Prova Substitutiva – Processamento da Informação – 2020.1

Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/∼aritanan.gruber

Duração de 4h contíguas, escolhidas entre as 19h de 01/07/2020 até as 23h de 02/07/2020
Submissão via Tidia em pdf único; se não conseguir acesso, envie o pdf para meu email acima

Termo de Compromisso

Eu, ______________________________, RA ____________, atesto e dou fé que: realizei esta prova individualmente, em minha melhor capacidade, em um intervalo contíguo, escolhido por mim, de até quatro horas de duração entre as 19h de 01/07/2020 e as 23h de 02/07/2020; consultei somente o material permitido (notas de aula escritas pelo professor e anotações pessoais); e não recebi qualquer auxílio – por via oral, escrita, ou eletrônica – de qualquer pessoa que não fosse o próprio professor da disciplina que idealizou e aplicou esta prova. Estou plenamente ciente que a violação às regras acima poderá resultar em prejuízos na minha avaliação.

____________________________ ____________________________

Local e data Assinatura

Questões

1. (3×1) *Sequência em disfarce.* Seja h_n uma sequência de inteiros não negativos especificada em forma matricial por: $h_0 = 0$, $h_1 = 1$, e

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{n-2} \\ h_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{para} \qquad n \geq 2.$$

   (a) Para $n \geq 1$, mostre que

$$\begin{pmatrix} h_{n-1} \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Escreva uma função que recebe $n \geq 0$ inteiro e devolve h_n.

   (c) Forneça os valores de

$$h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5.$$

   Que sequência é esta? Justifique.

2. (3×1) *Matrizes espirais.* Seja r um inteiro. Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ é **r-espiral** se suas entradas, quando percorridas em sentido horário e concêntrico, à partir do canto superior esquerdo, formam uma progressão aritmética de razão r com início em 1. Exemplos de matrizes 1-espirais com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 13 & 14 & 5 \\ 11 & 16 & 15 & 6 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 6 \\ 15 & 24 & 25 & 20 & 7 \\ 14 & 23 & 22 & 21 & 8 \\ 13 & 12 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (a) Qual a estrutura de uma matriz 0-espiral?

   (b) Escreva uma função que recebe uma matriz $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ e determina se A é r-espiral, para algum $r \in \mathbb{Z}$. Em caso afirmativo, devolva um tal r. O que deve ser devolvido em caso negativo?

   (c) Escreva uma função que recebe inteiros r e $n > 0$ e devolve uma matriz r-espiral $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

3. (3×1) *Mais sequências.* Seja $n \geq 1$ um inteiro. Definimos $\mathscr{F}$**-racional(n)** como a sequência crescente de todos os números racionais em forma irredutível, com numeradores e denominadores entre 0 e n, cujos valores estejam entre 0 e 1. Exemplos de sequências $\mathscr{F}$-racionais(n) com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ são

$$1 : \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$2 : \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$4 : \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$5 : \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

(a) Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{a'}{b'}$ dois elementos consecutivos de uma sequência $\mathscr{F}$-racionais(n). Mostre que o próximo elemento da sequência é $\frac{a''}{b''}$, em que

$$a'' = \big((b+n)//b'\big)a' - a$$
$$b'' = \big((b+n)//b'\big)b' - b$$

com // denotando a divisão inteira.

(b) Escreva uma função que recebe um inteiro $n \geq 1$ e devolve a sequência $\mathscr{F}$-racionais(n) como dois vetores: um para os numeradores e outro para os denominadores dos termos da sequência.

(c) Seja F_n a lista de valores da sequência $\mathscr{F}$-racionais(n) — $F_n[i] = N_n[i]/D_n[i]$, em que $N_n[\cdot]$ e $D_n[\cdot]$ são os vetores de numeradores e denominadores, respectivamente, do item anterior. Calcule

$$R(n) := \sum_{r \in F_n} r$$

para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Em função do número de termos em F_n, quanto vale $R(n)$?

4. (1) *Mais mistérios.* Considere a seguinte função recursiva.

```
1 def misterio (m: int, n: int) -> int:
2   if n == 0:
3     return 0
4   if n % 2 == 0:
5     return misterio (m+m, n//2)
6   return m + misterio (m+m, n//2)
```

Dados inteiros não negativos m e n, o que calcula uma chamada a `misterio (m, n)`? Se trocarmos os três operadores de adição (`+`) por multiplicação (`*`) — nas linhas 5 e 6 — e o `return 0` por `return 1` — na linha 3 — o que ela calcularia?