Lista 4 - Sequências e Séries (Última versão: 23/4/2018)

Sequências e Séries de Funções

1 — Se $\big(f_n(x)\big)$ e $\big(g_n(x)\big)$ convergem uniformemente em I, prove que $\big((f_n + g_n)(x)\big)$ converge uniformemente em I.

2 — Se $\big(f_n(x)\big)$ é uma sequência de funções limitadas que converge uniformemente, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq c$ para todo n e para todo x.

3 — Se $\big(f_n(x)\big)$ e $\big(g_n(x)\big)$ convergem uniformemente em I e se tais sequências são limitadas, prove que $\big((f_n g_n)(x)\big)$ converge uniformemente em I.

4 — Mostre que uma sequência monótona de funções que possui uma subsequência uniformemente convergente, converge uniformemente. (Atenção: uma sequência monótona de funções é *diferente* de uma sequência de funções monótonas!)

5 — Mostre que se a série $\sum f_n$ converge uniformemente em I, então a sequência $f_n(x)$ converge a 0 uniformemente em I.

6 — Enuncie o Teste de Weierstrass e utilize-o para verificar a convergência uniforme das seguintes séries nos conjuntos dados.

a) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ em $[a, b]$

b) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos(nx)$ em $\mathbb{R}$

c) $\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \ldots$ em $\mathbb{R}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$ para $-1 < x < 1$

7 — Seja $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ para $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Por que isso ocorre? Justifique.

8 — Seja dada a função $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}$$

em que $D \subset [0, \infty)$ é o conjunto em que a série acima converge.

a) Determine o conjunto D e os conjuntos em que a série acima converge uniformemente.

b) Determine o conjunto no qual $f(x)$ é contínua e verifique se $f(x)$ é limitada.

9 — Se o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$ é r, qual o raio de convergência de $\sum a_n x^{2n}$?

10 — Mostre que uma série de potências com intervalo de convergência $(x_0 - r, x_0 + r)$ converge uniformemente em todo intervalo fechado da forma $[x_0 - s, x_0 + s]$ tal que $0 < s < r$.

11 — Prove que, para $|x| < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1 - x}$$

12 — A partir do Exercício 11, mostre que, para $|x| < 1$,

a) $1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$.

b) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$

c) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \ln(1 + x)$

d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \arctan(x)$

13 — Mostre a partir das identidades obtidas nos Exercícios 11 e 12:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

14 — Para cada série de potência abaixo determine seus intervalos de convergência e calcule as somas das séries.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}$

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+2)!}$

Respostas dos Exercícios

6 a.) $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{c^n}{n!}$, em que $c = \max\{|a|, |b|\}$
c.) $\left|\frac{\cos(nx)+\text{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2}$

7 A sequência em questão converge para a função constante igual a 0, mas não converge uniformemente. Dica (para a justificativa dessa afirmação): verifique que cada função da sequência possui um ponto de máximo e que a sequência dos valores máximos diverge para $+\infty$.

9 $\sqrt{r}$

14 Dica: use as séries já calculadas.
a.) $\frac{1}{1+x^2}$
b.) $\frac{1}{3-x}$
c.) $\frac{x}{1-x^2}$
d.) $\ln \frac{1}{1-2x}$
e.) $\frac{1}{x^3}(e^x - 1 - x - \frac{x}{2})$
f.) $\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$