MCTA017 – Programação Matemática – 2020.QS

Lista 2 – Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/∼aritanan.gruber

Exercícios marcados com ▶ devem ser entregues via Tidia até 07/12/2020 às 00h00m.

Notação. Exercícios marcados com: ♦ são operacionais e envolvem a execução de cálculos simples ou o fornecimento de (contra) exemplos; ♥ são sobre teoria e requerem provas matemáticas; ♣ requerem a construção de algoritmos; ♠ envolvem matemática de maneira mais geral, não limitada à teoria de otimização; ★ são exercícios ligeiramente mais difíceis; finalmente, ▶ são exercícios que devem ser entregues via Tidia.

1. ▶ ♦ *Constraint simplifications (W@).* Considere a restrição $\mathscr{R}$ abaixo, em que as variáveis x_i tomam valores binários ($x_i \in \{0, 1\}$ para $i \in [8]$):

$$\mathscr{R}: \; 9x_1 + 13x_2 - 14x_3 + 17x_4 + 13x_5 - 19x_6 + 23x_7 + 21x_8 \leq 37.$$

   (a) Determine uma restrição $\mathscr{S}$ nas mesmas 8 variáveis binárias e logicamente equivalente a $\mathscr{R}$ (isto é, tal que $\mathscr{R} \iff \mathscr{S}$) de forma que os coeficientes de x_i em $\mathscr{S}$ tenham o mesmo sinal que em $\mathscr{R}$ e $\mathscr{S}$ tenha o menor valor absoluto possível no lado direito.

   (b) Determine uma restrição $\mathscr{T}$ equivalente a $\mathscr{R}$ tal que a soma dos valores absolutos dos coeficientes de x_i em $\mathscr{T}$ seja mínima.

   Nota: Espera-se que, para cada item, você construa PLs ou PIs que possam ser generalizados em vez de apresentar soluções *ad-hocs*.

2. ▶ ♦ *Power generation (W@).* A tabela abaixo especifica demandas diárias de eletricidade (em megawatts) estimadas:

00 : 00	→	06 : 00	15000 MW
06 : 00	→	09 : 00	30000 MW
09 : 00	→	15 : 00	25000 MW
15 : 00	→	18 : 00	40000 MW
18 : 00	→	00 : 00	27000 MW

   Existem 27 unidades de geração de energia que podem ser usadas para atender tais demandas: 12 do tipo 1, 10 do tipo 2 e 5 do tipo 3. Cada tipo, por restrições de tecnologia utilizada, pode produzir energia entre um nível mínimo a um nível máximo de saída. Além disso, cada tipo possui um custo fixo para iniciar sua operação, um custo horário para operar à capacidade de geração mínima, e um custo horário adicional para cada megawatt produzido acima da capacidade mínima de geração. Os detalhes numéricos são fornecidos na tabela abaixo.

	Mínimo	Máximo	Custo/h	Custo$^+$/(h·MW)	Fixo
Tipo 1	850 MW	2000 MW	1000	2.0	2000
Tipo 2	1250 MW	1750 MW	2600	1.3	1000
Tipo 3	1500 MW	4000 MW	3000	3.0	500

   Além de atender à estimativa, deve haver unidades geradoras suficientes para lidar com um aumento de consumo de até 15% a qualquer momento. Tal aumento deve ser atendido pelo ajuste da quantidade de energia produzida (saída) pelas unidades já em operação, respeitando seus respectivos limites.

   (a) Quais geradores devem ser usados em quais períodos do dia de forma a minimizar o custo de operação?

   (b) Qual é o custo marginal de produção de eletricidade em cada período do dia; isto é, que tarifas deveriam ser cobradas?

   (c) Qual seria a economia obtida ao se eliminar a garantia de 15% de reserva para aumento de consumo; isto é, quanto custa esta garantia de suprimento adicional?

Suas respostas devem ter justificativas adequadas. Para responder às perguntas, você deve construir um modelo de PL, codificá-lo em `AMPL` e resolvê-lo utilizando o `gurobi` (solver). É necessário apresentar seu modelo de PL.

3. ▶ ♥ *Minkowski sum of polyhedra (BT-2.22).* Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ poliedros em $\mathbb{R}^n$ e considere
$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} := \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{P},\, \boldsymbol{y} \in \mathcal{Q}\}.$$
   (a) Prove que $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ é um poliedro.
   (b) Prove que todo ponto extremo de $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ é a soma de um ponto extremo de $\mathcal{P}$ com um ponto extremo de $\mathcal{Q}$.

4. ▶ ♥ *Optimality conditions I (BT-3.2).* Considere o problema $\min\{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathcal{P}\}$, para um poliedro $\mathcal{P}$. Prove que:
   (a) Uma solução viável $\boldsymbol{x}$ é ótima se e somente se $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \geq 0$ para toda direção viável $\boldsymbol{d}$ no ponto $\boldsymbol{x}$.
   (b) Uma solução viável $\boldsymbol{x}$ é a única solução ótima se e somente se $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} > 0$ para toda direção viável $\boldsymbol{d}$ no ponto $\boldsymbol{x}$.

5. ▶ ♥ *Optimality conditions II (BT-3.7).* Seja $\boldsymbol{x}$ uma solução viável para um PL na forma padrão e seja $Z = \{i : x_i = 0\}$. Mostre que $\boldsymbol{x}$ é uma solução ótima se e somente se o PL
$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{d} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0} \\ & d_i \geq 0 \quad (i \in Z) \end{aligned}$$
tem custo ótimo igual a zero. (De certa forma, decidir otimalidade é equivalente a resolver um novo PL.)

6. ▶ ♣ *Solving simple linear programs (BT-3.22).* Considere o PL com uma única restrição não elementar abaixo:
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \\ & x_i \geq 0 \quad (i \in [n]). \end{aligned}$$
   (a) Forneça um teste simples para checagem de viabilidade (de uma instância) deste problema.
   (b) Supondo que o ótimo é finito, forneça um método simples para obter uma solução ótima. Isto é, forneça um algoritmo combinatório que não use métodos como eliminação Gaussiana, Fourier-Motzkin, Simplex, etc.

7. ▶ ♥ *Motzkin's lemma.* Sejam $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ matrizes e $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ vetores. Prove a seguinte variação do Lema de Farkas para desigualdades estritas:

   Existe um vetor $\boldsymbol{x}$ com $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}$ se e somente se para todos os vetores $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$:
   (i) se $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{B} = 0$, então $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{c} \geq 0$; e
   (ii) se $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{A} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{B} = 0$ e $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} + \boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{c} > 0$.

8. ▶ ♥ *Matrizes duplamente estocásticas.* Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é *duplamente estocástica* se:
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{i,j} &= 1 \qquad (j = 1, \ldots, n); \\ \sum_{j=1}^n A_{i,j} &= 1 \qquad (i = 1, \ldots, n); \\ A_{i,j} &\geq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$
Em outras palavras, $\boldsymbol{A}$ é duplamente estocástica se suas entradas forem não negativas e as somas dos elementos de cada linha e de cada coluna forem iguais a 1. Uma *matriz de permutação* é uma matriz quadrada com entradas em $\{0, 1\}$ que possui um único 1 em cada linha e em cada coluna.

   Mostre que $\boldsymbol{A}$ é duplamente estocástica se e somente se $\boldsymbol{A}$ é uma combinação convexa de matrizes de permutação.

9. ▶ ♥ *Inconsistent systems of linear inequalities (BT-4.29).* Sejam $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ vetores in $\mathbb{R}^n$, com $m > n + 1$. Suponha que o sistema de inequações $\boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{x} \geq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, é inconsistente (i.é, não tem soluções). Mostre que é possível escolhermos $n + 1$ dessas inequações tal que o sistema resultante é inconsistente.