Lista 1 - Sequências e Séries (Última versão: 21/2/2018)

Sequências Numéricas

1 — Verifique os seguintes limites

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{5n} = \frac{2}{5}$

e) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, em que $0 < a < 1$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

2 — Mostre que as sequências abaixo são divergentes. Determine, justificando, se são monótonas ou limitadas.

a) $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left(\frac{(1+(-1)^n)n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c) $\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ em que $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$ é a função *parte inteira*

d) $\left(\text{sen}(\frac{n\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

e) $\left(n\ \text{sen}(\frac{n\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3 — Prove que, se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$

4 — Prove que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

5 — Prove que se (a_n) converge, então $(|a_n|)$ converge. Determine, nesse caso, $\lim |a_n|$. Vale a recíproca?

6 — Seja dada uma sequência convergente (a_n). Discuta (justificando) as seguintes afirmações:

a) $a_n \geq a, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim a_n \geq a$.

b) $a_n > a, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim a_n > a$.

c) $a_n > a, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim a_n \geq a$.

7 — Encontre uma fórmula para o termo geral das sequências seguintes:

a) $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\}$

b) $\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\}$

c) $\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \frac{32}{81}, \ldots\}$

d) $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$

e) $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots\}$

f) $\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\}$

8 — Considere as sequências recursivas definidas abaixo. Para cada uma delas, mostre que é convergente e encontre o limite (para essa segunda parte, veja sugestão para cada item no gabarito).

a) $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_0 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{1+b_n}$

9 — Seja dada a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$x_0 = 1, x_1 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$$

Mostre que (x_n) é convergente e determine seu limite.

Respostas dos Exercícios

2 b.) limitada inferiormente, não monótona
c.) limitada inferiormente, não decrescente
d.) limitada, não monótona

7 c.) $a_n = (-1)^{n+1}2^n3^{1-n}$, $n \in \mathbb{N}$
d.) $a_n = 3n + 2$, $n \geq 1$
e.) $a_n = cos(n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$
f.) $a_n = (-1)^n n^2/(n+1)$

8 a.) Sugestão: se a denota o limite da sequência (a_n), mostre que a é raiz da equação $\sqrt{1+a} = a$
b.) Sugestão: se b denota o limite da sequência (b_n), mostre que a é raiz da equação $\frac{1}{1+b} = b$