Formas de descrever um conjunto

Complemento ao Capítulo 2, seção 2.1

Na Seção 2.1, apresentamos duas formas de descrever conjuntos, a saber, a *enumerativa* e a *predicativa*. Com o tempo, percebemos que algumas descrições do tipo enumerativo mereceriam maior destaque, compondo uma terceira forma descritiva. Essa forma será aqui chamada de *construtiva* e será bastante utilizada no decorrer do livro.

Descrição construtiva de um conjunto

Lembremos o significado das duas formas descritivas que já conhecemos: a descrição enumerativa consiste simplesmente em elencar os elementos do conjunto, enquanto que a descrição predicativa consiste em explicitar a(s) propriedade(s) que caracteriza(m) os elementos do conjunto, dentro de um determinado domínio de referência. A descrição construtiva, por sua vez, consiste em *apresentar os elementos de um conjunto através de expressões que envolvem variáveis.* Assim como na descrição predicativa, a descrição construtiva envolve a concorrência de duas condições: i) uma expressão (em geral algébrica) envolvendo uma ou mais variáveis; ii) os domínios que descrevem os valores possíveis para cada uma das variáveis. O formato geral da descrição construtiva é

$$\{\text{expressão com variáveis} \mid \text{domínio das variáveis}\}.$$

Um conjunto descrito na forma acima deve ser entendido, portanto, como sendo o conjunto formado pelos elementos que correspondem à expressão dada à esquerda da barra vertical "|", quando tomamos as variáveis dentro dos domínios estipulados à direita da barra "|". Vejamos alguns exemplos que devem ajudar a tornar claro o sentido do exposto acima:

- $A = \{2n + 1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$
- $B = \{2n + 1 \,|\, n \in \mathbb{N} \,\text{e}\, n \geq 10\}$
- $C = \{\frac{n}{m} \,|\, n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z}^*\}$
- $D = \{\sqrt{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

Analisando os exemplos acima, vemos que o conjunto A é o conjunto dos números na forma $2n+1$, onde n é um qualquer número inteiro. Em outras palavras, o conjunto A é o conjunto de todos os números inteiros ímpares (positivos e negativos). O conjunto B também é constituído pelos números na forma $2n + 1$, mas dessa vez a variável n só pode assumir valores inteiros maiores ou iguais a 10. Desse modo, percebemos que o conjunto B é o conjunto de todos os números inteiros ímpares maiores ou iguais a 11. Se quisermos descrever esses dois conjuntos na forma enumerativa e na predicativa, poderíamos fazer assim:

- $A = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ (forma enumerativa)
- $A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ é ímpar}\}$ (forma predicativa)

- $B = \{11, 13, 15, 17, \dots\}$ (forma enumerativa)
- $B = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \text{ é ímpar e } n \geq 11\}$ (forma predicativa)

O conjunto C é constituído por todos os números na forma $\frac{n}{m}$, onde n é qualquer número inteiro (seu domínio é $\mathbb{Z}$) e m é qualquer número inteiro não nulo (seu domínio é $\mathbb{Z}^*$). Ou seja, o conjunto C nada mais é que o conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, e que é constituído, como sabemos, por todas as razões possíveis entre números inteiros (com denominador diferente de zero). Nesse caso, tanto a descrição enumerativa quanto a predicativa de $\mathbb{Q}$ seriam indesejavelmente complicadas (embora possíveis), sendo a descrição construtiva inquestionavelmente a melhor.

Quanto ao conjunto D, poderíamos descrevê-lo nas outras duas formas como se segue:

- $D = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \dots\}$ (forma enumerativa)
- $D = \{x \in \mathbb{R}^+ \,|\, x^2 \in \mathbb{N}\}$ (forma predicativa)