Lista 2 - Sequências e Séries (Última versão: 2/3/2018)

Sequências Numéricas

1 — Se (a_n) é convergente, mostre que para todo $k \in \mathbb{N}$ fixado, $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim a_n$.

2 — Dado $k \in \mathbb{R}$ com $0 < k < 1$, seja $a_n = 1 + k + k^2 + k^3 + \cdots k^n = \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (a_n) é crescente e limitada e conclua que (a_n) converge. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

3 — Verifique os seguintes limites a partir da definição

a) $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} -n^2 = -\infty$

4 — Mostre que se (a_n) é uma sequência crescente que não é limitada superiormente então $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5 — Dê um exemplo de uma sequência que não é limitada, mas que não possui limite infinito.

6 — Prove que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty$.

7 — Dada uma sequência (a_n), mostre que se $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, então $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.

8 — Dada uma sequência (a_n), mostre que

a) Se $(|a_n|)$ é convergente, então (a_n) possui uma subsequência convergente.

b) (a_n) *não* possui subsequências convergentes se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

9 — Para as seguintes sequências calcule os seus 5 primeiros termos, determine se elas são limitadas superiormente e inferiormente, se são limitadas, crescentes ou decrescentes. E se existir, calcule os limites. Prove suas afirmações.

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{3^{n+2}}{5^n}$

c) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

d) $a_n = (-1)^n n!$

e) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{2})$

f) $a_n = na^n$ com $|a| < 1$

g) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$

h) $a_n = n^{(-1)^n}$

i) $a_n = ln(n+1) - ln(n)$

j) $x_n = (1 + \frac{2}{n})^n$

k) $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$

l) $x_n = 2^{\frac{1}{n}}$

m) $y_n = \frac{\log_a n}{n}$

n) $z_n = \frac{n^3+n^2+1}{n^2-12}$

o) $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Respostas dos Exercícios