MCTA017 – Programação Matemática – 2020.QS

Lista 3: Opcional – Universidade Federal do ABC

Aritanan Gruber

aritanan.gruber@ufabc.edu.br

http://professor.ufabc.edu.br/~aritanan.gruber

Exercícios marcados com ▶ devem ser entregues via Tidia até 23/12/2020 às 23h00m.

Notação. Exercícios marcados com: ♦ são operacionais e envolvem a execução de cálculos simples ou o fornecimento de (contra) exemplos; ♥ são sobre teoria e requerem provas matemáticas; ♣ requerem a construção de algoritmos; ♠ envolvem matemática de maneira mais geral, não limitada à teoria de otimização; ★ são exercícios ligeiramente mais difíceis; finalmente, ▶ são exercícios que devem ser entregues via Tidia.

1. ▶ ♥ Sejam $D = (V, E)$ um digrafo conexo, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^E_{\geq 0}$ um vetor de *custos* não negativos para os arcos de D, $s \neq t \in V$ vértices *origem* e *destino*. Para um (s,t)-caminho $P = \langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t\rangle$, com $(v_{i-1}, v_i) \in E$ e $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$, o *custo* de P é a soma dos custos de seus arcos: $c(P) = \sum_{i=1}^k \boldsymbol{c}(v_{i-1}, v_i)$.

   Seja $\mathcal{P}_{s,t}$ o conjunto de todos os (s,t)-caminhos em D. P é um (s,t)-caminho de *custo mínimo* de s a t se

   $$c(P) = \min\left\{c(Q) : Q \in \mathscr{P}_{s,t}\right\}.$$

   Um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^V$ é um *potencial* para (os vértices de) D; o potencial é *viável* com relação ao vetor de custos $\boldsymbol{c}$ se

   $$\boldsymbol{y}(v) \leq \boldsymbol{y}(u) + \boldsymbol{c}(u,v) \qquad \text{para todo arco} \qquad (u,v) \in E.$$

   (a) Mostre que, sem perda de generalidade, podemos supor que $\boldsymbol{y}(s) = 0$.

   (b) Escreva programas lineares que modelam os problemas

   $$(PL):\ \min\left\{c(P) : P \text{ é um } (s,t)\text{-caminho em } D\right\},$$
   $$(DL):\ \max\left\{\boldsymbol{y}(t) : \boldsymbol{y} \text{ é um potencial viável para } D\right\},$$

   e argumente que (PL) e (DL) são um par primal-dual. Nota: as restrições de integralidade podem ser ignoradas neste caso. (por que?)

   (c) Seja $\boldsymbol{y}$ um potencial viável para e P um (s,t)-caminho em D. Mostre que $c(P) \geq \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(s)$.

   (d) Mostre que $(PL) = (DL)$, isto é,

   $$\min\left\{c(P) : P \text{ é um } (s,t)\text{-caminho em } D\right\} = \max\left\{\boldsymbol{y}(t) : \boldsymbol{y} \text{ é um potencial viável para } D\right\}.$$

   Nota: O mínimo em (PL) existe porque D é conexo e $c(e) < \infty$ para $e \in E$; o máximo em (DL) existe pelo mesmo motivo, via qual dualidade?

2. ▶ ♥ Seja $G = (X \uplus Y, E)$ um grafo bipartido: $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = V(G)$ e $E \subseteq X \times Y$.

   $M \subseteq E$ é um *emparelhamento* para G se $e \cap e' = \emptyset$ para todas $e, e' \in M$; isto é, arestas em M não possuem pontas em comum. Claramente, $\emptyset$ é um emparelhamento trivial. Um emparelhamento $M^* \subseteq E$ é *máximo* se $|M^*| \geq |M|$ para todo emparelhamento $M \subseteq E$.

   (a) Escreva um PL para determinar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido G. Nota: as restrições de integralidade podem ser ignoradas neste caso. (por que?)

   $U \subseteq V(G)$ é uma *cobertura (de vértices)* se $|U \cap e| \geq 1$ para toda $e \in E$; isto é, U é uma cobertuta se toda aresta de G possui ao menos uma ponta em U. Claramente, $U = V(G)$ é uma cobertura trivial. Uma cobertura $U^* \subseteq V(G)$ é *mínima* se $|U^*| \leq |U|$ para toda cobertura $U \subseteq V(G)$.

   (b) Escreva um PL para determinar uma cobertura mínima em um grafo bipartido G. Nota: as restrições de integralidade podem ser ignoradas neste caso. (por que?)

(c) Denote por $\nu(G)$ e $\tau(G)$ as cardinalidades de um emparelhamento máximo e de uma cobertura mínima em G, respectivamente. Isto é,

$$\begin{aligned}\nu(G) &:= \max\big\{|M| : M \subseteq E \text{ é um emparelhamento}\big\},\\ \tau(G) &:= \min\big\{|U| : U \subseteq V(G) \text{ é uma cobertura}\big\}.\end{aligned}$$

Mostre que $\nu(G) = \tau(G)$.

(d) Mostre que o problema de determinar um emparelhamento máximo em um grafo bipartido pode ser reduzido ao problema de determinar um fluxo máximo em um digrafo (especial).

(e) Por fim, relacione os pares de problemas emparelhamento máximo / cobertura mínima com fluxo máximo / corte mínimo mostrando como obter uma cobertura mínima à partir de um corte mínimo.

3. ▶ ♦ ♥ A definição de cobertura (de vértices) fornecida no item anterior não requer a biparticionalidade do grafo e funciona para grafos não bipartidos. A integralidade das variáveis, no entanto, é diferente.

Enquanto em grafos bipartidos as restrições de integralidade podem ser ignoradas — é possível obter soluções inteiras com o uso de programação linear — ignorá-las no caso não bipartido causa um *relaxamento linear* e as soluções obtidas via PL tendem a não ser inteiras.

(a) Usando a formulação para cobertura mínima que você forneceu em (2b), mostre um exemplo de um grafo em que uma solução ótima possui valores não inteiros. [Conclua com isso que a relação $\nu(G) = \tau(G)$ não é válida quando G não é bipartido.]

Seja $U \subseteq V(G)$ uma cobertura para um grafo G não bipartido. Dizemos que U é uma *2-aproximação* para uma cobertura mínima de G se $\tau(G) \leq |U| \leq 2\tau(G)$.

(b) Mostre como obter, à partir da sua formulação em (2b), uma 2-aproximação para uma cobertura mínima.

(c) Suponha que você tenha um emparelhamento máximo $M^* \subseteq E(G)$ para um grafo G não bipartido. Mostre como obter uma 2-aproximação para uma cobertura mínima em G.

Nota: O problema de emparelhamento máximo em grafos não bipartidos pode ser resolvido em tempo polinomial, mas requer um pouco mais do que otimização linear pura! Já o problema de cobertura mínima em grafos não bipartidos é NP-completo (não conhecemos um algoritmo polinomial para o caso geral e não sabemos se ele não existe). Como mostramos, uma 2-aproximação em tempo polinomial é possível.

4. ▶ ♥ Sejam $\boldsymbol{A}$ uma matriz, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vetores, α, β escalares e $\boldsymbol{x}$ um vetor de variáveis contínuas. Considere o problema de otimização linear fracionária:

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{1}$$

em que

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \alpha}{\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x} + \beta} \qquad \text{com} \qquad \operatorname{dom}(f) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{x} + \beta > 0\}.$$

Suponha que $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} \cap \operatorname{dom}(f) \neq \emptyset$. Mostre que (1) pode ser reduzido a um PL. Isto é, mostre a transformação de (1) em um PL e mostre a equivalência entre os dois (existe solução ótima em um se e somente se existe solução ótima no outro).

5. ▶ ♥ Uma função *pseudo-Booleana* f nas variáveis $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um mapeamento $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$. Toda função pseudo-Booleana f pode ser representada através de um polinômio *multi-afim* P_f sobre as variáveis $\boldsymbol{x}$:

$$P_f(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^n} f(\boldsymbol{a}) \cdot \prod_{j : a_j = 1} x_j \cdot \prod_{j : a_j = 0} (1 - x_j).$$

Operando os produtos acima (via propriedade distributiva), muitos cancelamentos podem ocorrer, de forma que podemos representar P_f mais sucintamente por

$$P_f(\boldsymbol{x}) = \sum_{S \subseteq [n]} c_S \prod_{j \in S} x_j,$$

com $c_S \in \mathbb{R}$ constantes para todo S.

(a) Para $n = 2k+1$ com $k \geq 0$ inteiro (i.é, n ímpar), a função *maioridade* maj_n de $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dada por $\mathsf{maj}_n(\boldsymbol{x}) = 1$ se $\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n+1}{2}$ e $\mathsf{maj}_n(\boldsymbol{x}) = 0$ em caso contrário. Determine o polinômio multi-afim de maj_n.

(b) Mostre que a representação de f via polinômio P_f multi-afim é unívoca. Isto é, para toda função pseudo-Booleana f existe um único polinômio multi-afim P_f tal que $f(\boldsymbol{a}) = P_f(\boldsymbol{a})$ para todo $\boldsymbol{a} \in \{0,1\}^n$. (Logo, podemos ignorar a notação P_f e usar f para a função e para o polinômio multi-afim que a representa.)

Dada uma função pseudo-Booleana em $n \geq 1$ variáveis representada através de um polinômio multi-afim f, considere o problema de otimização polinomial binária irrestrito:

$$\min\left\{ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{S \subseteq [n]} c_S \prod_{j \in S} x_j : \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \right\}. \tag{2}$$

(c) Dado um grafo G, determine a função pseudo-Booleana que, quando aplicada ao Problema (2), fornece uma solução para o problema da cobertura mínima em G. Nota: a definição de cobertura fornecida na Questão (2) para grafos bipartidos se aplica a grafos gerais.

Para cada $S \subseteq [n]$ com $|S| \geq 2$, considere o sistema de restrições

$$\begin{aligned} & y_S \leq x_j, && (j \in S) \\ & y_S \geq 1 - |S| + \sum_{j \in S} x_j, && \\ & y_S \geq 0, && \end{aligned}$$

em que y_S é uma nova variável contínua (real).

(c) Seja $S \subseteq [n]$ com $|S| \geq 2$. Mostre que $\prod_{j \in S} x_j = y_S$ para todo $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^S$, em que y_S é obtido pela transformação acima. Conclua com isso que (2) pode ser re-escrito como um Problema Linear Inteiro Misto com n variáveis binárias e $m := |\{S \subseteq [n] : c_S \neq 0\}|$ variáveis auxiliares reais:

$$\min\left\{ c_\emptyset + \sum_{i=1} c_i x_i + \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ c_S \neq 0}} c_S y_S : \boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n,\ y_S \geq 0,\ y_S \text{ sujeita a demais restrições acima} \right\}. \tag{3}$$

(d) Como (2) é de minimização, mostre que as restrições $y_S \leq x_j$ podem ser descartadas e assim, o problema (3) possui m restrições além de $x_j \in \{0,1\}$ e $y_S \geq 0$.

(e) O que acontece se relaxarmos $x_j \in \{0,1\}$ para $x_j \geq 0$, para todo j? Por que $x_j \leq 1$ não é necessária neste caso?