Lista 2 – Processamento da Informação – 2020.1

Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/∼aritanan.gruber

Entregue todos os exercícios via Tidia-4 até às 01/06/2020 às 19h00.

1. *Mistério.* Sem usar o computador, diga qual o conteúdo da lista A após a execução do código abaixo.

```
A = [98 - i for i in range (99)]
for i in range (99):
  A[i] = A[A[i]]
```

2. *Soma positivos.* Escreva uma função que calcula a soma dos elementos positivos de uma lista $A[0..n-1]$ de inteiros. O problema faz sentido quando $n = 0$? Quanto deve valer a soma nesse caso?

3. *Conjuntos em listas.* Podemos representar conjuntos de inteiros através de listas. Para um conjunto de elementos $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, todos naturalmente distintos, a forma mais simples é via declaração de uma lista A tal que $A[i] = a_i$. Escreva funções que recebem listas (representando conjuntos) A e B com $n \geq 0$ e $m \geq 0$ elementos, respectivamente, e devolva:

   (a) $A \cup B$, a união de A com B;

   (b) $A \cap B$, a intersecção de A com B;

   (c) $A \setminus B$, a diferença de A com B;

   (d) $A \triangle B$, a diferença simétrica de A com B, em que

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

4. *Distância τ de Kendall.* Seja A um conjunto com $n \geq 0$ valores inteiros e sejam $x[0..n-1]$ e $y[0..n-1]$ duas permutações para A. Definimos a distância de Kendall entre x e y como

$$\tau(x, y) := \big|\{(x[i], x[j]) : i < j\} \setminus \{(y[i], y[j]) : i < j\}\big|.$$

Em outras palavras, $\tau(x, y)$ é igual ao número de pares de elementos em A que ocorrem em diferentes ordens relativas em x e y. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$, $x = [3, 2, 1]$ e $y = [1, 3, 2]$, temos que

$$X := \{(x[i], x[j]) : i < j\} = \{(3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$$
$$Y := \{(y[i], y[j]) : i < j\} = \{(1, 3), (1, 2), (3, 2)\}$$

e, portanto, que

$$\tau(x, y) = \big|X \setminus Y\big| = \big|\{(3, 1), (2, 1)\}\big| = 2.$$

   (a) Escreva uma função (eficiente) que recebe x e y e calcula $\tau(x, y)$.

   (b) Mostre que a distância de Kendall é simétrica, mostrando que $\tau(x, y) = \tau(y, x)$.

5. *Contando asteriscos.* Considere o seguinte algoritmo recursivo, cujo argumento n é um inteiro.

```
def Asterisco (n):
  if n > 0:
    Asterisco (n-1)
    for i in range (n):
      print ('*')
    Asterisco (n-1)
```

(a) Para um dado valor de $n \geq 0$, quantos asteriscos são impressos pela chamada `Asterisco (n)`? Tente especificar a sua resposta como uma fórmula fechada (em função de n).

(b) Escreva uma função iterativa (utilizando laços) que realiza a mesma tarefa que `Asterisco (n)`.

6. *Exponenciação de matrizes.*

   (a) Escreva uma função que recebe duas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – isto é, duas matrizes reais com n linhas e n colunas – e devolva o produto $C = A * B$. Lembre-se que

   $$C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{i,k} * B_{k,j} \qquad \text{para todos } 0 \leq i, j < n.$$

   (b) Utilizando a função do item anterior, escreva uma outra função que recebe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um inteiro $m > 1$ e devolva uma aproximação da exponencial de A, denotada por e^A, e definida como

   $$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

   que inclua os m primeiros termos da série acima. Lembre-se que $A^0 = I$, em que I é a matriz identidade de dimensões $n \times n$.

7. *Matrizes estocásticas.* Uma matriz $M \in [0,1]^{m \times n}$ é *estocástica* se a soma dos elementos de cada linha de M é igual a 1. M é *duplamente estocástica* se M e $M^\top$ (a transposta de M) são estocásticas. Por exemplo, a matriz abaixo é estocástica, mas não é duplamente estocástica.

   $$\begin{pmatrix} 0.386 & 0.147 & 0.202 & 0.062 & 0.140 & 0.047 & 0.016 \\ 0.107 & 0.267 & 0.227 & 0.120 & 0.207 & 0.052 & 0.020 \\ 0.035 & 0.101 & 0.188 & 0.191 & 0.357 & 0.067 & 0.061 \\ 0.021 & 0.039 & 0.112 & 0.212 & 0.431 & 0.124 & 0.061 \\ 0.009 & 0.024 & 0.075 & 0.123 & 0.473 & 0.171 & 0.125 \\ 0.000 & 0.103 & 0.041 & 0.088 & 0.391 & 0.312 & 0.155 \\ 0.000 & 0.008 & 0.036 & 0.083 & 0.364 & 0.235 & 0.274 \end{pmatrix}$$

   (a) Escreva uma função que recebe uma matriz M e decide se M é estocástica.

   (b) Escreva uma outra função que recebe uma matriz M e decide se M é duplamente estocástica.