

MCTA017 – Programação Matemática

**EPR202 – Métodos de Otimização
Aplicados à Eng. de Produção**

Aula 5

Geometria e Estrutura de Conjuntos Poliédricos (Parte I)

Prof. Dr. Aritanan Gruber

Centro de Matemática, Computação e Cognição
Universidade Federal do ABC

Quadrimestre Suplementar 2020

Agenda

(em três partes)

Vamos desenvolver, em paralelo, as teorias algébrica de sistemas de inequações lineares e geométrica de poliedros: uma informa, motiva e ilustra a outra, tornando a inter-relação rica e poderosa.

Especificamente, vamos:

- ▶ estudar representações interna e externa de poliedros e cones;
- ▶ estudar a estrutura de poliedros e ligá-la a conceitos vetoriais lineares e afins;
- ▶ introduzir um algoritmo iterativo de busca que soluciona problemas viáveis;
- ▶ apresentar provas construtivas de resultados clássicos fundamentais como Farkas e Carathéodory;
- ▶ provar Dualidade Forte e de Folgas Complementares;
- ▶ refinar o algoritmo acima no método Simplex.

Outline

Conjuntos e Cones Convexos Redux

Inequações, Fourier-Motzkin e Farkas

Quatro Combinações, Quatro Estruturas

Sejam $\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Lembre-se que $\mathbf{x}$ é uma combinação linear dos $\mathbf{x}_i$ se

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$$

para $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Caso ainda valha que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\mathbf{x}$ é uma combinação afim dos $\mathbf{x}_i$.

Os fechos linear $\text{lin. span}(X)$ e afim $\text{aff. span}(X)$ de X são os conjuntos de todas as combinações lineares e afins, respectivamente, de elementos em X . Claramente, $\text{lin. span}(X)$ é um subespaço linear e $\text{aff. span}(X)$ é um conjunto afim.

Equivalentemente, podemos expressar lin. span e aff. span como

$$\text{lin. span}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ é um subespaço linear de } \mathbb{R}^n\},$$

$$\text{aff. span}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ é um conjunto afim em } \mathbb{R}^n\}.$$

Quatro Combinações, Quatro Estruturas

Se restringirmos o domínio dos λ_i aos reais não negativos, obtemos combinações *cônicas* e *convexas* no lugar de lineares e afins.

Dizemos que $\mathbf{x}$ é uma *combinação cônica* de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ se para $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, temos que $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k$.

Se além disso valer que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, então $\mathbf{x}$ é uma *combinação convexa* de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$. Isto é, uma combinação convexa é simultaneamente cônica e afim.

De forma semelhante, os *fechos cônico* $\text{cone}(X)$ e *convexo* $\text{conv}(X)$ de X são os conjuntos de todas as combinações cônicas e convexas, respectivamente, de elementos em X .

Um conjunto $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ é um *cone* (ou *cônico*) se $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in C$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se C é um cone, então $\mathbf{0} \in C$.

Quatro Combinações, Quatro Estruturas

Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é *convexo* se para todos $x, y \in C$ e $\lambda \in [0, 1]$, tem-se que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$. $\mathbf{0}$ pode ou não pertencer a C .

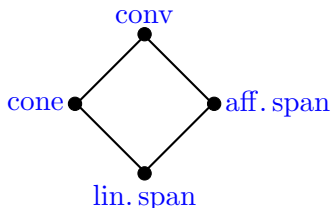
Claramente, $\text{cone}(X)$ é um cone e $\text{conv}(X)$ é um conjunto convexo para todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Além disso, é de prova imediata que todo cone é convexo.

$\text{cone}(X)$ e $\text{conv}(X)$ podem ainda ser expressos como:

$$\text{cone}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ é um cone em } \mathbb{R}^n\},$$

$$\text{conv}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ é um conjunto convexo em } \mathbb{R}^n\}.$$

Reticulado dos 4 tipos de combinações e fechos:



Quatro Tipos de Combinações e Fechos

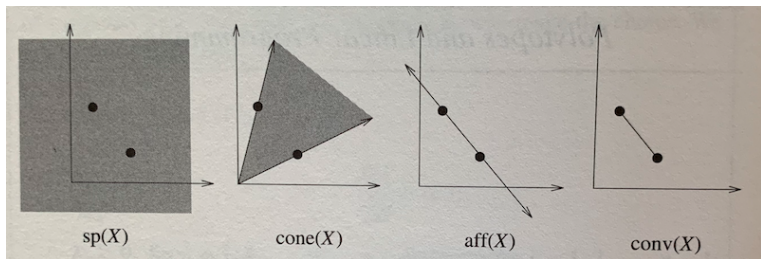
Para $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ finito, quatro tipos de fechos:
linear, cônico, afim e convexo. ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

$$\text{lin. span}(X) := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k\}$$

$$\text{cone}(X) := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0\}$$

$$\text{aff. span}(X) := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1\}$$

$$\text{conv}(X) := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1, \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0\}$$



$X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, linearmente independentes (ext. de Lee, pg. 10)

Quatro Combinações, Quatro Estruturas

As *dimensões* de cones e conjuntos convexos funcionam como esperamos, isto é, para $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$,

- ▶ $\dim(\text{cone}(X)) = \dim(\text{lin. span}(X))$, que é igual ao número máximo de vetores linearmente independentes em X , e
- ▶ $\dim(\text{conv}(X)) = \dim(\text{aff. span}(X))$, que é igual ao número máximo de vetores afim independentes em X menos 1.

Lembre-se que, por definição, $\dim(\text{aff. span}(\emptyset)) = -1$.

Como $\text{aff. span}(X) = \text{lin. span}(X - a)$ para algum traslado $a \in X$,

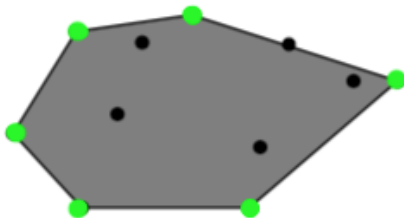
$$\begin{aligned}\dim(\text{conv}(X)) &= \dim(\text{aff. span}(X)) \\ &= \dim(\text{lin. span}(X - X)) + 1 \\ &= \dim(\text{cone}(X - X)) + 1.\end{aligned}$$

Nota: Neste curso, a menos que explicitado o contrário, todos os cones e conjuntos convexos são *fechados*.

Conjuntos Convexos

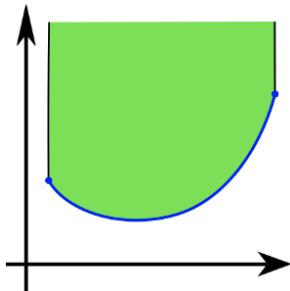
Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Um vetor $x \in S$ é um *ponto extremo* de S se não existem $y, z \in S$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$.

De outra forma, x é um ponto extremo de S se para todos $y, z \in S$ tais que $x = (1 - \lambda)y + \lambda z$, é o caso de que $\lambda \in \{0, 1\}$; logo, $x = y$ ou $x = z$.



Pontos extremos em verde — Finitamente gerado
(Gärtner-Matoušek modificado)

Conjuntos Convexos



Pontos extremos em azul — Não finitamente gerado (Wikipedia)

Um resultado clássico que será útil posteriormente.

Teorema (Carathéodory: afim — exercício)

Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \text{conv}(X)$, então $\mathbf{x} \in \text{conv}(\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d\})$ para alguns vetores afim independentes $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in X$, com $d = \min\{n, |X| - 1\}$.

Hiperplanos e Meio-espços

Um *hiperplano* $H \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma

$$H = H(\mathbf{a}, \delta) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \delta\} \quad (\bullet)$$

para algum $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\delta \in \mathbb{R}$. H é *linear* (homogêneo) se $\delta = 0$ e *afim* (inotogêneo) em caso contrário. O vetor $\mathbf{a}$ é dito *normal* ao hiperplano H .

Um hiperplano H divide o espaço $\mathbb{R}^n$ em dois *meio-espços*:

$$H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \delta\} \quad \text{e} \quad H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \geq \delta\}.$$

Claramente, $H = H^- \cap H^+$. Os meio-espços são lineares ou afins de acordo com o valor de δ .

A *dimensão* de um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ é $\dim(H) = n - 1$ e a recíproca é verdadeira: todo subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\dim(X) = n - 1$ é um hiperplano e pode ser expresso na forma $(\bullet)$ – prove!

Hiperplanos e Meio-espços

Proposição

- (a) *A intersecção de dois conjuntos convexos é convexa.*
- (b) *Todo meio-espço é um conjunto convexo.*

Prova. (a) Sejam S_1, S_2 convexos e $S = S_1 \cap S_2$. Para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, temos que $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in S_i$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, pois S_i é convexo. O mesmo vale para S ; logo ele é convexo.

(b) Considere o meio-espço $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \delta\}$ e tome $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H^-$. Para todo $\lambda \in [0, 1]$, defina $\mathbf{z}(\lambda) := (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$. Temos que

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{z}(\lambda) = \mathbf{a}^\top ((1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}) = (1 - \lambda)\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}^\top \mathbf{y} \leq (1 - \lambda)\delta + \lambda\delta = \delta$$

mostrando que $\mathbf{z}(\lambda) \in H^-$. Logo, H^- é convexo. $\square$

Resultado semelhante é válido para H^+ .

Poliedros

Um conjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um *poliedro* se

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

para alguma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e vetor $b \in \mathbb{R}^m$. Caso $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{Q}^m$, o poliedro é dito *racional*.

Nota: As transformações introduzidas nas reduções de PLs às formas canônica e padrão claramente se aplicam a poliedros; vamos, por vezes, considerar poliedros em tais formas e adotar a nomenclatura.

Hiperplanos e meio-espacos são poliedros e a recíproca é verdadeira no sentido de que um poliedro é uma intersecção de um número finito de meio-espacos.

Corolário

Todo poliedro é um conjunto convexo.

Poliedros

Um poliedro $\mathcal{P}$ como acima é *limitado* se existe uma constante real $M > 0$ tal que $|x_i| < M$ para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ e $i \in [n] := \{1, 2, \dots, n\}$.

Um conjunto $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ é um *politopo* se

$$\mathcal{Q} = \text{conv}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\},$$

para um conjunto finito $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Em outras palavras, um politopo $\mathcal{Q}$ é um conjunto convexo finitamente gerado.

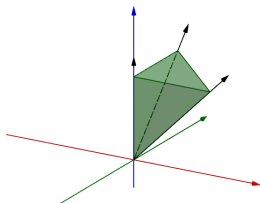
Podemos intuir que os conceitos *poliedro limitado* e *politopo* descrevem as mesmas regiões convexas do espaço: o primeiro, de forma externa e o segundo, de forma interna.

A intuição é correta e vamos provar que um poliedro é limitado se e somente se ele é um politopo.

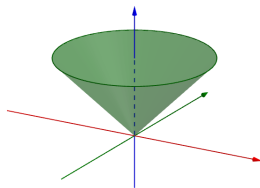
Cones Convexos

Um cone $\emptyset \neq \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ é

- ▶ *poliédrico* se $\mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- ▶ *finitamente gerado* se para algum $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ finito, $\mathcal{C} = \text{cone}(X) := \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \lambda_i \geq 0\}$.



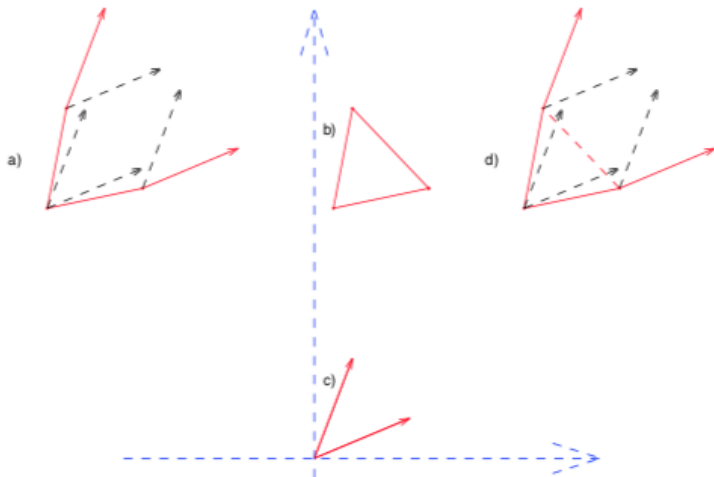
Finitamente gerado (Wikipedia)



Não finitamente gerado (idem)

Vamos mostrar que: um cone é poliédrico se e somente se é finitamente gerado; um conjunto $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro se e somente se $\mathcal{P} = \mathcal{Q} + \mathcal{C}$ para algum politopo $\mathcal{Q}$ e cone poliédrico $\mathcal{C}$.

Cones e Poliedros



(a) poliedro $\mathcal{P}$. (b) politopo $\mathcal{Q}$. (c) cone $\mathcal{C}$. (d) $\mathcal{P} = \mathcal{Q} + \mathcal{C}$.
(extraído de Nemirovski, pg. 48)

Outline

Conjuntos e Cones Convexos Redux

Inequações, Fourier-Motzkin e Farkas

Onde Estamos . . .

Para uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vetor $b \in \mathbb{R}^n$, mostramos que o sistema afim $Ax = b$ tem solução $x \in \mathbb{R}^n$ se e somente se o sistema linear

$$y^T A = 0, y^T b = -1$$

não tem solução $y \in \mathbb{R}^m$.

Mais ainda, o algoritmo de **Eliminação Gaussiana** pode ser usado para determinar x ou y — e também para produzir uma prova alternativa.

Para $c \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in \mathbb{R}$, podemos provar que implicações entre equações lineares podem ser testadas em tempo polinomial:

Corolário (exercício)

Supondo que $Ax = b$ tem solução, temos que $Ax = b$ implica que $c^T x = \delta$ se e somente se existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^T A = c$ e $y^T b = \delta$.

Onde Estamos . . .

O Corolário acima junto à Eliminação Gaussiana e Busca Binária pode ser usado para resolver o PL $\min\{c^T x : Ax = b\}$ em tempo polinomial. (Como?)

Pergunta: O que está faltando / resta a ser feito?

Não é possível reduzir o PL genérico a $\min\{c^T x : Ax = b\}$ pois não temos como expressar restrições do tipo $x_j \geq 0$ nele.

Lembre-se que a redução de um PL com inequações $Ax \leq b$ ou $Ax \geq b$ à forma padrão envolvendo equações $A'x' = b'$ requer que as variáveis de folga introduzidas sejam não negativas.

Mais ainda, a Eliminação Gaussiana não oferece suporte a desigualdades: o algoritmo processa equações cujas variáveis são irrestritas!

Entra em cena o algoritmo de eliminação de *Fourier-Motzkin*: análogo à Eliminação Gaussiana, mas para sistemas $Ax \leq b$ com m inequações em n variáveis.

Eliminação de Fourier-Motzkin

O algoritmo de eliminação de *Fourier-Motzkin* é análogo à Eliminação Gaussiana, mas para sistemas $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ com m inequações em n variáveis.

Multiplicando cada inequação por uma constante positiva, transformamos a primeira coluna de $\mathbf{A}$ em um vetor com entradas em $\{-1, 0, 1\}$. Assim, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ pode ser re-escrito como

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}'_i)^\top \mathbf{x}' &\leq b_i & (i = 1, \dots, m_1), \\ -x_1 + (\mathbf{a}'_j)^\top \mathbf{x}' &\leq b_j & (j = m_1 + 1, \dots, m_2), \\ x_1 + (\mathbf{a}'_k)^\top \mathbf{x}' &\leq b_k & (k = m_2 + 1, \dots, m),\end{aligned}$$

em que $\mathbf{x}' = (x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{a}'_1, \dots, \mathbf{a}'_m$ são as linhas de $\mathbf{A}$ sem a primeira entrada (correspondente à primeira coluna). Observe que:

$$\max_j \{(\mathbf{a}'_j)^\top \mathbf{x}' - b_j\} \leq x_1 \leq \min_k \{b_k - (\mathbf{a}'_k)^\top \mathbf{x}'\}. \quad (\star)$$

Eliminação de Fourier-Motzkin

Logo, podemos eliminar a variável x_1 , obtendo

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}'_i)^\top \mathbf{x}' &\leq b_i & (i = 1, \dots, m_1), \\ (\mathbf{a}'_j)^\top \mathbf{x}' - b_j &\leq b_k - (\mathbf{a}'_k)^\top \mathbf{x}' & (j = m_1 + 1, \dots, m_2), \\ & & (k = m_2 + 1, \dots, m),\end{aligned}$$

que pode ainda ser re-escrito como

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}'_i)^\top \mathbf{x}' &\leq b_i & (i = 1, \dots, m_1), \\ (\mathbf{a}'_j + \mathbf{a}'_k)^\top \mathbf{x}' &\leq b_k + b_j & (j = m_1 + 1, \dots, m_2), \\ & & (k = m_2 + 1, \dots, m),\end{aligned}$$

um sistema $\mathbf{A}'\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}'$ em $n' = n - 1$ variáveis e com

$$m' = m_1 + (m_2 - m_1)(m - m_2) - m_2 = O(m^2)$$

restrições.

Eliminação de Fourier-Motzkin

A prova de que $Ax \leq b$ tem solução x se e somente se $A'x' \leq b'$ tem solução x' , com $x = (\alpha_1, x')$ para algum $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, é imediata: dado x' , basta tomar α_1 satisfazendo $(\star)$ no lugar de x_1 .

Iterando a eliminação acima $n - 1$ vezes, obtém-se um sistema em uma única variável, caso em que determinar a existência ou não de uma solução é trivial.

Semelhante ao feito com sistemas de equações, é possível utilizar estas $n - 1$ iterações como um algoritmo que:

- ▶ determina uma solução x para $Ax \leq b$, ou
- ▶ fornece um certificado $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$, atestando a inconsistência de $Ax \leq b$.

A prova desta afirmação será trabalhada na lista de exercícios. Uma consequência, é uma prova construtiva do clássico lema de Farkas para sistemas de inequações.

Eliminação de Fourier-Motzkin

Fourier-Motzkin permite resolvermos o problema de viabilidade para poliedros $\{x : Ax \leq b\}$ e $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Aliás, geometricamente, o método consiste em projeções sucessivas: o poliedro

$$\{x' : (a'_i)^\top x' \leq b_i, (a'_j + a'_k)^\top x' \leq b_k + b_j\}$$

é a projeção ao longo do eixo x_1 do poliedro

$$\{x := (x_1, x') : (a'_i)^\top x' \leq b_i, -x_1 + (a'_j)^\top x' \leq b_j, x_1 + (a'_k)^\top x' \leq b_k\}.$$

Podemos resolver $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ reduzindo-o ao caso acima:

- ▶ Escalone completamente (via eliminação Gaussiana) o sistema

$$Ax = b \text{ no equivalente } \begin{pmatrix} I & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = y + A'z = b',$$

- ▶ Aplique Fourier-Motzkin em $A'z \leq b', z \geq 0$.

Eliminação de Fourier-Motzkin

Temos assim que **Fourier-Motzkin** mais **Busca Binária** podem ser usados para resolver PLs nas formas canônica e padrão.

Não é difícil perceber que podemos eliminar a dependência na Busca Binária aumentando a dimensão do espaço do PL em uma unidade.

Especificamente, para resolvemos o PL $\max \{c^T x : Ax \leq b\}$, consideramos uma variável adicional δ e aplicamos Fourier-Motzkin no sistema

$$Ax \leq b, \delta - c^T x \leq 0,$$

de forma a determinarmos uma solução $\begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}$ com δ o maior possível.

Isto é feito eliminando-se todas as variáveis x_i e resolvendo o sistema resultante em δ de forma que ela tenha o maior valor possível.

Observamos (sem prova) que, ao contrário da eliminação Gaussiana, Fourier-Motzkin requer tempo exponencial em n no pior caso.

Lemas de Farkas

Lema (Farkas I: original)

Um sistema $Ax \leq b$ tem solução x se e somente se não existe $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$.

Nota: Enunciamos o lema como uma boa caracterização da solução de $Ax \leq b$: x e y são certificados positivo e negativo, resp. É comum encontrar o lema enunciado como um conjunto de alternativas: Sejam A uma matriz e b um vetor. Temos que uma e somente uma alternativa se verifica: ou

- (I) existe um vetor x tal que $Ax \leq b$, ou
- (II) existe um vetor $y \geq 0$ tal que $y^T A = 0$ e $y^T b < 0$.

Claramente, as duas formas são logicamente equivalentes (e usaremos a que for mais conveniente a cada momento).

Lemas de Farkas

A título de ilustração, vamos mostrar que as duas alternativas são mutuamente exclusivas: i.é, não ocorrem simultaneamente.

Prova. Suponha o contrário, isto é, que existem x e $y \geq 0$ tais que (I) e (II) são verdadeiras. Temos então que

$$0 = 0^\top x = y^\top Ax \leq y^\top b < 0,$$

uma clara contradição. Que (I) e (II) são exaustivas (ao menos uma se verifica) será provado na lista de exercícios. $\square$

Existem versões diferentes do Lema de Farkas na literatura. Todas, podem ser facilmente transformadas umas nas outras.

Lema (Farkas II: forma canônica — exercício)

Um sistema $Ax \leq b$ tem solução $x \geq 0$ se e somente se não existe $y \geq 0$ tal que $y^\top A \geq 0$ e $y^\top b < 0$.

Lemas de Farkas

Lema (Farkas III: forma padrão)

Um sistema $Ax = b$ tem solução $x \geq 0$ se e somente se não existe y tal que $y^T A \geq 0$ e $y^T b < 0$.

A prova segue as linhas da redução de PLs à forma padrão.

Prova. Temos que a afirmação $\exists x : Ax = b, x \geq 0$ equivale a $\exists x : Ax \leq b, -Ax \leq -b, -x \leq 0$. Em notação matricial,

$$\exists x : \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

O Lema de Farkas I então fornece que $\nexists y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$ tal que

Lemas de Farkas

$$(\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top, \mathbf{y}_3^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top, \mathbf{y}_3^\top) \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} < 0.$$

Isto equivale a $\nexists \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}_2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}_3 \geq \mathbf{0} : (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)^\top \mathbf{A} - \mathbf{y}_3 = \mathbf{0}, (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)^\top \mathbf{b} < 0$. Fazendo $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$, obtemos

$$\nexists \mathbf{y}, \mathbf{y}_3 \geq \mathbf{0} : \mathbf{y}^\top \mathbf{A} - \mathbf{y}_3 = \mathbf{0}, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0 \iff \nexists \mathbf{y} : \mathbf{y}^\top \mathbf{A} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0.$$

□

Esta versão do lema de Farkas na forma padrão tem uma interpretação geométrica simples e clara:

- ▶ ou $\mathbf{b}$ é uma combinação linear não negativa (= cônica) das colunas de $\mathbf{A}$,
- ▶ ou existe um hiperplano de normal $\mathbf{y}$ que faz ângulos obtusos às colunas de $\mathbf{A}$ e faz um ângulo agudo com $\mathbf{b}$.

Lemas de Farkas

Este é um ponto crucial e não convém dependermos de resultados da lista de exercícios. Vamos, então, provar uma versão ligeiramente mais forte do Lema de Farkas III. A prova é construtiva, baseada em um **algoritmo fundamental** que é a semente do algoritmo **Simplex**.

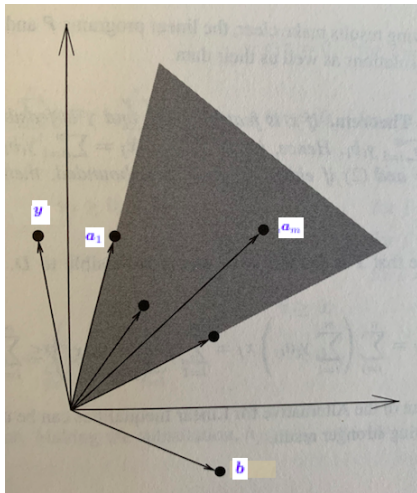
Teorema (fundamental de desigualdades lineares; Farkas III')

Para vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, com $d = \text{rank}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}\})$, uma e somente uma das possibilidades abaixo se verifica:

- (I) $\mathbf{b}$ é uma combinação cônica de $d - 1$ vetores linearmente independentes dentre $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$, ou
- (II) existe um hiperplano $\{z : \mathbf{y}^\top z = 0\}$, contendo $d - 1$ vetores linearmente independentes dentre $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ tal que

$$\mathbf{y}^\top \mathbf{b} < 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_1 \geq 0, \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_m \geq 0.$$

Lemas de Farkas



(extraído de Lee, pg. 13; modificado)

Ou $b \in \text{cone}(\{a_{i_1}, \dots, a_{i_{d-1}}\})$, ou existe um vetor y com o qual b faz um ângulo agudo e todo a_i faz um ângulo obtuso (ilustrado na figura).

Lemas de Farkas

Prova. Podemos supor que $L := \text{lin. span}(\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}) = \mathbb{R}^n$ já que, em caso contrário, podemos estender $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ a uma base de $\mathbb{R}^n$ e trabalhar no subespaço complementar a $L^\perp$. Em nossa notação: $d = n \leq m$.

Temos que (I) e (II) não ocorrem simultaneamente. Caso contrário, $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ com $x_i \geq 0$ implica a clara contradição:

$$0 \leq x_1 \underbrace{\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_1}_{\geq 0} + x_2 \underbrace{\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_2}_{\geq 0} + \dots + x_m \underbrace{\mathbf{c}^\top \mathbf{a}_m}_{\geq 0} = \mathbf{c}^\top \mathbf{b} < 0.$$

Nota: Os $d - 1$ vetores mencionados podem ser claramente obtidos por eliminação Gaussiana em $\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Mostramos agora que ou (I) ou (II) ocorre. Para isso, considere o seguinte algoritmo que recebe vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ e devolve $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ de acordo com (I) ou $\mathbf{y}$ de acordo com (II).

Lemas de Farkas

Escolha $D = \{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_d}\} \subseteq \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ de forma que D seja linearmente independente.

(1) Determine $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_d}$ tais que

$$\lambda_{i_1} \mathbf{a}_{i_1} + \lambda_{i_2} \mathbf{a}_{i_2} + \dots + \lambda_{i_d} \mathbf{a}_{i_d} = \mathbf{b};$$

Se $\lambda_{i_j} \geq 0$, **pare**: o caso (I) ocorre.

(2) Seja $k = \min\{i_j : j \in [d], \lambda_{i_j} < 0\}$ e seja $\{\mathbf{x} : \mathbf{y}^\top \mathbf{x} = 0\}$ o hiperplano gerado por $D \setminus \{\mathbf{a}_k\}$, com $\mathbf{y}$ normalizado de forma que $\mathbf{y}^\top \mathbf{a}_k = 1$. [Logo, $\mathbf{y}^\top \mathbf{b} = \lambda_k$.]

(3) Caso $\mathbf{y}^\top \mathbf{a}_1, \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_m \geq 0$, **pare**: o caso (II) ocorre.

(4) Seja $\ell = \min\{j \in [m] : \mathbf{y}^\top \mathbf{a}_j < 0\}$. Faça

$$D \leftarrow (D \setminus \{\mathbf{a}_k\}) \cup \{\mathbf{a}_\ell\}$$

e volte ao passo (1).

Lemas de Farkas

Resta mostrar que o processo acima termina (= é um algoritmo). Suponha o contrário e denote por D_s o conjunto D no início da s -ésima iteração. Como $\binom{m}{d}$ é finito, $D_s = D_t$ para algum $t > s$.

Dentre os elementos removidos de $D_s, D_{s+1}, \dots, D_{t-1}$ no passo (4), seja $\mathbf{a}_h$ o de maior índice e seja p a iteração de sua remoção. Como $D_s = D_t$, seja q a iteração em que $\mathbf{a}_h$ foi re-adicionado a D_q , com $s \leq p < q < t$. $\implies D_p \cap \{\mathbf{a}_{h+1}, \dots, \mathbf{a}_m\} = D_q \cap \{\mathbf{a}_{h+1}, \dots, \mathbf{a}_m\}$.

Sejam $D_p = \{\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_d}\}$, $\mathbf{b} = \lambda_{i_1} \mathbf{a}_{i_1} + \lambda_{i_2} \mathbf{a}_{i_2} + \dots + \lambda_{i_d} \mathbf{a}_{i_d}$, e $\mathbf{y}_q$ o vetor determinado no passo (2) da iteração q . Temos a contradição

$$0 > \mathbf{y}_q^\top \mathbf{b} = \lambda_{i_1} \mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_1} + \lambda_{i_2} \mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_2} + \dots + \lambda_{i_d} \mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_d} > 0,$$

pois por (2), $\lambda_{i_j} \geq 0$, $\mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_j} \geq 0$ se $i_j < h$; por (4), $\lambda_{i_j} < 0$, $\mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_j} < 0$ se $i_j = h$, e por h ser máximo, $\mathbf{y}_q^\top \mathbf{a}_{i_j} = 0$ se $i_j > h$. $\square$

Lemas de Farkas

O algoritmo iterativo acima é uma versão preliminar (ou disfarçada; depende do ponto de vista) do “famoso” algoritmo **Simplex** para PL, já equipado com uma regra anti-ciclagem:

A *regra de Bland*, que consiste em escolher k e ℓ mínimos nos passos (2) e (4) a cada iteração.

Sem uma regra anti-ciclagem (a de Bland, a **lexicográfica**, ou outras), o processo pode não terminar.

A escolha inicial de D e os passos (1) e (2) podem ser realizados via Eliminação Gaussiana (e em tempo polinomial se o poliedro for racional).

Mesmo com a regra de Bland, existem exemplos de pior caso em que o número de iterações pode ser exponencial em n . Falaremos mais sobre isso posteriormente.

Lemas de Farkas

A cada iteração, o conjunto D é uma base para o subespaço L . Isto dá origem ao conceito de solução básica no algoritmo **Simplex**.

Este e outros detalhes técnicos envolvendo inicialização, ilimitação e **degeneração** — que precisam ser tratados para um algoritmo funcional — serão endereçados após desenvolvermos as ferramentas adequadas para tal.

Enquanto isso, observe que a equivalência entre o Lema Farkas III e o Teorema Fundamental é imediata: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ são as colunas da matriz A .

Mais ainda, a prova do Teorema Fundamental fornece a prova de:

Corolário (Carathéodory: linear)

Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x} \in \text{cone}(X)$, então $\mathbf{x} \in \text{cone}(\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d\})$ para vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_d$ linearmente independentes em X .

Já a versão afim pode ser provada via **homogenização**.

Lemas de Farkas

Mostramos anteriormente que Farkas I $\implies$ Farkas III. Por consistência — e porque provamos Farkas III e não I — vamos mostrar a recíproca: que Farkas III $\implies$ Farkas I.

Prova. Considere a matriz $A' = (I \ A \ -A)$. Segue que $Ax \leq b$ tem uma solução x se e somente se $A'x' = b$ tem uma solução $x' \geq 0$ (verifique!), e a existência desta é garantida pelo Lema de Farkas III. $\square$

A seguinte versão afim será útil posteriormente.

Lema (Farkas IV: afim)

Suponha que $Ax \leq b$ é consistente e sejam c um vetor e δ um escalar. Temos que $c^\top x \leq \delta$ é válida para todo x em que $Ax \leq b$ se e somente se existe $y \geq 0$ tal que $y^\top A = c^\top$ e $y^\top b \leq \delta$.

Lemas de Farkas

Prova. Se um tal vetor $\mathbf{y}$ existe, para todo vetor $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, temos que $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} = \mathbf{y}^\top \mathbf{Ax} \leq \mathbf{y}^\top \mathbf{b} \leq \delta$, provando que $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \delta$ é válida.

Caso $\mathbf{y}$ não exista, o sistema linear nas variáveis $\mathbf{y}$ e $\nu \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbf{y}^\top \ \nu) \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{c}^\top \ \delta),$$

não tem solução não negativa: $(\mathbf{y}^\top \ \nu) \geq (\mathbf{0} \ 0)$. Aplicando Farkas I, temos então que existe um vetor $\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mu \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mu \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathbf{c}^\top \ \delta) \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mu \end{pmatrix} < (0 \ 0).$$

Temos dois casos a analisar.

Lemas de Farkas

Caso $\mu = 0$. Temos que $Az \geq 0$ e $c^\top z < 0$. Por hipótese, $Ax \leq b$ tem uma solução x_0 . Assim, para $\alpha \in \mathbb{R}$ grande o suficiente,

$$A(x_0 - \alpha z) \leq b \quad \text{e} \quad c^\top (x_0 - \alpha z) > \delta,$$

contradizendo o fato de que $Ax \leq b$ implica $c^\top x \leq \delta$.

Caso $\mu > 0$. Tomando $x = -\frac{1}{\mu}z$, temos que $Ax \leq b$ e $c^\top x < \delta$; novamente, uma contradição. $\square$

Neste ponto, você já pode ter percebido que a semente do conceito de dualidade forte entre PLs está contida no Lema de Farkas.

De fato, é possível provar o Teorema Forte de Dualidade utilizando o Teorema Fraco em conjunto com o Lema de Farkas IV (supondo que você provou o Lema de Farkas I à partir de Fourier-Motzkin). Esta foi a linha percorrida na lista de exercícios. Tomamos, aqui, um outro caminho: direto de Farkas I.