# Lista 5 - Sequências e Séries (Última versão: 14/5/2018)

## Séries de Taylor. Solução de EDOs por séries

**1** — Calcule o polinômio de Taylor de grau $n$ para as seguintes funções. Escreva as expressões para o erro.

a) $\sinh(x)$

b) $\cosh(7x)$

c) $a^x$

d) $a^{x^{25}}$

e) $\frac{1}{1+x}$

f) $\log(1+x)$

g) $\log(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$

h) $\cos^2(7x^{16})$

i) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ $\quad (|x| < 1/2)$

j) $(1+x)^\alpha$ com $\alpha$ real

**2** — Em cada caso abaixo, aproxime $f$ pelo polinômio de Taylor $T_n f(x)$ de grau $n$ em $x_0$. Estime a precisão da aproximação $f(x) \approx T_n f(x)$ quando $x$ está no intervalo dado.

a) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \pi/6,\ n = 4,\ 0 \leq x \leq \pi/3$

b) $f(x) = x \ln x,\ x_0 = 1,\ n = 3,\ 0,5 \leq x \leq 1,5$

**3** — Para cada um dos itens abaixo, encontre a série de Taylor da função em $0$. Exiba um intervalo, se existir, no qual a série converge para a função.

a) $f(x) = \sinh x$

b) $f(x) = \cosh x$

c) $f(x) = \sqrt{8+x}^3$

d) $f(x) = \frac{1}{(2+x)}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

f) $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

**4** — Exprima a solução geral de cada uma das equações seguintes como uma série de potências em torno de $x = 0$

a) $y'' + y = 0$

b) $y''' - 3xy' - y = 0$

c) $\left(x^2 + 1\right) y'' - 8xy + 15y = 0$

d) $y''' + 3x^2 y'' - 2y = 0$

**5** — Resolva o seguinte problema de valor incicial:

$$y' + xy' - 2y = \ e; \qquad y(0) = 0 \,\mathrm{e}\, y'(0) = 0$$

(Dica: expanda $e^x$ em série de potências).

**6** — Para as funções seguintes, determine o raio de convergência para as séries e se $f$ satisfaz as equações indicadas:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n!)}, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = y$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}, \qquad xy'' + y' - y = 0$

c) $f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{(3n)!} x^{3n}, \qquad y'' = x^\alpha y + b$ (ache $\alpha$ e $b$)

**7** — Discuta a equação de Bessel de ordem $\nu$ com $\nu \in \mathbb{R}$.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

utilizando o método de Frobenius.

**8** — Mostre que

$$y(x) = x^2 + x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdots (4k+3)}$$

é solução de $2x^2 y'' + (x^3 - 3x) y' + 2y = 0$.

**9** — Resolva a equação

a) $4xy'' + 2(1 - x) y' - y = 0$

b) $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$