriz r-espiral $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Solução:

```python
def r_spiral (r: int, n: int) -> [[int]]:
  assert (n >= 1)
  A = [[0 for j in range (n)] for i in range (n)]
  x = 1
  for k in range (n // 2):
    for j in range (k, n-k): A[k][j], x = x, x+r
    for i in range (k+1, n-k-1): A[i][n-k-1], x = x, x+r
    for j in reversed (range (k, n-k)): A[n-k-1][j], x = x, x+r
    for i in reversed (range (k+1, n-k-1)): A[i][k], x = x, x+r
  if n % 2 == 1:
    m = (n-1) // 2
    A[m][m] = x
  return A
```

3. (3×1) *Mais sequências.* Seja $n \geq 1$ um inteiro. Definimos $\mathscr{F}$**-racional**$(\boldsymbol{n})$ como a sequência crescente de todos os números racionais em forma irredutível, com numeradores e denominadores entre 0 e n, cujos valores estejam entre 0 e 1. Exemplos de sequências $\mathscr{F}$-racionais(n) com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$1: \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$2: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$3: \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$4: \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$5: \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

(a) Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ dois elementos consecutivos de uma sequência $\mathscr{F}$-racionais(n). Mostre que o próximo elemento da sequência é $\frac{a''}{b''}$, em que

$$a'' = \big((b+n)//b'\big)a' - a$$
$$b'' = \big((b+n)//b'\big)b' - b$$

com // denotando a divisão inteira.

Solução:
Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{a''}{b''}$ três termos consecutivos de uma sequência $\mathscr{F}$-racionais(n), para algum $n \geq 1$. Temos, primeiramente, que

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}. \tag{1}$$

De fato, $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = \frac{ba' - ab'}{bb'} = \frac{1}{bb'}$ já que $ba' - ab' = 1$. De forma similar, $\frac{a''}{b''} - \frac{a'}{b'} = \frac{1}{b'b''}$. Logo, $ba' - ab' = b'a'' - a'b'' = 1$, e assim, $a'(b + b'') = b'(a + a'')$.
De volta a (1), como $\mathsf{mdc}(a', b') = 1$, existe um inteiro $k \geq 1$ tal que $ka' = a + a''$ e $kb' = b + b''$. Isolando a'' e b'', vem que $a'' = ka' - a$ $(*)$ e $b'' = kb' - b$ $(**)$ e que

$$\frac{a''}{b''} - \frac{a'}{b'} = \frac{a'b - b'a}{b'(kb' - b)}.$$

Logo, quanto maior o valor de k, menor a distância entre $\frac{a'}{b'}$ e $\frac{a''}{b''}$. Como os denominadores são menores ou iguais a n, devemos ter $kb' - b \leq n \iff k \leq \frac{b+n}{b'}$. Tomando o maior valor possível para k, isto é, $k = \left\lfloor \frac{b+n}{b'} \right\rfloor$ e substituindo-o em $(*)$ e $(**)$, o resultado segue. $\square$

(b) Escreva uma função que recebe um inteiro $n \geq 1$ e devolve a sequência $\mathscr{F}$-racionais(n) como dois vetores: um para os numeradores e outro para os denominadores dos termos da sequência.

Solução:

Para $n \geq 1$, as duas primeiras frações da sequência são $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{n}$. Utilizando as relações fornecidas no item (a), produzimos as demais frações. O código que segue faz isso.

```
def farey_seq (n: int) -> ([int], [int]):
  a, b, c, d = 0, 1, 1, n
  N, D = [a], [b]
  while (c <= n):
    k = (b + n) // d
    a, b, c, d = c, d, k * c - a, k * d - b
    N.append (a)
    D.append (b)
  return N, D
```

Para teste:

```
Nn, Dn = farey_seq (5)
for num, den in zip (Nn, Dn):
  print ("{0}/{1}".format (num, den), end = " ")
print()
```

(c) Seja F_n a lista de valores da sequência $\mathscr{F}$-racionais(n) — $F_n[i] = N_n[i]/D_n[i]$, em que $N_n[\cdot]$ e $D_n[\cdot]$ são os vetores de numeradores e denominadores, respectivamente, do item anterior. Calcule

$$R(n) := \sum_{r \in F_n} r$$

para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Em função do número de termos em F_n, quanto vale $R(n)$?

Solução:

n	1	2	3	4	5
$R(n)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{2}$

$R(n) = \frac{1}{2}|F_n|$. □

4. (1) *Mais mistérios.* Considere a seguinte função recursiva.

```
1 def misterio (m: int, n: int) -> int:
2   if n == 0:
3     return 0
4   if n % 2 == 0:
5     return misterio (m+m, n//2)
6   return m + misterio (m+m, n//2)
```

Dados inteiros não negativos m e n, o que calcula uma chamada a `misterio (m, n)`? Se trocarmos os três operadores de adição (`+`) por multiplicação (`*`) — nas linhas 5 e 6 — e o `return 0` por `return 1` — na linha 3 — o que ela calcularia?

Solução:

Como apresentada, a função `misterio` calcula $m * n$ em tempo $O(\log n)$. Com as substituições, ela calcularia m^n; também em tempo $O(\log n)$. □