Lista 3 - Sequências e Séries (Última versão: 20/3/2018)

Séries Numéricas

1 — Mostre que se a sequência (a_n) é tal que $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ e $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = a$ então $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

2 — Mostre que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = 1$

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+\frac{1}{n})^n(1+n))}{\log(n^n)\log(n+1)^{n+1}} = \log_2 \sqrt{e}$

3 — Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é tal que a soma parcial dos n primeiros termos é $s_n = \frac{n-1}{n+1}$, encontre a_n e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4 — Teste as seguintes séries para convergência ou divergência. Prove suas afirmações.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\log(4n+1)}{n(n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(\mathrm{nx})|}{n^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt[n]{n+1}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}dx$

5 — Encontre os valores (positivos) de b para os quais a série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln(n)}$ converge.

6 — Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ também convergem.

7 — Sejam (a_n) e (b_n) tais que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.

8 — Mostre que se $a_n > 0$ e $\lim_{n\to\infty} na_n > 0$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

9 — Teste as seguintes séries para convergência ou divergência.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - e^{-n^2})$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} r^n|\sin(nx)|$ com $r > 0$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

m) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$

n) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$

o) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

10 — Para que valores de p a série converge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^p}$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))^p}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$

11 — Mostre que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

12 — Teste as seguintes séries alternadas para convergência ou divergência. Quais séries convergem absolutamente?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\sqrt{n})}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n^r)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$

g) $1 - \frac{2!}{1\cdot 3} + \frac{3!}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{4!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$

h) $\frac{1}{3} - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 5} + \ldots \frac{1\cdot 4\cdot 7 \ldots (3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n+1)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n n!}{5\cdot 8\cdot 11\cdot \ldots \cdot (3n+2)}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg}(n)}{n^3}$

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\operatorname{arctg}(n))^n}$

13 — Estime as séries com o erro pedido

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ com precisão de $0,01$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ com precisão de $0,01$

14 — Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série com termos positivos e seja $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, e assim converge pelo teste da razão. Seja $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ o resto depois de k-termos.

a) Se r_n for uma sequência decrescente e $r_{n+1} < 1$. Mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

b) Se r_n for uma sequência crescente mostre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

c) Calcule a soma parcial s_5 da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$. Estime o erro cometido nessa aproximação.

d) Calcule o valor de k tal que s_k aproxima a série com precisão $0,00005$.

Respostas dos Exercícios

2 **a.)** Dica: escreva o termo geral como soma de frações parciais.
e.) Dica: observe que o termo geral se escreve como $\frac{1}{n\,\ln n} - \frac{1}{(n+1)\,\ln(n+1)}$

3 $a_1 = 0; a_n = \frac{2}{n(n+1)}, n \geq 2$

5 $\frac{1}{e} < b < 1$ $\quad$ Dica : observe que $b^{\ln n} = n^{\ln b}$