Prova 1 – Processamento da Informação – 2020.1

Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~aritanan.gruber

Duração de 4h contíguas, escolhidas entre as 19h de 26/06/2020 até as 23h de 26/06/2020
Submissão via Tidia em pdf único; se não conseguir acesso, envie o pdf para meu email acima

Termo de Compromisso

Eu, ______________________________, RA ____________, atesto e dou fé que: realizei esta prova individualmente, em minha melhor capacidade, em um intervalo contíguo, escolhido por mim, de até quatro horas de duração entre as 19h de 26/06/2020 e as 23h de 27/06/2020; consultei somente o material permitido (notas de aula escritas pelo professor e anotações pessoais); e não recebi qualquer auxílio – por via oral, escrita, ou eletrônica – de qualquer pessoa que não fosse o próprio professor da disciplina que idealizou e aplicou esta prova. Estou plenamente ciente que a violação às regras acima poderá resultar em prejuízos na minha avaliação.

______________________________ ______________________________
Local e data Assinatura

Questões

1. (1) *Sequência de* $(\textit{yawnoc})^{-1}$. Considere a recorrência $g(\cdot)$, definida abaixo para inteiros $n \geq 1$ como:

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \{1, 2\}, \\ g\big(g(n-1)\big) + g\big(n - g(n-1)\big) & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

   Escreva uma função que recebe n e devolve $g(n)$.

2. (6×1) *Simetrias em matrizes.* Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **$\mathscr{C}$-simétrica** se suas entradas são simétricas com relação ao centro de A. Exemplos de matrizes $\mathscr{C}$-simétricas com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ h & g & f & e \\ d & c & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & l & k \\ j & i & h & g & f \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix},$$

   em que $\{a, b, \ldots, m\}$ são valores reais, não necessariamente distintos.

   (a) Forneça um predicado que defina matrizes $\mathscr{C}$-simétricas, determinando $k = k(n, i, j)$ e $\ell = \ell(n, i, j)$ tais que

$$A[i][j] == A[k][\ell] \qquad \text{para} \qquad 0 \leq i, j < n$$

   quando A é $\mathscr{C}$-simétrica.

   (b) Com base no predicado do item anterior, escreva uma função que recebe uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e decide se A é $\mathscr{C}$-simétrica.

   Uma matriz quadrada $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é **$\mathscr{D}$-constante** se as entradas em cada diagonal de sentido principal são iguais. Exemplos de matruzes $\mathscr{D}$-constantes com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{pmatrix},$$

   em que $\{a, b, \ldots, i\}$ são valores reais, não necessariamente distintos.

(c) Escreva uma função que recebe uma matriz quadrada $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e decide se T é $\mathscr{D}$-constante.

(d) Dada uma matriz $\mathscr{D}$-constante T, que propriedade adicional T deve possuir para que T também seja $\mathscr{C}$-simétrica? Dica: claramente, a resposta procurada não é "$\mathscr{C}$-simétrica."

Para dois vetores $x[0..n-1]$ e $y[0..n-1]$, defina a matriz $\mathscr{D}$-constante $T(y) \in \mathbb{R}^{n\times(2n-1)}$ como

$$T(y) = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \cdots & y_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n-2} & y_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-3} & y_{n-2} & y_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & y_0 & \cdots & y_{n-3} & y_{n-2} & y_{n-1} \end{pmatrix}$$

e considere o produto $z = x^\top T(y)$. Claramente, z é um vetor com $2n-1$ coordenadas.

(e) Escreva uma função que recebe $x[0..n-1]$ e $y[0..n-1]$, determina $T(y)$ e devolve $z = x^\top T(y)$ como acima.

(f) O produto $x^\top T(y)$ equivale a qual operação entre x e y? Justifique.

3. $(1+2)$ *Permutações camaradas.* Três permutações $p[1..n]$, $q[1..n]$ e $r[1..n]$ para o conjunto $S_n := \{1, 2, \ldots, n\}$, com $n \geq 1$ inteiro, são **camaradas** se

$$p \equiv q \circ r \circ q^{-1},$$

em que a operação $q \circ r := q(r)$ denota composição das permutações q e r, e q^{-1} é a permutação inversa à permutação q. Por exemplo, se $n = 9$, as permutações

$$p = [2, 1, 4, 5, 3, 6, 8, 7, 9], \qquad q = [3, 5, 1, 6, 2, 4, 8, 9, 7], \qquad \text{e} \qquad r = [6, 1, 5, 4, 3, 2, 7, 9, 8]$$

são camaradas.

(a) Escreva uma função que recebe as três permutações p, q e r e decide se elas são camaradas.

Duas permutações $p[1..n]$ e $r[1..n]$ para S_n são **camaráveis** se existe uma terceira permutação $q[1..n]$ para S_n tal que p, q e r são camaradas como acima, isto é, se

$$p \equiv q \circ r \circ q^{-1}.$$

(b) Escreva uma função que recebe as permutações p e r e decide se elas são camaráveis; em caso afirmativo, devolva uma permutação q que as tornam camaradas. Nota: q, quando existe, raramente é única.