Unidades 1 e 2

Conjuntos

Sumário

1.1 Introdução 2
1.2 A Noção de Conjunto 3
1.3 A Relação de Inclusão 5
1.4 O Complementar de um Conjunto 12
1.5 Reunião e Interseção 16
1.6 Exercícios Recomendados 19
1.7 Exercícios Suplementares 20
1.8 Textos Complementares 24

1.1 Introdução

Em muitos casos, livros didáticos de Matemática do ensino básico introduzem determinados assuntos (tipicamente, funções) com uma linguagem fortemente baseada em conjuntos, que é subitamente abandonada em seguida. Tais inconsistências de linguagem podem atrapalhar consideravelmente a aprendizagem. Assim, é fundamental para o professor saber adequar a linguagem e a notação de conjuntos para o nível em que está ensinando, evitando imprecisões, por um lado, e exageros de formalismo, por outro.

A noção de conjunto pode ser construída por meio de um sistema de axiomas específico. Entretanto, apresentar essa construção escaparia ao escopo e aos propósitos deste contexto. O objetivo desta unidade é introduzir a linguagem básica de conjuntos, sem se aprofundar em Teoria de Conjuntos. Em particular, visamos evidenciar as relações entre a linguagem básica da álgebra de conjuntos com a linguagem básica de lógica matemática de proposições. Assim, vamos assumir o conceito *conjunto* como uma noção primitiva, sem definição. Podemos, neste caso, simplesmente pensar em um conjunto como estamos acostumados, a saber, como sendo formado por seus elementos. Partindo desta noção primitiva sem definição, definiremos os outros conceitos e demonstraremos os principais teoremas associados. Para aqueles que quiserem se aprofundar mais em Teoria de Conjuntos, recomendamos a leitura de [5].

Para o professor, é fundamental o conhecimento da linguagem de conjuntos, uma vez que esta forma a base comum a todos os campos da Matemática atual. Este conhecimento é importante, mesmo para que se saiba adequar o grau de formalismo da linguagem de conjuntos a cada série da educação básica. Por exemplo, mesmo para usar com segurança em sala de aula o "abuso de notação" $r \cap s = P$, quando se fala do ponto de interseção entre duas retas (veja a *Reflexão* da p. 5), é preciso ter claro por que a versão rigorosamente correta seria $r \cap s = \{P\}$. Para isto, deve-se lidar confortavelmente com as relações entre conjuntos e entre elementos e conjuntos. Assim, ao estudar esta unidade, procure prestar particular atenção em como a linguagem de conjuntos pode facilitar a expressão do raciocínio dedutivo matemático.

1.2 A Noção de Conjunto

Toda a Matemática atual é formulada na linguagem de conjuntos. Portanto, a noção de conjuntos é a mais fundamental: a partir dela, todos os conceitos matemáticos podem ser expressos. Ela é também a mais simples das ideias matemáticas.

Um conjunto é formado por elementos. Na verdade, podemos dizer mais do que isso. Um conjunto *é definido* por seus elementos (e nada mais). Este fato se reflete claramente na noção de igualdade entre conjuntos: dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmos elementos. Isto é, não pode haver dois conjuntos diferentes que tenham os mesmos elementos. Em Teoria de Conjuntos, esta propriedade corresponde ao chamado *Axioma da Extensão* (para saber mais, veja [5]).

Dados um conjunto A e um objeto qualquer a, a única pergunta cabível é se *a é ou não um elemento do conjunto A?* Esta pergunta só admite duas respostas possíveis: *sim* ou *não*. No caso afirmativo, diz-se que a *pertence* ao conjunto A e escreve-se $a \in A$. Caso contrário, diz-se que a *não pertence* ao conjunto A e põe-se $a \notin A$.

Em Matemática, qualquer afirmação é *verdadeira ou falsa*, não pode haver um terceira opção, e nem as duas ao mesmo tempo. Estes fatos básicos são conhecidos como *Princípio do Terceiro Excluído* e *Princípio da Não Contradição* e estão na base da estrutura lógica da Matemática. Diferentemente do que ocorre com outras modalidades de lógica (como as que empregamos informalmente no dia a dia), para avaliar a veracidade de uma afirmação matemática, não há outras variações possíveis de respostas, tais como *mais ou menos*, *depende* ou *às vezes*.

☞ Na Sala de Aula - Afirmações "Sempre Verdadeiras" - Clique para ler

A Matemática se ocupa primordialmente de números e do espaço. Portanto, os conjuntos mais frequentemente encontrados na Matemática (especialmente na Matemática do ensino básico) são os conjuntos numéricos, as figuras geométricas (que são conjuntos de pontos) e os conjuntos que se derivam destes, como os conjuntos de funções, de matrizes etc.

A linguagem dos conjuntos, hoje universalmente adotada na apresentação da Matemática, ganhou esta posição porque permite dar aos conceitos e às proposições desta ciência a precisão e a generalidade que constituem sua característica básica. Os conjuntos substituem as "propriedades" e as "condições". Assim, em vez de dizermos que "o objeto x tem a propriedade P" ou o "objeto y satisfaz a condição Q", podemos escrever $x \in A$ e $y \in B$, em que A é o conjunto dos objetos que têm a propriedade P e B é o conjunto dos objetos que satisfazem a condição Q.

Por exemplo, sejam P a propriedade de um número inteiro x ser par (isto é, divisível por 2) e Q a condição sobre o número real y expressa por $y^2-3y+2=0$. Por outro lado, sejam

$$A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\} \quad \text{e} \quad B = \{1, 2\}.$$

Então, dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q é o mesmo que afirmar que $x \in A$ e $y \in B$.

A esse respeito, uma pergunta fundamental para entender a importância da linguagem de conjuntos é a seguinte: *Qual é a vantagem que se obtém quando se prefere dizer que $x \in A$ e $y \in B$, em vez de dizer que x tem a propriedade P e y satisfaz a condição Q?*

A vantagem de se utilizar a linguagem e a notação de conjuntos é que entre estes existe uma álgebra, montada sobre as operações de reunião $(A \cup B)$ e interseção $(A \cap B)$, além da relação de inclusão $(A \subset B)$. As propriedades e regras operatórias dessa álgebra, como por exemplo,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \subset A \cup B,$$

não são difíceis de manipular e representam um enorme ganho em simplicidade e exatidão quando comparadas ao manuseio de propriedades e condições. Por exemplo, mostrar que um conjunto está contido em outro equivale a mostrar que a propriedade que define o primeiro implica na propriedade que define o segundo $(P \Rightarrow Q)$; e aplicar a propriedade antissimétrica da inclusão de conjuntos para demonstrar a igualdade entre conjuntos (se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$) equivale a demonstrar a equivalência entre as condições que os definem $(P \Leftrightarrow Q)$. Essa discussão será aprofundada nas Seções 1.3, 1.4 e 1.5, a seguir.

Existe um conjunto excepcional e intrigante: o conjunto vazio, designado pelo símbolo $\varnothing$. Ele é aceito como conjunto porque cumpre a utilíssima função de simplificar as proposições, evitando uma longa e tediosa menção de exceções. Qualquer propriedade contraditória serve para definir o conjunto vazio. Por exemplo, tem-se $\varnothing = \{x \,;\, x \neq x\}$, ou seja, $\varnothing$ é o conjunto dos objetos x tais que x é diferente de si mesmo. Seja qual for o objeto x tem-se sempre $x \notin \varnothing$. Em muitas questões matemáticas é importante saber que um determinado conjunto X não é vazio. Para mostrar que X não é vazio, deve-se simplesmente encontrar um objeto x tal que $x \in X$. Outros conjuntos curiosos são os conjuntos unitários. Dado um objeto x qualquer, o conjunto unitário $\{x\}$ tem como único elemento esse objeto x. Estritamente falando, x e $\{x\}$ não são a mesma coisa.

☞ Na Sala de Aula - Clareza e Rigor - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - O Conjunto Vazio - Clique para ler

1.3 A Relação de Inclusão

DEFINIÇÃO 1

Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é um *subconjunto* de B, que A *está contido* em B, ou que A é *parte* de B. Para indicar este fato, usa-se a notação $A \subset B$.

A relação de $A \subset B$ chama-se *relação de inclusão*. Quando A não é um subconjunto de B, escreve-se $A \not\subset B$. Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, que existe pelo menos um objeto a tal que $a \in A$ e $a \notin B$.

EXEMPLO 1

(a) Sejam T o conjunto dos triângulos e P o conjunto dos polígonos do plano. Todo triângulo é um polígono, logo $T \subset P$.

(b) Sejam A o conjunto dos números pares e B o conjunto dos múltiplos de 3. Tem-se $A \not\subset B$ porque $2 \in A$ mas $2 \notin B$. Tem-se também $B \not\subset A$ pois $3 \in B$ mas $3 \notin A$.

☞ Para Saber Mais - A Relação de um Elemento Pertencer a um Conjunto e a Inclusão - Clique para ler

EXEMPLO 2 Em Geometria, uma reta, um plano e o espaço são conjuntos. Seus elementos são pontos.

Quando dizemos que uma reta r está no plano Π, estamos afirmando que r está contida em Π, ou equivalentemente, que r é um subconjunto de Π, pois todos os pontos que pertencem a r pertencem também a Π.

Neste caso, deve-se escrever $r \subset \Pi$. Porém, não é correto dizer que r pertence a Π, nem escrever $r \in \Pi$. Os elementos do conjunto Π são pontos e não retas.

Há duas inclusões extremas. A primeira é obvia: para todo conjunto A, vale $A \subset A$ (pois é claro que todo elemento de A pertence a A). A outra é, no mínimo, curiosa: tem-se $\varnothing \subset A$, seja qual for o conjunto A. Com efeito, se quiséssemos mostrar que $\varnothing \not\subset A$, teríamos que obter um objeto x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin A$. Como $x \in \varnothing$ é impossível, somos levados a concluir que $\varnothing \subset A$, ou seja, que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer outro.

Diz-se que A é um *subconjunto próprio* de B quando A é subconjunto de B e a inclusão não corresponde a nenhum desses dois casos extremos, isto é, quando se tem $A \subset B$ com $A \neq \varnothing$ e $A \neq B$.

A relação de inclusão tem três propriedades fundamentais. Dados quaisquer conjunto A, B e C tem-se:

(i) *reflexividade*: $A \subset A$;

(ii) *antissimetria*: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

(iii) *transitividade*: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A propriedade antissimétrica é constantemente usada nos raciocínios matemáticos. Quando se deseja mostrar que os conjuntos A e B são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A. Na realidade, a propriedade antissimétrica da relação de inclusão contém, nela embutida, a condição de igualdade entre os conjuntos: os conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Por sua vez, a propriedade transitiva da inclusão é a base do raciocínio dedutivo, sob a forma que classicamente se chama de *silogismo*. Um exemplo de silogismo (tipicamente aristotélico) é o seguinte: *todo ser humano é um animal, todo animal é mortal, logo todo ser humano é mortal*. Na linguagem de conjuntos, isso seria formulado assim: sejam H, A e M respectivamente os conjuntos dos seres humanos, dos animais e dos mortais. Temos $H \subset A$ e $A \subset M$, logo $H \subset M$. Voltaremos a esse assunto mais a diante (p. 10).

A relação de inclusão entre conjuntos está estreitamente relacionada com a implicação lógica. Vejamos como. Sejam P e Q propriedades aplicáveis a elementos de um conjunto U. Essas propriedades definem os conjuntos A, formado pelos elementos de U que gozam de P; e B, formado pelos elementos de U que têm a propriedade Q. Se todos os elementos que possuem a propriedade P também têm a propriedade Q, dizemos que a propriedade P *implica* (ou *acarreta*) a propriedade Q e escrevemos $P \Rightarrow Q$. Isto é equivalente a dizer que todo elemento que pertence a A também pertence a B, isto é, que $A \subset B$.

Exemplo 3

Seja U o conjunto dos quadriláteros convexos do plano. Designemos com R a propriedade de um quadrilátero ter seus quatro ângulos retos e por P a propriedade de um quadrilátero ter seus lados opostos paralelos (isto é, ser paralelogramo). Então podemos escrever $R \Rightarrow P$. Neste caso, A é o conjunto dos retângulos e B é o conjunto dos paralelogramos, logo $A \subset B$.

Exemplo 4

Podemos escrever a implicação

$$\text{Para todo } x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Ela significa que toda raiz da equação $x^2 + x - 1 = 0$ é também raiz de

$$x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Há diferentes maneiras de se ler a relação $P \Rightarrow Q$. Pode-se dizer P *implica* Q, *se* P *então* Q, P *é condição suficiente para* Q, Q *é condição necessária para* P ou P *somente se* Q.

Assim, a relação do Exemplo 3 pode ser expressa de diversas formas equivalentes: *ser retângulo implica ser paralelogramo*, *se x é um retângulo então x é um paralelogramo*, *ser retângulo é condição suficiente para ser paralelogramo*, *ser paralelogramo é condição necessária para ser retângulo*, ou, finalmente, *todo retângulo é um paralelogramo*.

A compreensão dos significados do termo *necessário* e do termo *suficiente* em Matemática é de fundamental importância. Em uma implicação:

$$P \Rightarrow Q$$

dizemos que a condição P é *suficiente* para a condição Q, ou, de forma equivalente, que a condição Q é *necessária* para a condição P.

Não é incomum confundir esses significados. Os termos "necessário" e "suficiente" em Matemática têm significados específicos, que podem diferir da forma como os entendemos em linguagem cotidiana. Isto pode se constituir em um obstáculo para a aprendizagem. Entender o que significa "suficiente" pode ser relativamente mais fácil, uma vez que este termo é sinônimo de "bastante". Talvez isso tenha a ver com o fato de que uma condição suficiente é geralmente mais forte do que a conclusão a que se quer chegar. Por outro lado, uma condição necessária é, em geral mais fraca do que a conclusão. Observe atentamente os exemplos a seguir.

EXEMPLO 5

Sabemos que o conjunto dos números $n \in \mathbb{Z}$ que são múltiplos de 4 está contido no conjunto dos números pares. Isto é, todo múltiplo de 4 é par. Por outro lado, nem todo par é múltiplo de 4. Podemos expressar essas afirmações na forma de implicações lógicas:

$$n \textit{ múltiplo de } 4 \;\Rightarrow\; n \textit{ par} \qquad \textit{e} \qquad n \textit{ par} \;\not\Rightarrow\; n \textit{ múltiplo de } 4.$$

Em outras palavras, para que um número n seja par *é suficiente* que n seja múltiplo de 4. Ou, de forma equivalente, *basta* ser múltiplo de 4 para ser par. Por outro lado, um número pode ser par sem ser múltiplo de 4, isto é, não é necessário ser múltiplo de 4 para ser par. Assim, *ser múltiplo de 4 é suficiente, mas não necessário para ser par*.

Podemos ainda expressar esta afirmação de outra forma equivalente: *ser par é necessário, mas não suficiente para ser múltiplo de 4*.

Exemplo 6

Todo retângulo possui lados opostos paralelos. Porém, existem quadriláteros convexos com lados opostos paralelos que não são retângulos. Assim, para que um quadrilátero convexo Q seja um retângulo é necessário que seus lados opostos sejam paralelos, mas esta propriedade apenas não assegura que Q tenha ângulos todos retos.

Portanto, *ter lados opostos paralelos é uma condição necessária, mas não suficiente, para que um quadrilátero seja retângulo*. Equivalentemente, *ser retângulo é uma condição suficiente, mas não necessária, para que um quadrilátero tenha lados opostos paralelos*. Ou ainda,

Q é retângulo $\Rightarrow$ Q tem lados opostos paralelos,

e

Q tem lados opostos paralelos $\not\Rightarrow$ Q é retângulo.

A implicação $Q \Rightarrow P$ chama-se a *recíproca* de $P \Rightarrow Q$. Evidentemente, a recíproca de uma implicação verdadeira pode ser falsa. Como já observamos, este é o caso dos Exemplos 5 e 6.

No Exemplo 4, a recíproca da implicação também é falsa. De fato, $x = 1$ é raiz da equação $x^3 - 2x + 1 = 0$, mas não da equação $x^2 + x - 1 = 0$. Portanto, para $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \;\not\Rightarrow\; x^2 + x - 1 = 0.$$

Quando são verdadeiras ambas as implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, dizemos *P se, somente se, Q*, ou que *P é equivalente a Q* ou, ainda, que *P é necessário e suficiente para Q*. Neste caso, escreve-se

$$P \Leftrightarrow Q.$$

Em linguagem de conjuntos, isto significa que o conjunto dos elementos que têm a propriedade P *é igual* o conjunto dos elementos que têm a propriedade Q.

Exemplo 7

Sejam P a propriedade de um triângulo, cujos lados medem $x, y < z$, ser retângulo e Q a propriedade de valer $z^2 = x^2 + y^2$. Então $P \Leftrightarrow Q$.

☞ Para Saber Mais - Provas por Contrapositiva - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Definições - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - Definições - Clique para ler

Como já comentamos (p. 7), a propriedade transitiva da inclusão de conjuntos constitui a base do raciocínio dedutivo em Matemática. De fato, esta propriedade pode ser expressa em termos de implicações lógicas. Se P, Q e R são três afirmações, temos:

$$\text{Se } P \Rightarrow Q \text{ e } Q \Rightarrow R, \text{ então } P \Rightarrow R.$$

A propósito, a resolução de uma equação é um caso típico em que se tem uma sequência de implicações lógicas.

EXEMPLO 8

Para resolver a equação $x^2 - x - 2 = 0$, podemos seguir os passos abaixo:

$$\begin{array}{ll} (P) & x^2 - x - 2 = 0; \\ (Q) & (x-2)(x+1) = 0; \\ (R) & x = 2 \text{ ou } x = -1; \\ (S) & x \in \{2, -1\}. \end{array}$$

Se chamarmos respectivamente de P, Q, R e S as condições impostas sobre o número x em cada uma das linhas acima, os passos que acabamos de seguir significam que

$$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S.$$

Isto é, se o número x satisfaz P então satisfaz Q e assim por diante. Por transitividade, a conclusão a tirar é $P \Rightarrow S$, ou seja,

$$\text{Se } x^2 - x - 2 = 0, \text{ então } x \in \{2, -1\}.$$

No exemplo acima, estritamente falando, a afirmação a que chegamos não significa que as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$ são 2 e -1. O que está dito acima é que se houver raízes desta equação elas devem pertencer ao conjunto

$\{2, -1\}$. No caso desse exemplo, não é difícil ver que todos os passos acima podem ser revertidos. Isto é, valem as implicações recíprocas $S \Rightarrow R \Rightarrow Q \Rightarrow P$. Logo, $S \Rightarrow P$. Concluímos que $P \Leftrightarrow S$, ou seja, 2 e -1 são de fato as (únicas) raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$.

Quando se resolve uma equação, é importante ter em mente que cada passo do processo representa uma implicação lógica. Pode acontecer dessas implicações não poderem ser revertidas, isto é, de suas recíprocas não serem verdadeiras. Nesses casos, o conjunto obtido no final apenas contém (mas não é igual a) o conjunto das raízes – este último, podendo até mesmo ser vazio. Ilustremos esta possibilidade com um exemplo.

EXEMPLO 9

Considere a equação $x^2 + 1 = 0$. Sabemos que ela não possui soluções reais. Na sequência abaixo, cada uma das letras P, Q, R e S representa a condição sobre o número x expressa na igualdade ao lado:

(P) $x^2 + 1 = 0$ *(multiplicando por $x^2 - 1$);*
(Q) $x^4 - 1 = 0$;
(R) $x^4 = 1$;
(S) $x \in \{-1, 1\}$.

Evidentemente, tem-se $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow S$, logo $P \Rightarrow S$. Ou seja, toda raiz real da equação $x^2 + 1 = 0$ pertence ao conjunto $\{-1, 1\}$.

O raciocínio é absolutamente correto. Porém, a conclusão que se pode tirar é que, *se* houver raízes reais da equação $x^2 + 1 = 0$, então elas pertencerão ao conjunto $\{-1, 1\}$ – e nada mais.

Na verdade, a implicação $P \Rightarrow Q$ não pode ser revertida: sua recíproca é falsa. Sabemos que o conjunto das soluções reais da equação é vazio. Assim, a dedução acima apenas ilustra o fato de que $\varnothing \subset \{-1, 1\}$. Como sabemos, o conjunto vazio está contido em qualquer outro!

☞ Na Sala de Aula - Implicações Lógicas e Resolução de Equações - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Provas por Vacuidade - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - A Ciência das Condições Necessárias - Clique para ler

1.4 O Complementar de um Conjunto

A noção de complementar de um conjunto só faz pleno sentido quando se fixa um conjunto U, chamado o *universo do discurso*, ou *conjunto-universo*. O universo U pode ser visto como o assunto da discussão ou o tema em pauta: *estaremos falando somente dos elementos de U*. Uma vez fixado U, todos os elementos a serem considerados pertencerão a U e todos os conjuntos serão subconjuntos de U, ou derivados destes. Por exemplo, na Geometria Plana, U é o plano; na teoria aritmética da divisibilidade, U é o conjunto dos números inteiros.

DEFINIÇÃO 2 Dado um conjunto A (isto é, um subconjunto de U), chama-se *complementar* de A ao conjunto $A^{\mathcal{C}}$ formado pelos objetos de U que não pertencem a A.

Uma propriedade imediata do complementar é a seguinte:

$$U^{\mathcal{C}} = \varnothing \qquad \text{e} \qquad \varnothing^{\mathcal{C}} = U.$$

Lembramos que, uma vez fixado o conjunto A, para cada elemento x em U, vale uma, e somente uma, das alternativas: $x \in A$, ou $x \notin A$. Como já observamos, o fato de que, para todo $x \in U$, não existe uma outra opção além de $x \in A$ ou $x \notin A$ é conhecido em lógica como o *Princípio do Terceiro Excluído*; e o fato de que as alternativas $x \in A$ e $x \notin A$ não podem ser ambas verdadeiras ao mesmo tempo chama-se o *Princípio da Não Contradição*.

Desses Princípios, decorrem as regras operatórias básicas referentes ao complementar:

(i) Para todo conjunto $A \subset U$, tem-se $\left(A^{\mathcal{C}}\right)^{\mathcal{C}} = A$. (Todo conjunto é complementar do seu complementar.)

(ii) Se $A \subset B$ então $B^{\mathcal{C}} \subset A^{\mathcal{C}}$. (Se um conjunto está contido em outro, seu complementar contém esse outro.)

A regra (ii) pode ser escrita com notação $\Rightarrow$, assumindo a forma seguinte:

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c.$$

Na realidade, na presença da regra (i), a regra (ii) pode ser reforçada, valendo a equivalência abaixo

$$A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

Esta equivalência pode ser olhada sob o ponto de vista lógico, usando-se as propriedades P e Q que definem respectivamente os conjuntos A e B. Então, o conjunto A é formado pelos elementos de U que têm a propriedade P, enquanto que os elementos de B são todos os que (pertencem a U) e têm a propriedade Q. As propriedades que definem os conjuntos A^c e B^c são respectivamente a *negação* de P, representada por $\sim P$, e a *negação* de Q, representada por $\sim Q$. Assim, dizer que um objeto x tem a propriedade $\sim P$ significa (por definição) afirmar que x não tem a propriedade P (e analogamente, para Q). Com estas convenções, a relação acima lê-se assim:

$$P \Rightarrow Q \text{ se, e somente se, } \sim Q \Rightarrow \sim P.$$

Em outras palavras, a implicação $P \Rightarrow Q$ (P implica Q) equivale a dizer que $\sim Q \Rightarrow \sim P$ (a negação de Q implica a negação de P).

EXEMPLO 10

Voltemos ao Exemplo 3. Sendo U o conjunto dos quadriláteros convexos, consideremos R a propriedade que tem um quadrilátero X de ser um retângulo e P a propriedade de ser um paralelogramo. Então $\sim P$ é a propriedade que tem um quadrilátero convexo de não ser um paralelogramo e $\sim R$ a de não ser um retângulo. Neste caso, as implicações $R \Rightarrow P$ e $\sim P \Rightarrow \sim R$ lêem-se, respectivamente, assim:

Se X é um retângulo, então X é um paralelogramo;

Se X não é um paralelogramo, então X não é um retângulo.

Desta forma, as duas afirmações acima são equivalentes, ou seja, elas são apenas duas maneiras diferentes de dizer a mesma coisa.

A implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ chama-se a *contrapositiva* da implicação $P \Rightarrow Q$. Como já vimos, a contrapositiva é um *equivalente lógico* da implicação original. Isto é, a contrapositiva de uma implicação nada mais é do que a mesma implicação dita com outras palavras.

Exemplo 11

Observe as afirmações abaixo:

Todo número primo maior do que 2 é ímpar;

Todo número par maior do que 2 é composto.

Estas afirmações dizem exatamente a mesma coisa, ou seja, exprimem a mesma ideia, só que com diferentes termos. Podemos reescrevê-las na forma de implicações, aplicadas a $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, vendo claramente que uma é a contrapositiva da outra:

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: n primo $\Rightarrow$ n ímpar;

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: $\sim$ (n ímpar) $\Rightarrow \sim$ (n primo);

Dado $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$: n par $\Rightarrow$ n composto.

Em Matemática é frequente, e muitas vezes útil, substituir uma implicação por sua contrapositiva, a fim de tornar seu significado mais claro ou mais manipulável. Por isso, é extremamente importante entender que $P \Rightarrow Q$ e $\sim Q \Rightarrow \sim P$ são afirmações equivalentes. Em particular, a equivalência entre uma implicação e sua contrapositiva é a base das *demonstrações por contradição*.

Exemplo 12

Em um plano Π, tomado como conjunto universo, consideremos duas retas perpendiculares r e s.

Consideremos P a propriedade que tem uma reta x em Π de ser diferente de s e perpendicular a r; e Q a propriedade de uma reta x em Π ser paralela a s. Então $\sim P$, negação de P, é a propriedade de uma reta em Π coincidir com s ou não ser perpendicular a r; e $\sim Q$, negação de Q, é a propriedade que tem uma reta do plano Π de não ser paralela a s.

A implicação $P \Rightarrow Q$ se lê, em linguagem comum, assim:

Se duas retas distintas s e x são perpendiculares a uma terceira reta r, então s e x são paralelas.

A contrapositiva $\sim Q \Rightarrow \sim P$ significa:

Se duas retas distintas não são paralelas, então elas não são perpendiculares a uma terceira.

Acontece que neste caso é mais fácil (e mais natural) provar a implicação $\sim Q \Rightarrow \sim P$ *do que* $P \Rightarrow Q$.

Noutras palavras, prova-se que $P \Rightarrow Q$ por contradição. O raciocínio é bem simples: se as retas distintas s e x não são paralelas elas têm um ponto A em comum. Então, como é única a perpendicular s à reta r pelo ponto A, segue-se que x não é perpendicular a r.

Para provar que duas retas são paralelas, em geral, usa-se a demonstração por contradição pois a definição de retas paralelas é baseada numa negação: retas paralelas são retas coplanares que *não* possuem pontos em comum.

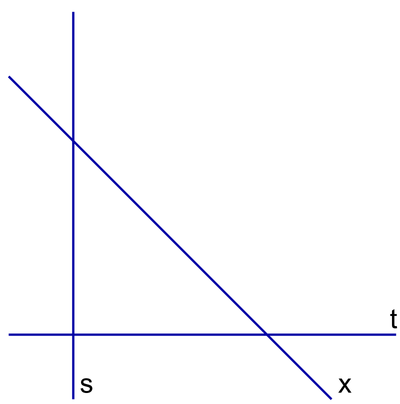


Figura 1.1: Retas no plano.

Formar o complementar de um conjunto é um caso particular da operação de formar a diferença entre dois conjuntos dados, cuja definição damos a seguir.

Definição 3

A *diferença* entre dois conjunos A e B é definida por:

$$B \setminus A = \{x \ ; \ x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

Note que em geral, essa operação entre conjuntos não é comutativa, isto é, nem sempre $B \setminus A = A \setminus B$ (dê um exemplo). A formação do complementar $A^{\mathcal{C}}$ de um conjunto A se obtém com a diferença $U \setminus A$, em que U é o conjunto universo. Para mais propriedades dessa operação, veja Exercício 6.

☞ Para Saber Mais - Negação, Contrapositiva, Recíproca - Clique para ler

1.5 Reunião e Interseção

DEFINIÇÃO 4

Dados os conjuntos A e B:

(i) a *reunião* $A \cup B$ é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B;

(ii) a *interseção* $A \cap B$ é o conjunto formado pelos elementos de A e de B.

Portanto, se considerarmos as afirmações

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in B$$

veremos que $x \in A \cup B$ quando *pelo menos uma* dessas afirmações for verdadeira e, por outro lado, $x \in A \cap B$ quando *ambas* as afirmações acima forem verdadeiras. Mais concisamente:

$x \in A \cup B$ significa $x \in A$ ou $x \in B$;

$x \in A \cap B$ significa $x \in A$ e $x \in B$.

Nota-se, deste modo, que as operações $A \cup B$ e $A \cap B$ entre conjuntos constituem a contrapartida matemática, em linguagem de conjuntos, dos conectivos lógicos *ou* e *e* (às vezes representados pelos símbolos $\vee$ e $\wedge$, respectivamente). Assim, se P é a propriedade que define o conjunto A e Q é a propriedade que define o conjunto B, então, $A \cup B$ e $A \cap B$ são os conjuntos definidos pelas propriedades "P ou Q" e "P e Q", respectivamente.

EXEMPLO 13

Diremos que $x \in \mathbb{R}$ tem a propriedade P se $x^2 - 3x + 2 = 0$, e tem a propriedade Q se $x^2 - 5x + 6 = 0$.

O conjunto dos números que possuem a propriedade P é $A = \{1, 2\}$ e o conjunto dos números que têm Q é $B = \{2, 3\}$. Assim, a afirmação "$x^2 - 3x + 2 = 0$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$" equivale a "$x \in \{1, 2, 3\}$"; e a afirmação "$x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 5x + 6 = 0$" equivale a "$x \in \{2\}$ ou $x = 2$". Noutras palavras,

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad A \cap B = \{2\}.$$

☞ Para Saber Mais - Menino ou Menina? - Clique para ler

As propriedades relacionadas com as operações de união e interseção constituem teoremas cujas demonstrações, em geral, não são difíceis (veja os Exercícios 2, 3 e 4). A comutatividade e associatividade decorrem diretamente das definições, e a distributividade é de verificação um pouco menos imediata.

(i) Comutatividade da união e da interseção:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(ii) Associatividade da união e da interseção:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(iii) Distributividade, de cada uma em relação à outra:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Estas propriedades constituem, na realidade, regras que regem o uso combinado dos conectivos lógicos "ou" e "e".

A conexão entre as operações de união e interseção e a relação de inclusão é dada pelas seguintes equivalências:

$$A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A.$$

E, finalmente, se A e B são subconjuntos do universo U, tem-se

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \text{e} \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Estas últimas relações, atribuídas ao matemático inglês Augustus de Morgan, significam que a negação de "P ou Q" é "$\sim P$ e $\sim Q$" e a negação de "P e Q" é "$\sim P$ ou $\sim Q$".

Terminamos esta unidade apresentando um resumo do que estudamos. Exploramos as relações fundamentais entre a linguagem da álgebra de conjuntos e a linguagem das implicações lógicas. Chamamos atenção para as vantagens, em certas situações, de expressar implicações lógicas em termos de conjuntos. Consideremos P e Q duas condições, aplicáveis aos elementos de um conjunto U. Consideremos A e B subconjuntos de U, cujos elementos satisfazem P e Q, respectivamente. As principais equivalências entre a linguagem de implicações e a linguagem de conjuntos podem ser resumidas no quadro a seguir:

$A = B$	$P \Leftrightarrow Q$
$A \subset B$	$P \Rightarrow Q$
A^c	$\sim P$
$A \cup B$	$P \vee Q$
$A \cap B$	$P \wedge Q$

☞ Para Saber Mais - Sobre a Noção de Igualdade - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - Comentário Histórico e Didático quanto à Linguagem - Clique para ler

1.6 Exercícios Recomendados

1. Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.

   (a) $\varnothing \in \varnothing$; (b) $\varnothing \subset \varnothing$; (c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; (d) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$.

2. Demonstre as propriedades de distributividade:

   (a) a operação de união em relação à interseção;

   (b) a interseção em relação à união.

3. Demonstre que $A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$.

4. Dados $A, B \subset U$, demonstre as relações de De Morgan:

   (a) $(A \cup B)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cap B^{\mathcal{C}}$;

   (b) $(A \cap B)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cup B^{\mathcal{C}}$.

5. Considere P, Q e R condições, aplicáveis aos elementos de um conjunto U; e A, B e C os subconjuntos de U dos elementos que satisfazem P, Q e R, respectivamente. Expresse, em termos de implicações entre P, Q e R, as seguintes relações entre os conjuntos A, B e C.

   (a) $A \cap B^{\mathcal{C}} \subset C$; (b) $A^{\mathcal{C}} \cup B^{\mathcal{C}} \subset C$; (c) $A^{\mathcal{C}} \cup B \subset C^{\mathcal{C}}$;

   (d) $A^{\mathcal{C}} \subset B^{\mathcal{C}} \cup C$; (e) $A \subset B^{\mathcal{C}} \cup C^{\mathcal{C}}$.

6. Recorde que a definição da diferença entre conjuntos:

$$B \setminus A = \{x \;;\; x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

   Mostre que

   a) $B \setminus A = \emptyset$ se, e somente se, $B \subset A$;

   b) $B \setminus A = B$ se, e somente se, $A \cap B = \emptyset$;

   c) vale a igualdade $B \setminus A = A \setminus B$ se, e somente se, $A = B$.

d) Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

7. Dê exemplos de implicações, envolvendo conteúdos do ensino médio, que sejam: verdadeiras, com recíproca verdadeira; verdadeiras, com recíproca falsa; falsas, com recíproca verdadeira; falsas, com recíproca falsa.

8. Escreva as implicações lógicas que correspondem à resolução da equação $\sqrt{x} + x = 2$. Verifique quais são reversíveis e explique o aparecimento de raízes estranhas. Faça o mesmo com a equação $\sqrt{x} + 3 = x$.

9. Considere as seguintes (aparentes) equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} x = 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Conclusão(?): $x = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Onde está o erro?

10. Escreva as recíprocas, contrapositivas e negações matemáticas das seguintes afirmações:

(a) Todos os gatos têm rabo;

(b) Sempre que chove, eu saio de guarda-chuva ou fico em casa;

(c) Todas as bolas de ping pong são redondas e brancas;

(d) Sempre que é terça feira e o dia do mês é um número primo, eu vou ao cinema;

(e) Todas as camisas amarelas ou vermelhas têm manga comprida;

(f) Todas as coisas quadradas ou redondas são amarelas e vermelhas.

1.7 Exercícios Suplementares

1. Sejam A, B e C conjuntos. Determine uma condição necessária e suficiente para que se tenha

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

2. Expressões tais como *para todo* e *existe* são chamadas de quantificadores e aparecem em sentenças dos tipos (sendo $P(x)$ é uma condição envolvendo a variável x):

(1) *Para todo x, é satisfeita a condição $P(x)$;*

(2) *Existe algum x que satisfaz a condição $P(x)$.*

(a) Sendo A o conjunto de todos os objetos x (de um certo conjunto universo U) que satisfazem a condição $P(x)$, escreva as sentenças (1) e (2) acima, usando a linguagem de conjuntos.

(b) Quais são as negações de (1) e (2)? Escreva cada uma destas negações usando conjuntos e compare com as sentenças obtidas em (a).

(c) Para cada sentença abaixo, diga se ela é verdadeira ou falsa e forme sua negação.

i. Existe um número real x tal que $x^2 = -1$.

ii. Para todo número inteiro n, vale $n^2 > n$.

iii. Para todo número real x, tem-se $x > 1$ ou $x^2 < 1$.

iv. Para todo número real x existe um número natural n tal que $n > x$.

v. Existe um número natural n tal que, para todo número real x, tem-se $n > x$.

3. Considere os conjuntos abaixo:

$F =$ conjunto de todos os filósofos;
$M =$ conjunto de todos os matemáticos;
$C =$ conjunto de todos os cientistas;
$P =$ conjunto de todos os professores.

(a) Exprima cada uma das afirmativas abaixo usando a linguagem de conjuntos.

i. Todos os matemáticos são cientistas.

ii. Alguns matemáticos são professores.

iii. Alguns cientistas são filósofos.

iv. Todos os filósofos são cientistas ou professores.

v. Nem todo professor é cientista.

(b) Faça o mesmo com as afirmativas abaixo.

vi. Alguns matemáticos são filósofos;
vii. Nem todo filósofo é cientista;
viii. Alguns filósofos são professores;
ix. Se um filósofo não é matemático, ele é professor;
x. Alguns filósofos são matemáticos.

(c) Tomando as cinco primeiras afirmativas como hipóteses, verifique quais das afirmativas do segundo grupo são necessariamente verdadeiras.

4. Considere um grupo de 4 cartões, que possuem uma letra escrita em um dos lados e um número do outro. Suponha que seja feita, sobre esses cartões, a seguinte afirmação: *Todo cartão com uma vogal de um lado tem um número ímpar do outro.* Quais do cartões abaixo você precisaria virar para verificar se esse afirmativa é verdadeira ou falsa?

A	1	B	4

5. O artigo 34 da Constituição Brasileira de 1988 diz o seguinte:

A União não intervirá nos Estados nem no Distrito Federal, exceto para:

I. Manter a integridade nacional;

II. Repelir invasão estrangeira ou de unidade da Federação em outra;

III. (...)

(a) Suponhamos que o estado do Rio de Janeiro seja invadido por tropas do estado de São Paulo. O texto acima obriga a União a intervir no estado? Na sua opinião, qual era a intenção dos legisladores nesse caso?

(b) Reescreva o texto do artigo 34 de modo a torná-lo mais preciso.

6. O conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$ de um conjunto Aé o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A. Prove o teorema de Cantor:

Se A é um conjunto, não existe uma função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ que seja sobrejetiva.

Sugestão: Suponha que exista uma tal função f e considere $X = \{x \in A\ ;\ x \notin f(x)\}$.

1.8 Textos Complementares

Na Sala de Aula

Afirmações "Sempre Verdadeiras"

Em livros didáticos do ensino básico, às vezes encontramos atividades em que se pede aos alunos que classifiquem afirmações como: *sempre verdadeiras*, *às vezes verdadeiras* ou *sempre falsas*. Neste caso, a afirmação em questão estabelece uma propriedade, que se aplica aos elementos de certo conjunto. Evidentemente, a intenção é que os alunos descubram se tal propriedade é satisfeita por todos os elementos desse conjunto, por parte deles, ou por nenhum deles.

Por si só, este pode ser um exercício matemático interessante. Entretanto, a linguagem está matematicamente incorreta. Como observamos acima, matematicamente falando, uma afirmação que não seja "sempre verdadeira" é *falsa*.

Esta é uma distinção fundamental entre a linguagem corrente usada no dia a dia e a linguagem da lógica matemática, cuja compreensão é um passo importante no processo de aprendizagem de Matemática no ensino básico. Não é o caso de discutir se a linguagem matemática é "melhor" que a linguagem corrente, mas sim de reconhecer que esta tem especificidades adequadas aos seus objetivos, e que se expressar matematicamente não é o mesmo que falar coloquialmente.

Na Sala de Aula

Clareza e Rigor

Com experiência e bom senso, quem se ocupa da Matemática percebe que a obediência estrita aos rígidos padrões da notação e do rigor, quando praticada ao pé da letra, pode ser um obstáculo à clareza, à elegância e ao entendimento dos alunos.

Evidentemente, a linguagem matemática formal dos cursos universitários não pode ser a mesma utilizada no ensino médio, que também não pode ser a mesma que aquela empregada nas séries iniciais do ensino fundamental. Como já comentamos, ter clara a importância da linguagem de conjuntos é importante para que saibamos dosar o grau de formalismo matemático de forma adequada a cada nível do ensino básico – sem cometer imprecisões de linguagem, que possam confundir os alunos, nem exageros, que possam se constituir em obstáculos de aprendizagem, valorizando mais (e prematuramente) a própria linguagem que os próprios conteúdos matemáticos.

Neste sentido, no ensino básico, às vezes permitimo-nos abusos de linguagem, para não cometer exageros de formalismo. Por exemplo, em certas ocasiões, pode tornar-se um pedantismo fazer a distinção entre x e $\{x\}$. Isto ocorre quando se diz que a interseção de duas retas r e s é o ponto P (em lugar do conjunto cujo único elemento é P) e se escreve $r \cap s = P$, em vez de $r \cap s = \{P\}$.

Por outro lado, certas imprecisões são desnecessárias e podem atrapalhar o próprio desenvolvimento da capacidade do aluno de se expressar adequadamente em Matemática. Por exemplo, evite escrever coisas como $A =$ {conjunto dos números pares}. Isto é incorreto. O símbolo $\{\ldots\}$ significa o conjunto cujos elementos estão descritos no interior das chaves. Em lugar disso, escreva $A =$ conjunto dos números pares, $A =$ {números pares}, ou $A = \{2n \; ; \; n \in \mathbb{Z}\}$.

Na Sala de Aula

O Conjunto Vazio

Às vezes vemos em livros do ensino básico afirmações que sugerem a existência de mais de um conjunto vazio, como *ser vazio* fosse uma propriedade que pudesse valer para diferentes conjuntos. Em Matemática, o *conjunto vazio* é único. De fato, como já observamos, dois conjuntos são iguais se, e somente, se possuem os mesmos elementos. Em particular, decorre daí que não pode existir mais de um conjunto vazio. Assim, o conjunto dos números naturais situados estritamente entre 1 e 2 é *o mesmo* conjunto dos polígonos regulares com exatamente uma diagonal, por exemplo.

Definições

Embora, estritamente falando, não seja errado usar o termo "se, e somente se" em uma definição, isto é desnecessário, pois como comentamos acima, este termo já está implícito em toda definição. Além disso, esse costume pode ser didaticamente inadequado, pois pode ocultar o fato de se estar simplesmente dando um nome a um conceito, causando a impressão de se tratar de um teorema.

Por exemplo, se queremos definir *paralelogramo* devemos dizer assim: *chama-se paralelogramo a um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos*. Alguns autores escrevem, em lugar disso: *um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se, os lados opostos são paralelos*. Aos olhos dos alunos, isso pode parecer mais um teorema que uma definição.

Na Sala de Aula

Na Sala de Aula

Implicações Lógicas e Resolução de Equações

Releia os Exemplos 4, 8 e 9, procurando refletir sobre os passos comumente feitos na manipulação de expressões algébricas, particularmente na resolução de equações. Alguns destes correspondem a equivalências lógicas, e outros, apenas a implicações cuja recíproca não é verdadeira. Este fenômeno ocorre frequentemente quando se estudam as chamadas "equações irracionais", mas às vezes ele se manifesta de forma sutil, provocando perplexidade (veja o Exercício 8). A clareza dessas questões é fundamental para o ensino da simbologia algébrica no fim do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Na Sala de Aula

Comentário Histórico e Didático quanto à Linguagem

Hoje, no contexto do ensino básico de Matemática, estamos acostumados a pensar em alguns conceitos matemáticos como estando intrinsecamente atrelados à ideia de conjunto. Quando pensamos em números, por exemplo, quase que automaticamente nos lembramos dos conjuntos numéricos, como estão organizados hoje:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

No entanto, do ponto de vista histórico, nem sempre foi assim. Por exemplo, os números racionais positivos já eram conhecidos vários séculos antes de que fosse conferido aos inteiros negativos o estatuto de número. Além disso, o conceito de conjunto é muito mais recente que a ideia de número e grande parte dos desenvolvimentos teóricos envolvendo números (especialmente os naturais) deram-se sem a estrutura de conjunto como conhecemos hoje.

A adoção da linguagem e da notação de conjuntos em Matemática só se tornou uma prática universal a partir da terceira ou quarta década do século vinte. Esse uso, que permitiu elevados graus de precisão, generalidade e clareza nos enunciados, raciocínios e definições, provocou uma grande revolução nos métodos, no alcance e na profundidade dos resultados matemáticos.

Não defendemos que a ordem do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos seja reproduzida em sala de aula – isto não seria factível nem produtivo para os objetivos do ensino. Entretanto, a reflexão sobre esse desenvolvimento – especialmente os obstáculos enfrentados – pode ajudar o professor a entender certas dificuldades vivenciadas hoje pelos alunos com os conceitos e a linguagem matemática. Para saber mais, veja, por exemplo, [2].

Se queremos iniciar nossos alunos em Matemática, é necessário que os familiarizemos com os rudimentos da linguagem e da notação dos conjuntos. Isto, inclusive, vai facilitar nosso próprio trabalho, pois a precisão dos conceitos é uma ajuda indispensável para a clareza das ideias. Por outro lado, na sala de aula, há alguns cuidados a tomar. O principal deles refere-se ao comedimento, ao equilíbrio, à moderação. Isto consiste em evitar o pedantismo e exageros que conduziram ao descrédito da onda que ficou conhecida como "Matemática Moderna". Devemos estimular o desenvolvimento gradual do formalismo e da linguagem matemática pelos alunos, mas sempre em grau compatível com cada nível escolar, sem exageros.

Procure, sempre que possível, ilustrar conceitos com exemplos de conjuntos dentro da Matemática. Além de contribuir para implantar a linguagem de conjuntos, este procedimento pode também ajudar a relembrar, ou até mesmo aprender, fatos interessantes sobre Aritmética, Geometria, Funções, etc.

Esteja atento também à correção gramatical. Linguagem correta é essencial para a limpidez do raciocínio. Muitos dos nossos colegas professores de Matemática, até mesmo autores de livros, são um tanto descuidados a esse respeito.

Seja cuidadoso, a fim de evitar cometer erros. A auto-crítica é o maior aliado do bom professor. Em cada aula, trate a si mesmo como um aluno cujo trabalho está sendo examinado: pense antes no que vai dizer mas critique-se também depois. Não hesite em corrigir-se em público, nem em admitir que não sabe a resposta de uma pergunta – demonstre-se sempre disposto a pesquisar e a aprender mais. Longe de desprestigiar, esse hábito fortalecerá a confiança dos alunos no seu mestre.

Para Saber Mais

A Relação de um Elemento Pertencer a um Conjunto e a Inclusão

A inclusão é uma relação entre conjuntos, que não deve ser confundida com a relação de um elemento pertencer a um conjunto. A relação $a \in A$, de um elemento a pertencer a um conjunto A, pode ser escrita de forma equivalente como $\{a\} \subset A$. Mas é incorreto escrever $a \subset A$ ou $\{a\} \in A$.

Observe que podemos enunciar uma definição para a relação A *é subconjunto de* B, porém não há uma definição para a relação a *é elemento de* A. No começo da Seção 1.2, observamos que um conjunto *é totalmente definido* por seus elementos. Assim, a relação de um elemento pertencer a um conjunto está na base do próprio conceito de conjunto, que estamos assumindo como uma noção primitiva, sem definição.

Para Saber Mais

Provas por Contrapositiva

A *contrapositiva* $\sim Q \Rightarrow \sim P$ é logicamente equivalente à implicação $P \Rightarrow Q$. Essa equivalência também pode ajudar a entender o significado do termo "necessário": se Q não ocorre, então certamente P não ocorrerá (embora Q possa ocorrer sem que P ocorra).

As implicações dos Exemplos 4 a 6 também podem ser expressas como contra-positivas:

$x^3 - 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 \neq 0$;

n *não é par* $\Rightarrow$ n *não múltiplo de* 4;

Q *não tem lados opostos paralelos* $\Rightarrow$ Q *não é um retângulo.*

Para entender melhor o termo "necessário", procure pensar em outras situações familiares. Por exemplo, quando dizemos que $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Z}$, estamos afirmando que n ser natural é *suficiente* para que n seja inteiro, ou equivalentemente, que n ser inteiro é *necessário* para que n seja natural (embora n possa ser inteiro sem ser natural).

Discutiremos em maiores detalhes da noção de *contra-positiva* na Seção 1.4 a seguir.

Definições

As definições matemáticas consistem em atribuir nomes a objetos que têm certas propriedades particularmente interessantes. Por exemplo, um número natural $n > 1$ chama-se primo quando 1 e n são os únicos números naturais que são seus divisores. Esta propriedade merece ser rotulada por um nome especial pois é muito importante na teoria matemática sobre os números inteiros (neste caso, um papel importante também em outros campos).

Toda definição matemática é uma equivalência lógica. Isto é, quando enunciamos uma definição matemática, estamos atribuindo um nome aos objetos matemáticos que têm certas propriedades – o que significa que serão chamados pelo nome escolhido todos os objetos com essas propriedades, e nenhum além destes.

Para Saber Mais

Para Saber Mais

Provas por Vacuidade

Um tipo de afirmações que podem soar particularmente estranhas são as satisfeitas por vacuidade.

Se um professor disser à sua classe que todos os alunos que tiverem 5 metros de altura passarão com nota 10 sem precisar prestar exames, ele certamente estará falando a verdade, mesmo que corrija suas provas com o máximo de rigor.

Com efeito, sejam P a propriedade de um aluno ter 5 metros de altura e Q a de obter nota 10 sem prestar exames. Então $P \Rightarrow Q$, pois o conjunto definido pela propriedade P é vazio e o conjunto vazio está contido em qualquer outro. De um modo geral, a implicação $P \Rightarrow Q$ é verdadeira (vacuamente) sempre que não haja elementos com a propriedade P.

A Ciência das Condições Necessárias

Para Saber Mais

Em Matemática, não há afirmações absolutas ou peremptórias. *Todas* as proposições matemáticas são do tipo *se P então Q*. (Esta afirmação peremptória que acabamos de fazer não pertence à Matemática. Ela é apenas sobre Matemática.)

Considere, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. Ele parece uma verdade absoluta mas na realidade é um afirmação condicional:

> *Se $a > b \geqslant c$ são as medidas dos lados de um triângulo retângulo* então $a^2 = b^2 + c^2$.

Por isso, às vezes, se diz que a Matemática é a ciência das condições necessárias. Ou então se diz como Bertrand Russel: *Na Matemática nunca sabemos do que estamos falando nem se é verdade o que estamos dizendo*.

Para Saber Mais

Negação, Contrapositiva, Recíproca

Como vimos, muitas vezes, em raciocínios dedutivos matemáticos, lidamos com as ideias de *negação*, *contrapositiva* e *recíproca* de uma implicação $P \Rightarrow Q$. É preciso ter cuidado para entender bem essas noções distintas – sem confundi-las. Neste sentido, cabem algumas observações importantes. Para ilustrar nossas ideias considere, por exemplo, as seguintes afirmações:

Todo matemático é filósofo.

Todo triângulo isósceles é equilátero.

Sabemos, é claro, que a segunda afirmação acima é falsa. No entanto, a veracidade das afirmações é irrelevante para essa discussão.

1. É importante não confundir a ideia matemática de *negação* com a ideia (não matemática) de *contrário*, ou *oposto*.

   A negação da afirmação "todo matemático é filósofo" não é "nenhum matemático é filósofo", e sim "existe (pelo menos) um matemático não filósofo". Mais geralmente, negar $P \Rightarrow Q$ significa admitir que existe (pelo menos) um objeto que tem a propriedade P, mas não tem a propriedade Q. Isto é bem diferente de admitir que nenhum objeto com a propriedade P tem também a propriedade Q.

   Se P é a propriedade de um triângulo ser isósceles e Q a propriedade de ser equilátero, a negação da implicação $P \Rightarrow Q$ (enunciada acima) é a afirmação (verdadeira) de que "existe (pelo menos) um triângulo isósceles não equilátero".

   Por outro lado, se uma ideia é expressa por uma palavra, a ideia contrária é expressa pelo antônimo daquela palavra. Por exemplo, o contrário de gigantesco é minúsculo, mas a negação de gigantesco inclui outras gradações de tamanho além de minúsculo.

2. Também é importante não confundir as ideias de *negação* e *contrapositiva*.

   A contrapositiva de uma afirmação é *equivalente* a esta; enquanto a negação, como o nome está dizendo, *contradiz* a afirmação original.

   Como observamos acima, a negação de "todo matemático é filósofo" é "existe (pelo menos) um matemático não filósofo". Já a contrapositiva dessa afirmação é a afirmação equivalente: "se alguém não é filósofo, então não é matemático".

A negação de "todo triângulo isósceles é equilátero" é "existe um triângulo isósceles não equilátero". Sua contrapositiva é: "se um triângulo não é equilátero, então não é isósceles". Neste caso, observe que, como a afirmação original é falsa, temos que sua negação é *necessariamente verdadeira*, pois *contradiz* a afirmação original; sua contrapositiva é *necessariamente falsa*, pois *equivale* à afirmação original.

3. Finalmente, é importante não confundir a ideia de *recíproca*, com *negação*, nem com *contrapositiva*. Tratam-se de três noções bem diferentes!

   No caso dos exemplos acima, as recíprocas são: "todo filósofo é matemático" e "todo triângulo equilátero é isósceles".

   Observe que a afirmação "todo triângulo isósceles é equilátero" é falsa, enquanto sua recíproca é verdadeira. No entanto, este é um caso particular. Não há nenhuma relação a priori entre a veracidade de uma afirmação e a veracidade de sua recíproca. Considere, por exemplo, as seguintes afirmações:

   Todo triângulo equilátero é isósceles;

   Todo triângulo equilátero é equiângulo;

   Todo triângulo isósceles é retângulo.

   Temos que a primeira afirmação é verdadeira mas sua recíproca é falsa (como acabamos de observar); a segunda afirmação é verdadeira e sua recíproca também é verdadeira (neste caso, as afirmações são equivalentes); a terceira afirmação é falsa e sua recíproca também é falsa.

Para entender melhor essas ideias, procure pensar em outros exemplos familiares.

Para Saber Mais

Menino ou Menina?

O conectivo "ou" é mais um exemplo de um termo cujo significado específico em Matemática é um tanto diferente daquele que lhe é atribuído na linguagem corrente. No dia-a-dia, "ou" quase sempre refere duas alternativas mutuamente excludentes ("vamos de ônibus ou de trem?"). Em Matemática, por outro lado, o conectivo "ou" nunca tem um sentido excludente. A afirmação "P ou Q" significa que pelo menos uma das alternativas P ou Q é válida, podendo perfeitamente ocorrer que ambas sejam.

Por exemplo, é correta a afirmação "todo número inteiro é maior do que 10 ou menor do que 20". De fato, se

$$A = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x > 10\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{Z}\ ;\ x < 20\},$$

então $A \cup B = \mathbb{Z}$.

A diferença entre o uso comum e o uso matemático do conectivo "ou" é ilustrada pela anedota do obstetra que também era matemático. Ao sair da sala onde acabara de realizar um parto, foi abordado pelo pai da criança, que lhe perguntou: "Foi menino ou menina, doutor?". Resposta do médico: "Sim". De fato, se A é o conjunto das meninas, B o conjunto dos meninos e x o recém-nascido, certamente tem-se $x \in A \cup B$.

Para Saber Mais

Sobre a Noção de Igualdade

Nesta unidade, comentamos sobre vários termos cujos significados matemáticos precisos diferem significativamente de seus usos em linguagem corrente. Os nomes escolhidos para os conceitos matemáticos são, em geral, inspirados na linguagem corrente. Porém, *para entender corretamente seu significado matemático, é preciso "esquecer" seu sentido na linguagem corrente*.

Talvez o exemplo mais importante – e um dos que menos nos damos conta – seja a própria noção matemática de *igualdade*. Em Matemática uma coisa só é igual a si própria. Quando se escreve $a = b$, isto significa que a e b são símbolos usados para designar o mesmo objeto.

Em Geometria, às vezes ainda se usam expressões como "os ângulos α e β são iguais" ou "os triângulos ABC e $A'B'C'$ são iguais" para significar que são figuras que podem ser superpostas exatamente uma sobre a outra. A rigor, porém, esta terminologia é inadequada. Duas figuras geométricas que coincidem por superposição devem ser chamadas *congruentes*.

Talvez valha a pena observar que a palavra "igual" em Geometria já foi usada num sentido até bem mais amplo. Euclides, que viveu há 2300 anos, chamava "iguais" a dois segmentos de reta com o mesmo comprimento, a dois polígonos com a mesma área e a dois sólidos com o mesmo volume.

Na linguagem corrente, às vezes se diz que duas pessoas ou objetos são iguais quando um certo atributo, ao qual se refere o discurso naquele momento, é possuído igualmente pelas pessoas ou objetos em questão. Assim, por exemplo, quando dizemos que "todos são iguais perante a lei", isto significa que dois cidadãos quaisquer têm os mesmos direitos e deveres legais.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 29

[3] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[4] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[5] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974. 2, 3

[6] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[7] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[8] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[9] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[11] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

3

Funções

Sumário

3.1 Introdução 2
3.2 O Conceito de Função 3
3.3 Funções e Cardinalidade 7
3.4 Exercícios Recomendados 9
3.5 Exercícios Suplementares 10
3.6 Textos Complementares 12

3.1 Introdução

Frequentemente empregamos, ou lemos em livros didáticos do ensino básico, termos do tipo "*a função* $y = x^2$ ...", referindo-se à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada número real x associa o número real x^2. Mas o uso dessa expressão faz sentido? Se pensarmos do ponto de vista estritamente matemático, a resposta será *não*. Devemos lembrar que a definição de *função* é estabelecida por três elementos fundamentais: *domínio*, *contradomínio* e *lei de associação*. Isso é, uma função só fica bem definida se são conhecidos esses três elementos. Assim, $y = x^2$ não representa, por si só, uma função – mas pode vir a expressar a lei de associação de uma função, se são estabelecidos domínio e contradomínio compatíveis. Como veremos mais adiante, há mais de uma função correspondendo a esta lei de associação. Portanto, o uso do termo "*a função* $y = x^2$", para se referir à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a $x \in \mathbb{R}$ associa x^2, é um abuso de linguagem matemática. É claro que, em sala de aula, abusos de linguagem não são proibidos, pois, em um grande número de situações, a linguagem matemática formal não é compatível com os objetivos de aprendizagem do ensino básico. Entretanto, seu uso requer certos cuidados e deve ser equilibrado, de forma a não levar à formação de concepções limitadas que dificultem ou mesmo impeçam o desenvolvimento futuro da aprendizagem matemática pelos alunos. Para cometer imprecisões, encontrando seu equilíbrio com o formalismo, é indispensável que tenhamos perfeita clareza com a formulação matemática precisa.

Do ponto de vista pedagógico, o uso descuidado do termo "*a função* $y = x^2$" pode levar ao desenvolvimento de uma ideia limitada do conceito de função. Se em sala de aula referimo-nos a funções apenas por meio de fórmulas, é de se esperar que os alunos desenvolvam uma concepção de função restrita à ideia de fórmula: *função é tudo que tem fórmula*. Como comentamos acima, escrever uma fórmula não é suficiente para definir uma função. Além disso, é importante lembrar que nem toda fórmula representa uma função, e nem toda função pode ser representada por uma fórmula.

Esta unidade tem por objetivo fazer uma revisão geral e breve das ideias fundamentais relacionadas com o conceito de função, importantes para o ensino básico.

3.2 O Conceito de Função

Exemplo 1

Considere as funções

$$p: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{e} \qquad q: \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

As funções p e q são inversas uma da outra? Elas são invertíveis? São bijetivas?

No ensino básico, em geral, aprendemos (e ensinamos) que "$y = \sqrt{x}$ *é a função inversa de* $y = x^2$". Mas também estamos acostumamos a enunciar o seguinte teorema: *Uma função tem inversa se, e somente, se é bijetiva*. A função p não é injetiva (pois para cada $y > 0$ existem x_1, x_2 distintos,tais que $p(x_1) = p(x_2) = y$) e, portanto, não pode ser injetiva. Então, como é possível que q seja a inversa de p? Há alguma incoerência neste exemplo? Para responder claramente a estas questões, devemos recordar todas as definições envolvidas, desde a própria definição de função, passando pelas de função injetiva, sobrejetiva, bijetiva e invertível. Em seguida, voltaremos a este exemplo.

Definição 1

Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer.

Uma **função** é uma relação $f : X \to Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$.

Além disso,

(i) Os conjuntos X e Y são chamados **domínio** e **contradomínio** de f, respectivamente;

(ii) O conjunto $f(X) = \{y \in Y \ ; \ \exists x \in X, \ f(x) = y\} \subset Y$ é chamado **imagem** de f;

(iii) Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado **imagem** de x.

☞ Para Saber Mais - A Definição de Bourbaki - Clique para ler

Como estabelecido na Definição 1, uma função é um terno constituído por elementos: *domínio*, *contradomínio* e *lei de associação* (segundo a qual os elementos do domínio estão associados aos do contradomínio). Para que uma função esteja bem definida, é necessário que estes três elementos sejam dados. Observe que o enunciado dessa definição pode ser reescrito equivalentemente da seguinte forma: *para que uma relação $f : X \to Y$ seja uma função, esta deve satisfazer a duas condições fundamentais*:

(I) estar definida em todo elemento do domínio (*existência*);

(II) não fazer corresponder mais de um elemento do contradomínio a cada elemento do domínio (*unicidade*).

Desejamos agora definir função inversa e determinar condições para que uma função seja invertível. Antes, é necessário definir composição de funções, já que a definição de função inversa está baseada nesse conceito.

DEFINIÇÃO 2

Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções, com $Y \subset U$. A **função composta de g com f** é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V, que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $y = g \circ f(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f: & X & \to & Y \subset U & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

DEFINIÇÃO 3

Uma função $f : X \to Y$ é **invertível** se existe uma função $g : X \to Y$ tal que

(i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$;

(ii) $g \circ f = \mathcal{I}_X$.

Observamos que $\mathcal{I}_A$ denota a função identidade do conjunto A, ou seja, $\mathcal{I}_A : x \in A \mapsto x \in A$.

Neste caso, a função g é dita **função inversa** de f e denotada $g = f^{-1}$.

Definição 4

Consideremos uma função $f : X \to Y$.

(i) f é **sobrejetiva** se para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$;

(ii) f é **injetiva** se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;

(iii) f é **bijetiva** se é sobrejetiva e injetiva.

Há ainda formas equivalentes de enunciar as definições acima:

- f é *sobrejetiva* se, e somente se, $f(X) = Y$;
- f é *injetiva* se, e somente se, $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- f é *injetiva* se, e somente se, para todo $y \in f(X)$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$;
- f é *bijetiva* se, e somente se, para todo $y \in Y$, existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Voltemos agora ao Exemplo 1. De acordo com a Definição 3, para verificar se p e q são inversas uma da outra, devemos determinar as compostas $p \circ q$ e $q \circ p$:

$$\begin{array}{rcccccl} p \circ q : & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} & \mapsto & \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccl} q \circ p : & \mathbb{R} & \to & [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 & \mapsto & \sqrt{x^2} = |x|. \end{array}$$

Assim, $p \circ q = \mathcal{I}_{[0,+\infty[}$ e $q \circ p \neq \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$. Concluímos que as funções p e q não são inversas uma da outra. Mais geralmente, poderemos concluir que p e q não são invertíveis. Aplicar a Definição 3 diretamente para verificar que uma função *não* é invertível não é fácil em geral, pois devemos mostrar que *não existe* nenhuma função satisfazendo as duas condições da definição. Por isso, é importante entender que injetividade e sobrejetividade são condições que garantem a existência da função inversa, como provaremos a seguir (Teorema 5). No caso do Exemplo 1, vemos que p é sobrejetiva, mas não injetiva; e q é injetiva, mas não sobrejetiva.

Como uma *relação* é qualquer forma de associar elementos de um conjunto X com elementos de um conjunto Y (ou qualquer subconjunto de $X \times Y$), podemos sempre considerar a *relação inversa* de uma relação dada. Então, como definimos *função* como um tipo especial de relação, podemos sempre considerar a *relação inversa de uma função* (seja esta invertível como função ou não). Assim, determinar se uma função $f : X \to Y$ tem ou não uma *função inversa* consiste em verificar se sua relação inversa é ou não uma função. Para isto, devemos verificar se essa relação inversa satisfaz as condições **(I)** e **(II)** da Definição 3. Se a função original f é sobrejetiva, então f cobre todo o seu contradomínio, que é o domínio de sua relação inversa. Logo, sua relação inversa satisfaz a condição **(I)**. Se f é injetiva, então cada $y \in Y$ está associado a um único $x \in X$. Então, a relação inversa satisfaz a condição **(II)**. Decorre daí que a relação inversa de f é uma função (isto é, que f tem uma função inversa) se, e somente se, f for sobrejetiva e injetiva. Daremos a demonstração formal deste teorema a seguir.

Teorema 5

Uma função $f : X \to Y$ é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Demonstração

($\Rightarrow$) Por hipótese, existe $g : Y \to X$ tal que: (i) $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ e $g \circ f = \mathcal{I}_X$. Tomemos $y \in Y$ qualquer. Seja $x = g(y)$. Da condição (i) acima, segue que $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathcal{I}_Y(y) = y$. Então, f é sobrejetiva. Tomemos $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Logo, $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Da condição (ii), segue que $\mathcal{I}_X(x_1) = \mathcal{I}_X(x_2)$, logo, $x_1 = x_2$. Então, f é injetiva.

($\Leftarrow$) Por hipótese, f é bijetiva. Desejamos construir uma função $g : Y \to X$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição de função invertível. Dado $y \in Y$ qualquer, como f é sobrejetiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e, como f é injetiva, o elemento x com esta propriedade é único. Assim, definimos $g(y)$ como o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. As duas condições desejadas decorrem imediatamente da construção de g.

No caso do Exemplo 1, a relação inversa da função p associa cada $y \in [0, +\infty[$ aos números $-\sqrt{y}$ e $\sqrt{y}$. Portanto, esta satisfaz a condição **(I)**, mas não a **(II)**. Por outro lado, a relação inversa de q associa cada $y \geqslant 0$ a y^2. Portanto, satisfaz **(II)**, mas não **(I)**. Como p é sobrejetiva mas não injetiva, e

q é injetiva mas não sobrejetiva, então, pelo Teorema 5, nem p nem q possuem funções inversas.

☞ Na Sala de Aula - Fórmulas e Funções - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - A Generalidade do Conceito de Função - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - De Euler a Bourbaki - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Inversa à Direita e Inversa à Esquerda - Clique para ler

3.3 Funções e Cardinalidade

O conceito de função também está fortemente relacionado com uma das noções mais primordiais de toda a Matemática: a *contagem*. Na pré-história, mesmo antes de que fossem conhecidos os números ou a escrita, o homem já empregava processos de contagem. Esses processos consistiam basicamente em controlar uma quantidade por meio da comparação com objetos de referência, que em geral eram pequenas pedras ou marcações na rocha, na madeira ou em outros materiais. Em termos modernos, isto corresponde a estabelecer uma correspondência um a um, isto é, uma *bijeção* entre dois conjuntos. Assim, intuitivamente, podemos perceber que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma bijeção entre eles. De fato, a ideia de bijeção é usada para enunciar a própria definição matemática de cardinalidade (ou número de elementos) de um conjunto.

Definição 6

Dois conjuntos X e Y são ditos **cardinalmente equivalentes** (ou **equipotentes**) se existe uma bijeção $f : X \to Y$.

Também, podemos relacionar a existência de funções injetivas e sobrejetivas com relações entre cardinalidades de conjuntos, como mostram os Teoremas 7 e 8.

Teorema 7 Se existe uma injeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre X e um subconjunto $Y' \subset Y$, isto é, X é cardinalmente equivalente a um subconjunto de Y.

Demonstração Basta considerar $Y' = f(X)$. Como f é injetiva, a função $f' : X \to Y'$ definida por $f'(x) = f(x)$ é, por construção, uma bijeção.

Teorema 8 Se existe uma sobrejeção $f : X \to Y$, então existe uma bijeção entre Y e um subconjunto $X' \subset X$, isto é, Y é cardinalmente equivalente a um subconjunto de X.

Demonstração Para cada $y \in Y$, escolhemos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$ (isto é possível, pois, como f é sobrejetiva, existe pelo menos um elemento com esta propriedade). Seja X' o conjunto dos elementos assim escolhidos. A restrição de f a X', $f' : X' \to Y$, definida por $f'(x) = f(x)$, é, por construção, uma bijeção.

☞ Para Saber Mais - Os Tamanhos do Infinito - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Tantos Racionais Quantos Naturais - Clique para ler

3.4 Exercícios Recomendados

1. Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função

   (a) que a cada dois números naturais associa seu mdc;

   (b) que a cada vetor do plano associa seu módulo;

   (c) que a cada matriz 2×2 associa sua matriz transposta;

   (d) que a cada matriz 2×2 associa seu determinante;

   (e) que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;

   (f) que a cada figura plana fechada e limitada no plano associa a sua área;

   (g) que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;

   (h) que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;

   (i) que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;

   (j) que a cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa seu valor no ponto $x_0 = 0$.

2. Mostre que a função inversa de $f : X \to Y$, caso exista, é única, isto é, se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ satisfazendo as condições da Definição 3, então $g_1 = g_2$.

   Sugestão: Lembre-se que duas funções são iguais se e só se possuem mesmos domínios e contradomínios e seus valores são iguais em todos os elementos do domínio. Assim, procure mostrar que $g_1(y) = g_2(y)$, para todo $y \in Y$.

3. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que:

   (a) f é sobrejetiva se, e somente se, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ (isto é, f admite uma *função inversa à direita*).

   (b) f é injetiva se, e somente se, Existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathcal{I}_X$ (isto é, f admite uma *função inversa à esquerda*).

4. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que se existem $g_1 : Y \to X$ e $g_2 : Y \to X$ tais que $f \circ g_1 = \mathcal{I}_Y$ e $g_2 \circ f = \mathcal{I}_X$, então $g_1 = g_2$ (portanto, neste caso, f será invertível).

5. Podemos garantir que a inversa à esquerda e a inversa à direita (definidas como no Exercício 3), caso existam, são únicas? Justifique sua resposta.

6. Dê exemplos de funções não invertíveis. Para cada um dos exemplos que você der, determine a relação inversa, a função inversa à direita e a função inversa à esquerda, caso existirem.

7. Seja $f : X \to Y$ uma função e seja A um subconjunto de X. Define-se

$$f(A) = \{f(x) \; ; \; x \in A\} \subset Y.$$

Se A e B são subconjuntos de X, mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

8. Seja $f : X \to Y$ uma função e sejam A e B subconjuntos de X.

   (a) Mostre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

   (b) É possível afirmar que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todos $A, B \subset X$? Justifique.

   (c) Determine que condições deve satisfazer f para que a afirmação feita no item (b) seja verdadeira.

3.5 Exercícios Suplementares

1. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $y \in Y$, definimos a **contra imagem** ou **imagem inversa** de x como sendo o seguinte subconjunto de X:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \; ; \; f(x) = y\}.$$

Mostre que

   (a) Se f é injetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

   (b) Se f é sobrejetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

(c) Se f é bijetiva e y é um elemento qualquer de Y, o que se pode afirmar sobre a imagem inversa $f^{-1}(y)$?

2. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $A \subset Y$, definimos a **contra imagem** ou **imagem inversa** de A como sendo o subconjunto de X definido por

$$f^{-1}(A) = \{x \in X\ ;\ f(x) \in A\}.$$

Mostre que

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A)\ \cup\ f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A)\ \cap\ f^{-1}(B)$.

3. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, para todo $B \subset Y$;

(b) $f(f^{-1}(B)) = B$, para todo $B \subset Y$ se, e somente se, f é sobrejetiva.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função. Mostre que

(a) $f^{-1}(f(A)) \supset A$, para todo $A \subset X$;

(b) $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo $A \subset X$ se, e somente se, f é injetiva.

5. Mostre que existe uma injeção $f : X \to Y$ se, e somente se, existe uma sobrejeção $g : Y \to X$.

3.6 Textos Complementares

Para Saber Mais

A Definição de Bourbaki

Acima, definimos função como *um tipo especial de relação entre dois conjuntos*. Podemos pensar em relação como qualquer forma de associar elementos de um conjunto X com elementos de um conjunto Y. Entretanto, não enunciamos uma definição para esse termo – isto é, neste texto consideramos *relação* como um termo primitivo, sem definição (assim, como os termos *ponto* e *reta* geralmente são considerados na Geometria Euclidiana).

Uma alternativa para este caminho é definir uma *relação entre os conjuntos* X e Y como *qualquer subconjunto do produto cartesiano* $X \times Y$, isto é, como um conjunto de pares ordenados $(x, y) \in X \times Y$. Formar um conjunto de pares ordenados é uma forma de relacionar elementos $x \in X$ com elementos $y \in Y$. Seguindo esta linha, poderíamos definir *função* como um subconjunto $f \subset X \times Y$ com a seguinte propriedade:

$$\text{Para todo } x \in X, \text{ existe um único } y \in Y \mid (x, y) \in f.$$

De fato, esta definição (proposta pelo grupo de matemáticos Bourbaki em 1932) é a mais rigorosa e abstrata para o conceito de função. Neste texto, optamos pelo enunciado da Definição 1 por ser esta mais próxima da prática de sala de aula do ensino básico.

De Euler a Bourbaki

Para Saber Mais

O conceito função é um dos mais genéricos e mais unificadores de toda a Matemática contemporânea, fazendo-se presente em efetivamente todos os seus campos, incluindo Álgebra, Geometria, Análise, Combinatória, Probabilidade, etc. Diversas noções importantes – desde as mais elementares até as mais sofisticadas – admitem formulações em linguagem de funções, que contribuem para a clareza da exposição e impulsionam o desenvolvimento de ideias.

Para dar conta de toda essa generalidade, o conceito de função sofreu significativas mudanças ao longo de seu desenvolvimento histórico, até que se chegasse à definição atual de Bourbaki. Nem sempre no passado o conceito foi assim tão genérico como é hoje. Por exemplo, observe as definições de função abaixo, propostas respectivamente por Leonhard Euler[1] (1707-1783) e por Bernhard Riemann[2] (1826-1866), com pouco mais de um século de diferença.

> *Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes.*
>
> L. Euler, 1748

> *Suponhamos que z seja uma quantidade variável que possa assumir, gradualmente, todos os possíveis valores reais, então, se para cada um desses valores corresponde um único valor da quantidade indeterminada w, w é chamada uma função de z.* [...] *Não faz* [...] *qualquer diferença, se define-se a dependência da quantidade w da quantidade z como sendo arbitrariamente dada, ou como sendo determinada por certas operações das quantidades.*
>
> B. Riemann, 1852

Na definição de Euler, função é considerada apenas como uma *expressão analítica*, isto é, uma fórmula envolvendo as variáveis, números e constantes. O desenvolvimento da Matemática e da Física e a necessidade de resolver problemas cada vez mais complicados, forçou a generalização do conceito. De fato, Riemann chama atenção explicitamente para o fato de que é indiferente se uma função é definida por meio de uma fórmula envolvendo as operações ou não.

Como comentamos acima, atualmente, o conceito de função não está atrelado a existência de fórmulas algébricas, nem mesmo a variáveis numéricas. Uma função pode ter como variável, não apenas números, mas quaisquer objetos matemáticos – como vetores, conjuntos, e até mesmo outras funções (ver Exercício 1). Para saber mais, veja por exemplo [2].

Para Saber Mais

Inversa à Direita e Inversa à Esquerda

O Exemplo 1 mostra que pode haver funções $f : X \to Y$ tais que existe $g : Y \to X$ com $f \circ g = \mathcal{I}_Y$, mas não existe $g : Y \to X$ com $g \circ f = \mathcal{I}_X$, e vice-versa. Por isso, precisamos escrever as duas condições na definição de função inversa (Definição 3), pois uma condição não implica a outra.

Dada $f : X \to Y$, definimos (ver Exercícios 3 e 4):

(i) uma função $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = \mathcal{I}_Y$ é dita uma **função inversa à direita de** f;

(ii) uma função $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathcal{I}_X$ é dita uma **função inversa à esquerda de** f.

Assim, pode existir inversa à direita sem que exista inversa à esquerda, e vice-versa. Se ambas, existirem a função original será invertível.

No caso do Exemplo 1, p é função inversa à esquerda de q e, reciprocamente, q é função inversa à direita de p. Entretanto, nem p nem q são invertíveis.

Para Saber Mais

Os Tamanhos do Infinito

Os Teoremas 7 e 8 expressam ideias que podem parecer a princípio bastante intuitivas, a saber,

- *se existe uma injeção $f : X \to Y$, então o conjunto de saída X é "menor ou igual" do que o conjunto chegada Y, pois X é "suficientemente pequeno" para "caber dentro" de Y;*
- *se existe uma sobrejeção $f : X \to Y$, então o conjunto de saída X é "maior ou igual" do que o conjunto chegada Y, pois X é "suficientemente grande" para "cobrir" Y.*

Embora as demonstrações dos teoremas sejam relativamente simples e as ideias acima possam parecer claras, é preciso entendê-las com cuidado. No caso de **conjuntos finitos**, a cardinalidade de um conjunto finito X, denotada por $\#X$, é um número natural. Neste caso, podemos demonstrar (como consequência da Definição 6 e dos Teoremas 7 e 8) que:

(i) Existe $f : X \to Y$ bijetiva $\Leftrightarrow \#X = \#Y$

(ii) Existe $f : X \to Y$ injetiva $\Leftrightarrow \#X \leqslant \#Y$

(iii) Existe $f : X \to Y$ sobrejetiva $\Leftrightarrow \#X \geqslant \#Y$

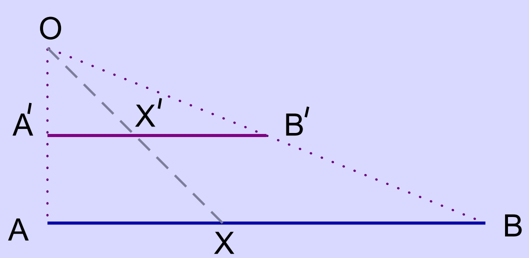
Portanto, para conjuntos finitos, as duas ideias intuitivas acima correspondem precisamente aos teoremas matemáticos. Entretanto, quando se tratam **conjuntos infinitos**, a coisa é mais complicada. A definição de conjuntos cardinalmente equivalentes também se aplica a conjuntos infinitos. De fato, no enunciado Definição 6 não há nenhuma restrição quanto à natureza dos conjuntos. No entanto, as cardinalidades de conjuntos infinitos têm propriedades que contrariam a intuição.

Para começar, um conjunto é infinito se, e somente se, *admite uma bijeção com um subconjunto próprio* (isto é diferente de vazio e do conjunto todo). Em outras palavras, um conjunto infinito é *cardinalmente equivalentes a uma parte própria de si mesmo*. Quando retiramos elementos de um conjunto finito, o subconjunto restante tem cardinalidade estritamente menor que o original. Entretanto, podemos retirar uma parte de um conjunto infinito *sem que a sua cardinalidade seja alterada*.

Esta surpreendente propriedade tem intrigado matemáticos há muito tempo. Galileo Galilei (1563-1643), em sua obra clássica *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, editada em 1638, cita os assim chamados "*paradoxos do infinito*". Um desses paradoxos é a associação

$$n \leftrightarrow 2n$$

que determina uma correspondência um a um entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares. Neste sentido, podemos pensar que existem tantos números naturais quanto pares – embora o conjunto dos pares esteja contido estritamente no dos naturais. Outro paradoxo de Galileo é a correspondência um a um entre dois segmentos de reta, de comprimentos distintos, por meio de uma construção geométrica simples (ilustrada abaixo).



Da mesma forma que existem tantos naturais quantos pares, podemos provar que existem tantos números naturais quantos inteiros e quantos racionais (isto será feito mais adiante). Hoje, essas propriedades dos conjuntos infinitos não são mais vistas como paradoxos. Grande parte da teoria atual de conjuntos infinitos se deve ao trabalho do matemático russo de origem alemã Georg Cantor (1845-1918).

Dentre as descobertas de Cantor está outra propriedade surpreendente: *nem todos os conjuntos infinitos são cardinalmente equivalentes*. Neste sentido, podemos pensar que existem infinitos "maiores" que outros. Por meio do argumento proposto por ele, que ficou conhecido como *diagonal de Cantor*, é possível mostrar, por exemplo, que, dada qualquer injeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sempre existirá um elemento $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{N}$. Isto é, não pode haver uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Assim, embora $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sejam cardinalmente equivalentes, a cardinalidade de $\mathbb{R}$ é estritamente maior que a destes conjuntos.

No final do século XIX, muitos matemáticos ilustres viam com séria desconfiança as novas ideias lançadas nos trabalhos pioneiros de Georg Cantor. Mas, lenta e seguramente, esse ponto de vista se consolidou. O trabalho de Cantor revelou-se tão significativo para a compreensão do conceito de infinito que David Hilbert (1862-1943), com sua extraordinária autoridade, referiu-se a ele da seguinte forma:

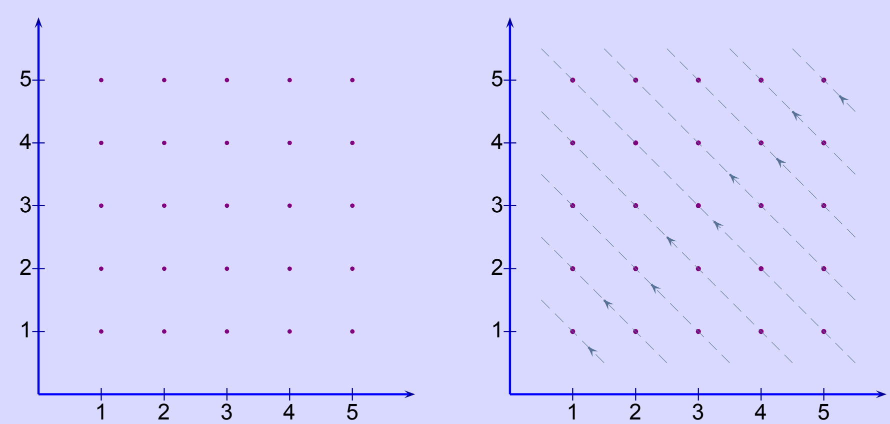
> *Ninguém nos expulsará desse paraíso que Cantor nos doou.*
>
> *D. Hilbert, 1925*

Para Saber Mais

Tantos Racionais Quantos Naturais

Já comentamos acima, que uma surpreendente descoberta de Georg Cantor é o fato de que *nem todos os conjuntos infinitos são cardinalmente equivalentes*. Talvez tão surpreendente quanto isso seja o fato de que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ *são* cardinalmente equivalentes – isto é, existem tantos números racionais quantos naturais.

A demonstração deste fato baseia-se na representação dos racionais na forma de fração, isto é, por meio de um par de números inteiros. Assim, podemos ver $\mathbb{Q}$ dentro do produto cartesiano $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\star}$. A representação geométrica abaixo (em que, por simplicidade consideramos apenas os pares de inteiros positivos) pode ajudar a entender esta demonstração. Se percorremos os pontos de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ao longo das diagonais, na forma mostrada abaixo, enumerando os pontos na ordem em que eles forem aparecendo, estaremos estabelecendo uma correspondência bijetiva entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.



Se fazemos corresponder a cada ponto (p,q) de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a fração $\frac{p}{q}$, temos uma função sobrejetiva de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sobre o conjunto $\mathbb{Q}^{+}$ dos números racionais positivos.

Esta função não é injetiva, pois, claramente, um mesmo número racional positivo é imagem de mais de um ponto do conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Por exemplo, o número $\frac{1}{2}$ é imagem de $(1,2)$ e também de $(2,4)$ (e de infinitos outros). Mas, isto não atrapalha a construção de uma correspondência bijetiva entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^{+}$, pois, quando esbarrarmos em um ponto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que já apareceu como número racional, basta "pulá-lo" e passar para o próximo, obtendo assim uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^{+}$. Isto nos permite concluir que existem tantos naturais quanto racionais positivos. A generalização deste argumento mostra-nos que

$\mathbb{N}$ é cardinalmente equivalente a $\mathbb{Q}$. Por isso, dizemos que $\mathbb{Q}$ é um conjunto *enumerável*.

Na Sala de Aula

Fórmulas e Funções

Como comentamos no início desta unidade, uma fórmula algébrica, por si só, não define uma função. Por exemplo, a expressão $y = x^2$ pode ser usada para definir a lei de associação de várias funções, tais como:

$$\begin{array}{rccc} p_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} p_2: & [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

Embora sejam definidas pela mesma fórmula algébrica, p_1 e p_2, acima, são *funções diferentes* – tanto que uma é bijetiva e a outra não. Por outro lado, existem funções que não são definidas por uma única fórmula em todo o seu domínio, como por exemplo

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, & \text{se } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } \ x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \end{array}$$

A restrição do conceito de função à ideia de fórmula algébrica pode ser tão forte, que alguns alunos têm dificuldade em entender funções definidas por mais de uma expressão como uma função só (como se cada uma das expressões definisse uma função diferente).

Na Sala de Aula

A Generalidade do Conceito de Função

Como comentamos acima, a lei de associação de uma função não precisa necessariamente admitir representação por meio de fórmula algébrica. Mais do que disso, as variáveis de uma função podem ser quaisquer objetos matemáticos, não apenas números (ver Exercício 1). De fato, a definição do conceito (Definição 1) não estabelece nenhuma restrição para o domínio ou para o contradomínio: estes podem ser conjuntos quaisquer, não necessariamente conjuntos numéricos.

No ensino básico, estamos acostumados a lidar principalmente com funções em contextos numéricos, isto é, com *funções reais de variável real*. Entretanto, não há razão para se evitar o conceito de função em outros campos da matemática em que este aparece naturalmente. Em muitos casos, usar o conceito de função em outros campos não traz dificuldades conceituais adicionais e, ao contrário, pode ser enriquecedor para os alunos não apenas por promover a ampliação de sua concepção de funções, como também por permitir formulações mais claras para as próprias situações matemáticas em que o conceito é empregado.

Especialmente em geometria, diversas situações usualmente estudadas no ensino básico podem ser expressas por meio de dependência funcional. Este é o caso, por exemplo, dos conceitos de congruência e de semelhança de figuras planas (e também espaciais). Congruência e semelhança são noções que se aplicam a figuras geométricas em geral. Entretanto, na escola estes são comumente apresentados em um contexto restrito: os assim chamados "casos de congruência" e "casos de semelhança" – que se aplicam apenas a triângulos. Pode ser enriquecedor para os alunos perceber figuras congruentes como resultantes de um deslocamento (isto é, uma translação), e figuras semelhantes como resultantes de uma ampliação ou uma redução (isto é, uma homotetia). Neste caso, não há qualquer restrição sobre as figuras com que se trabalha – estas não precisam nem mesmo ser polígonos ou outras figuras regulares. Há diversos materiais concretos que podem ser usados para servir de apoio para essa abordagem. Translações e homotetias são exemplos de funções, cujo domínio e o contradomínio são o plano (ou o espaço) euclidiano.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14

[3] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[4] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[5] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[6] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[7] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[8] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[9] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[11] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

4

Comensurabilidade e Números Reais

Sumário

4.1 Introdução 2

4.2 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis 4

4.3 Números Reais 8

4.4 Operações e Ordem na Reta Real 11

4.5 Exercícios Recomendados 14

4.6 Exercícios Suplementares 15

4.7 Textos Complementares 16

4.1 Introdução

Esta Unidade e as duas seguintes serão dedicadas ao estudo dos números reais. Este é, sem dúvida, um dos tópicos cuja abordagem no ensino médio envolve maiores dificuldades. Tais dificuldades estão relacionadas com as características específicas do conjunto dos reais. Em geral, no ensino básico, a introdução de cada um dos conjuntos numéricos é motivada por limitações algébricas do conjunto anterior. Por exemplo, as motivações para a construção de $\mathbb{Z}$ e para a construção de $\mathbb{Q}$ baseiam-se, respectivamente, na impossibilidade de resolver quaisquer subtrações em $\mathbb{N}$ e na impossibilidade de resolver quaisquer divisões em $\mathbb{Z}$. Essas construções são ainda ilustradas por aplicações "concretas" por meio, tipicamente, de problemas envolvendo saldos bancários, ou variações de temperatura, para os inteiros e divisões de grandezas (apresentadas em problemas numéricos ou geométricos) que fornecem resultados não inteiros, para os racionais. Até mesmo a introdução de $\mathbb{C}$ tem como base a impossibilidade de determinar raízes reais para qualquer polinômio com coeficientes reais.

No entanto, quando se trata da introdução de $\mathbb{R}$, o problema torna-se consideravelmente mais delicado. Em primeiro lugar, a expansão de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não é um salto puramente algébrico, pois envolve necessariamente alguma noção de *convergência*. Além disso, dificilmente se encontrarão aplicações "concretas" ou "cotidianas" que justifiquem a necessidade dessa expansão. Os números racionais dão conta perfeitamente das medições *empíricas* de segmentos ou áreas, por exemplo – enquanto os números reais atendem ao *problema teórico da proporção de grandezas de mesma espécie*, isto é, à *construção de uma teoria consistente de medida*.

Por exemplo, ao medir a diagonal d do quadrado unitário com uma régua graduada, encontraremos alguma aproximação decimal finita para o número $\sqrt{2}$. Ao aplicarmos o Teorema de Pitágoras para determinar a medida d (ou, de forma mais geral, a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado qualquer), concluiremos que esta deve ser tal que $d^2 = 2$. Porém, é necessário ainda mostrar que não existe um número racional que satisfaça essa condição. Além disso, mesmo se considerarmos todos os números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros (como $d^2 = 2$), chamados *números algébricos*, ainda não esgotaremos todos os números reais – aqueles que não satisfazem esta condição são chamados *números transcendentes*. O exemplo mais conhecido de número transcendente é sem dúvida o número π. Na educação básica, definimos π como a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência. Entretanto, as técnicas necessárias para as demonstrações de que π não é racional e não é algébrico extrapolam em muito a matemática do ensino médio (para saber mais, veja [3]).

Em geral, a solução dos livros didáticos do ensino básico para lidar com as dificuldades discutidas acima é simplesmente desviar delas, por meio de abordagens em ciclo vicioso (que se baseiam ou na representação decimal ou a representação em forma de fração): os irracionais são apresentados como sendo "os números que não são racionais" e os reais como "os números que são racionais ou irracionais". Ou seja, a introdução dos números reais parte da pressuposição da existência dos próprios números reais. Esse modelo de abordagem apresenta problemas não só do ponto de vista matemático, pois é logicamente inconsistente, como também do ponto de vista pedagógico, pois a existência dos reais é assumida como dada e os problemas matemáticos que fazem necessária a expansão do conjuntos dos racionais e a criação de "novos números" são ignorados.

De fato, não é razoável esperar que, ao final do ensino médio, o aluno entenda completamente o conceito de número real do ponto de vista matemático formal, considerando todas as dificuldades teóricas envolvidas – tal compreensão extrapola, em muito, os objetivos do ensino básico. Entretanto, isto não justifica que simplesmente nos desviemos de tais dificuldades. Para os alunos no ensino médio, talvez seja mais importante conhecer os problemas matemáticos que impulsionaram a criação dos números reais, do que compreendê-los do ponto de vista formal.

Sendo assim, é fundamental que o professor conheça tais problemas, que remontam à ideia de *grandezas incomensuráveis*, na Matemática Grega (para saber mais, veja, por exemplo, [2]). Na teoria grega de proporções entre grandezas geométricas (comprimentos, áreas e volumes), quando é possível encontrar uma unidade comum segundo a qual todas as grandezas envolvidas têm medidas inteiras, estas grandezas são ditas *comensuráveis* (literalmente, *que podem ser medidas juntas*). Entretanto, dado um conjunto finito de grandezas, nem sempre é possível encontrar uma unidade comum da qual todas sejam múltiplos inteiros. Este é o caso, por exemplo, do lado e a diagonal do quadrado, ou do perímetro e o diâmetro do círculo.

Nesta unidade, veremos de que modo o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduz à noção de número real. Usaremos como protótipo a determinação do comprimento de um segmento de reta. Este exemplo de medição é tão significativo que o conjunto dos números reais é também conhecido como a *reta real* ou, simplesmente, a *reta*.

4.2 Segmentos Comensuráveis e Incomensuráveis

Seja AB um segmento de reta. Para medi-lo, é necessário fixar um segmento padrão u, chamado *segmento unitário*, ou *unidade*. Por definição, a medida do segmento u é igual a 1. Estipulamos ainda que

(i) segmentos congruentes têm a mesma medida;

(ii) se um segmento AB é decomposto, por $n-1$ pontos interiores, em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses n segmentos.

Portanto, se estes segmentos parciais forem todos congruentes a u, a medida de AB em relação a u (que representaremos por $\overline{AB}$) será igual a n. Neste caso, u cabe n vezes em AB, isto, é AB é um múltiplo inteiro de u. É claro que, uma vez fixado um segmento unitário u, sabemos que nem todos os demais segmentos serão múltiplos inteiros deste. Porém, se verificamos que um segmento AB não é múltiplo inteiro de u, podemos tentar subdividir u para obter uma nova unidade u' em relação à qual a medida de AB será um número natural.

No exemplo ilustrado na Figura 4.1, temos que, em relação à unidade u, a medida de AB é igual a 3, mas a medida de CD não é um número natural. Quando subdividimos a unidade em 2, obtendo uma nova unidade u' tal que $u = 2 \cdot u'$, temos que, em relação a u', a medida de AB será 6 e a medida de CD será 5.

Mas, dados dois segmentos quaisquer, será que é sempre possível encontrar uma unidade comum u em relação à qual ambos terão medidas inteiras? Desde a Grécia antiga, já sabemos que a resposta é *não*.

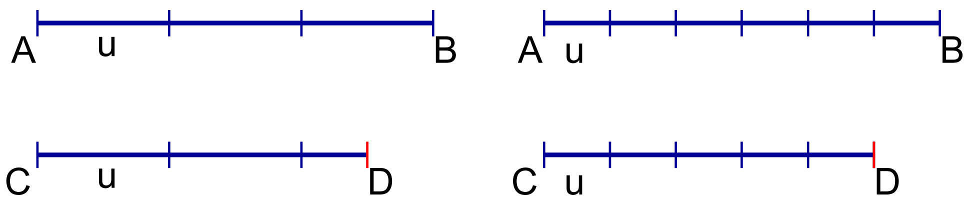


Figura 4.1: Segmentos comensuráveis.

A seguir, reproduzimos uma demonstração dos gregos antigos (adaptada para a simbologia matemática atual) para o fato de que o lado e a diagonal de um quadrado não podem ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de uma unidade comum u.

Seja $ABCD$ um quadrado de lado a e diagonal d. Suponhamos, por absurdo, que existam um segmento u e $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a = m \cdot u$ e $d = n \cdot u$. Esta suposição nos levará a uma contradição, como veremos a seguir.

Traçamos um arco de circunferência com centro no vértice C e raio $\overline{CB}$ e marcamos a interseção com a diagonal AC. Obtemos assim um ponto $B_1 \in AC$ tal que $\overline{B_1C} = \overline{BC} = a$. Em seguida, marcamos um ponto $C_1 \in AB$ tal que $B_1C_1 \perp AC$. Construímos desta forma um quadrado $AB_1C_1D_1$ de lado a_1 e diagonal d_1 (Figura 4.2).

Observamos que

$$\overline{BC} = \overline{B_1C} \Rightarrow \widehat{CBB_1} = \widehat{CB_1B} \Rightarrow \widehat{C_1BB_1} = \widehat{C_1B_1B} \Rightarrow \overline{BC_1} = \overline{B_1C_1} = a_1.$$

Logo,

$$a_1 = \overline{AB_1} = \overline{AC} - \overline{B_1C} = \overline{AC} - \overline{BC} = d - a = (q - p)\, u.$$

Além disso, o triângulo CBB_1 é isósceles, por construção. Logo, $\widehat{CBB_1} = \widehat{CB_1B}$. Como os ângulos CBC_1 e CB_1C_1 são retos, concluímos que $\widehat{C_1BB_1} = \widehat{C_1B_1B}$. Logo, o triângulo BC_1B_1 também é isósceles. Então, $\overline{BC_1} = \overline{B_1C_1}$. Então,

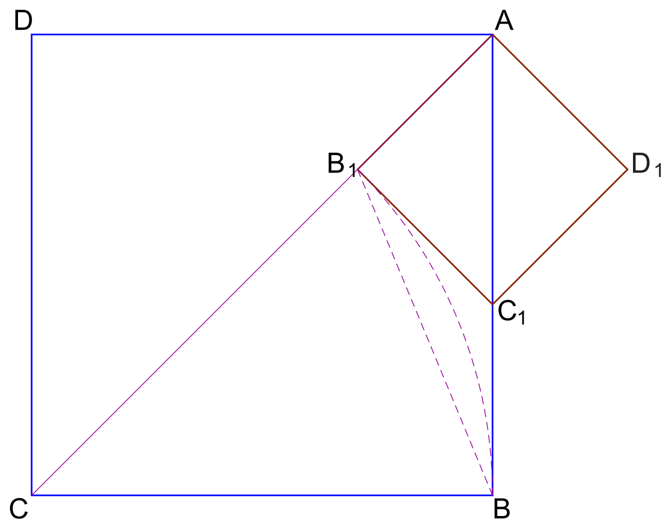


Figura 4.2: Segmentos incomensuráveis.

$$d_1 = \overline{AC_1} = \overline{AB} - \overline{BC_1} = a - a_1 = (2p - q)\,u.$$

Portanto, a_1 e d_1 também são múltiplos inteiros de u.

Além disso, como $a = a_1 + d_1$ e $a_1 < d_1$ (pois a_1 e d_1 são, respectivamente, lado e diagonal de um mesmo quadrado), tem-se que

$$2\,a_1 < a.$$

Aplicando a mesma construção ao quadrado $AB_1C_1D_1$, obtemos um novo quadrado $AB_2C_2D_2$, com lado a_2 e diagonal d_2 também múltiplos inteiros de u e tal que $2\,a_2 < a_1$. Portanto, $4\,a_2 < 2\,a_1 < a$.

Continuando este processo indefinidamente, obtemos uma sequência de quadrados $(A_nB_nC_nD_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com lados a_n e diagonais d_n, todos múltiplos inteiros de u, tais que o lado de cada quadrado é menor que a metade do lado do quadrado anterior, isto é, $2\,a_n < a_{n-1}$. Portanto,

$$2^n a_n < a = p\,u.$$

Neste caso, para n suficientemente grande, a_n seria menor que u, contradizendo a fato de ser seu múltiplo inteiro.

Definição 1

Sejam AB e CD dois segmentos. Se existe um segmento u e dois números naturais m e n tais que $AB = m \cdot u$ e $CD = n \cdot u$, dizemos que AB e CD são **comensuráveis**. Caso contrário, dizemos que AB e CD são **incomensuráveis**.

A descoberta da existência de grandezas incomensuráveis remonta ao século IV a.C., quando os matemáticos gregos demonstraram a incomensurabilidade do lado e da diagonal de qualquer quadrado (por meio do argumento reproduzido acima) e de outras proporções importantes.

Os gregos antigos consideravam *números* (*arithmos*) apenas os que hoje chamamos de números naturais. Podemos interpretar as grandezas comensuráveis como aquelas cuja razão pode ser representada como uma razão entre números (naturais). Por exemplo, na Figura 4.1, os segmentos AB e CD estão na mesma razão que os números 6 e 5. Embora os gregos conhecessem uma teoria de proporções bem fundamentada, que dava conta da comparação de grandezas comensuráveis e não comensuráveis, essas proporções *não eram consideradas como números*.

Entretanto, podemos usar o conceito de comensurabilidade para construir o conjunto dos números reais (o que faremos na próxima seção). Podemos pensar na ideia de proporção como uma *relação de equivalência entre pares de segmentos*. Assim, o par de segmentos A_1B_1, C_1D_1 será considerado equivalente ao par de segmentos A_2B_2, C_2D_2 se sua medidas estiverem *na mesma razão*, isto é se forem *proporcionais*:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{C_2D_2}}\,.$$

Cada par de segmentos AB, CD fixado gera uma *classe de equivalência*, formada por todos os pares de segmentos que estão na mesma razão que AB, CD, isto é, que são proporcionais a AB, CD. Hoje, associamos cada uma dessas classes de proporcionalidade (tanto as geradas por grandezas comensuráveis quanto aquelas por grandezas incomensuráveis) a um objeto matemático, que chamamos de *número real* (associação que os gregos não faziam). Essencialmente, é esta ideia que usaremos para construir o conjunto dos números reais e sua representação na reta, fixando uma unidade padrão u.

☞ Para Saber Mais - Contar e Medir - Clique para ler

4.3 Números Reais

Visando uma construção objetiva do conjunto dos números reais, a partir de agora vamos fixar uma unidade padrão de referência u, em relação à qual mediremos todos os segmentos. A fim de ganhar uma ideia mais concreta dos números irracionais e, em particular, situá-los em relação aos racionais, a construção a seguir consiste em associar os números reais aos pontos de uma reta. Associaremos cada ponto X desta reta a um número x, que chamaremos de **abscissa** de X:

$$X \leftrightarrow x \ .$$

Mas, para que esta construção esteja completa, de forma que cada ponto esteja associado a um número, e cada número esteja associado a um ponto, *precisaremos inventar novos números* – que denominamos *irracionais*. Na construção que se segue, descreveremos esta associação. Vamos supor conhecidos apenas os números naturais e definiremos os demais conjuntos numéricos ao longo da construção.

Tomemos uma reta, em que são fixados um ponto O, chamado a **origem**, e um ponto A, diferente de O. Tomaremos o segmento OA como unidade de comprimento u. A reta OA será chamada a **reta real**, ou o **eixo real**. A origem O divide a reta em duas semirretas. A que contém A chama-se a **semirreta positiva**. A outra é a **semirreta negativa**. Diremos que os pontos da semirreta positiva estão à direita de O e os da semirreta negativa à esquerda de O e, com isto, estabelecemos uma *orientação* para a reta real.

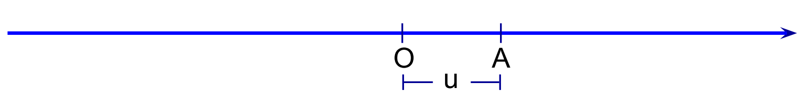


Figura 4.3: A reta real.

Seja X um ponto qualquer na reta OA. Se o ponto X estiver à direita de O e o segmento de reta OA couber um número exato $n \in \mathbb{N}$ de vezes em OX, diremos que a abscissa de X é o número natural n. Se o segmento de reta OA couber um número exato n de vezes em OX, mas X estiver à esquerda de O, diremos que a abscissa de X é o *inteiro negativo* $-n$. O conjunto $\mathbb{Z}$, formado pelo número 0 e pelas abscissas dos pontos X do eixo real, tais que o segmento unitário cabe um número exato de vezes em OX, chama-se o conjunto dos *números inteiros*. Ele é a reunião $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$, dos números naturais com 0 e o conjunto $-\mathbb{N}$ dos números negativos.

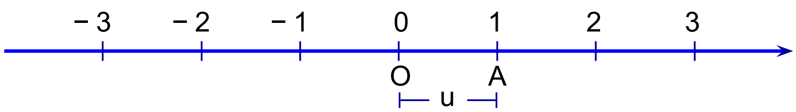


Figura 4.4: Números inteiros.

Mais geralmente, se o ponto X, pertencente à reta real, é tal que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, existe algum segmento w caiba n vezes em OA e m vezes em OX. Isto é, no caso de X estar à direita da origem, temos:

$$OA = n \cdot w \quad \text{e} \quad OX = m \cdot w.$$

Neste caso, diremos que a abscissa do ponto X é $\frac{m}{n}$ ou $-\frac{m}{n}$, conforme X esteja à direita ou à esquerda da origem. O conjunto $\mathbb{Q}$, formado pelas abscissas dos pontos X da reta real tais que o segmento OX é comensurável com o segmento unitário OA, chama-se o conjunto dos *números racionais*. Isto é, os números racionais são representados por frações $\frac{m}{n}$, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Isto inclui, naturalmente, o caso em que o segmento OA cabe um número exato de vezes em OX. Neste caso, tem-se $n = 1$ e a abscissa de X pertence a $\mathbb{Z}$. Temos portanto $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

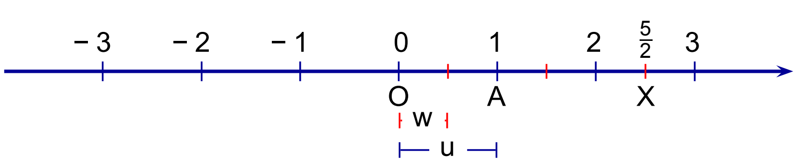


Figura 4.5: Números racionais.

A Figura 4.5 ilustra o ponto X de abscissa $\frac{5}{2}$. Temos que o segmento u não cabe um número exato de vezes em OX. Mas, se dividimos u em duas partes iguais, obtendo $w = \frac{1}{2} \cdot u$, teremos que $OX = 5 \cdot w$. Portanto, $OX = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot u = \frac{5}{2} \cdot u$.

Porém, estes pontos não esgotam a reta, uma vez que, como vimos, existem segmentos OX que são incomensuráveis com u. Para verificar este fato, basta construir um quadrado de lado OA e tomar um segmento OX congruente com a diagonal desse quadrado.

Se, agora, tomarmos um ponto X na reta real de tal modo que os segmentos OX e OA sejam incomensuráveis, inventaremos um número x, que chamaremos de **irracional**, e diremos que x é a abscissa do ponto X. O número irracional x será considerado positivo ou negativo, conforme o ponto X esteja à direita ou à esquerda da origem, respectivamente. Quando X está à direita da origem, x é, por definição, a medida do segmento OX. Se X está à esquerda da origem, a abscissa x é essa medida precedida do sinal menos.

Chamaremos de **conjunto dos números reais** o conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos são os números racionais, isto é, as abscissas dos pontos X na reta real tais que OX é comensurável com u, e os números irracionais, isto é, as abscissas dos pontos X ais que OX é incomensurável com u.

Isto completa a construção do conjunto $\mathbb{R}$. Existe uma correspondência biunívoca entre a reta OA e o conjunto $\mathbb{R}$, que associa cada ponto X dessa reta a sua abscissa, isto é, a medida do segmento OX, ou esta medida precedida do sinal menos. Dado um ponto X na reta real, três possibilidades (mutuamente excludentes) podem ocorrer: X pode estar à direita da origem, à esquerda da origem, ou coincidir com a origem. Portanto, a *abscissa* $x \in X$ de X será um número positivo no primeiro caso, um número negativo no segundo, ou 0 (zero) no terceiro.

Finalmente, temos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

Em resumo, dado qualquer segmento OX, este será ou não comensurável com a unidade de medida u. Em caso afirmativo, existirá um pequeno segmento w, cabendo n vezes em u e m vezes em OX, isto é, $u = n\,w$ e $\overline{OX} = m\,w$. Logo, a medida de w será a fração $\frac{1}{n}$ e a medida de AB, por conseguinte, será m vezes $\frac{1}{n}$, ou seja, igual a $\frac{m}{n}$.

De forma mais geral, se os segmentos AB e CD são comensuráveis, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ e algum segmento w tais que $\overline{AB} = p\,w$ e $\overline{CD} = q\,w$. Neste caso, associamos a razão entre as medidas de AB e CD com o número racional $\frac{p}{q}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,.$$

Assim, a razão entre segmentos incomensuráveis é um número irracional. Por exemplo, a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado se traduz, em termos atuais, no fato de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. A demonstração para este fato, que reproduzimos acima (p. 5), traduz-se numa prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Podemos dar uma prova não geométrica, baseada na decomposição em fatores primos de um número natural.

Seja $\alpha = \frac{d}{a}$. Em primeiro lugar, pelo Teorema de Pitágoras, verificamos que $a^2 + a^2 = d^2$, logo, $\left(\frac{d}{a}\right)^2 = 2$. Se existissem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha = \frac{m}{n}$, teríamos portanto,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

o que implicaria em $m^2 = 2\,n^2$. Mas, como m^2 é um número natural elevado ao quadrado, todos os fatores em sua decomposição em fatores primos são elevados a expoentes pares. O mesmo ocorre com n^2. Então, o expoente do fator 2 na decomposição de $2\,n^2$ é ímpar. Como concluímos que $m^2 = 2\,n^2$, isto é uma contradição.

☞ Na Sala de Aula - Comensurabilidade e Divisão de Frações - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - Comensurabilidade e Medição de Áreas - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Um Número Incomensurável? - Clique para ler

4.4 Operações e Ordem na Reta Real

O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como o modelo aritmético de uma reta enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática atual.

A interpretação dos números reais como abscissas dos pontos de uma reta fornece uma visão intuitiva bastante esclarecedora sobre a relação de ordem, a soma e também o produto de números reais. Consideremos X e Y pontos na reta real dos quais x e y, respectivamente, são as abscissas.

Diz-se que x é *menor* do que y, e escreve-se $x < y$ quando X está à esquerda de Y, isto é, quando o sentido de percurso de X para Y é o mesmo de O para A. Quanto à soma, $x+y$ é a abscissa do ponto Z tal que o segmento XZ tem o mesmo comprimento e o mesmo sentido de percurso de OY (Figura 4.6). O produto xy dos números reais x, y pode ser definido geometricamente com base no Teorema de Tales, quando $x > 0$ e $y > 0$, como mostra a Figura 4.7, Nos demais casos, é só mudar o sinal de xy convenientemente.

Note que, como a determinação geométrica da soma é feita por simples justaposição, *o processo depende da origem, mas não da unidade*. Porém, para determinar geometricamente o produto *devemos ter como referencia o segmento unitário*.

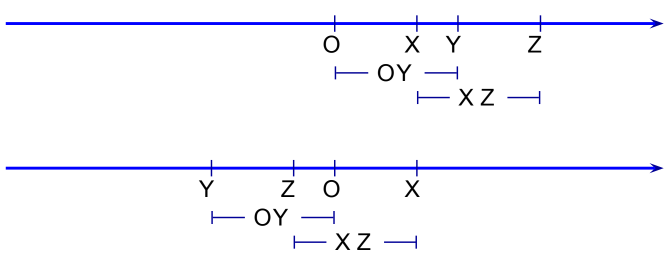


Figura 4.6: Soma de números reais.

É interessante verificar geometricamente, para $z > 0$, em algumas situações, a seguinte propriedade:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z.$$

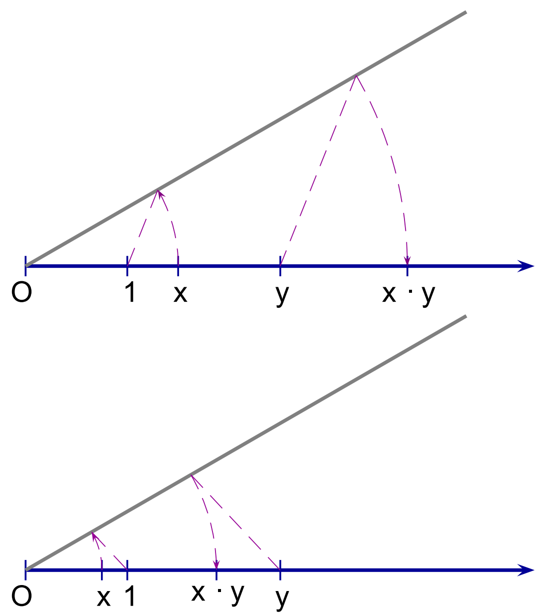


Figura 4.7: Produto de números reais.

4.5 Exercícios Recomendados

1. Fixemos uma unidade de medida u. Sejam AB e CD dois segmentos comensuráveis entre si. Responda às perguntas a seguir, justificando suas respostas.

   (a) Podemos afirmar que as medidas de AB e de CD em relação a u são números racionais?

   (b) Se a medida de AB é um número racional, o que podemos afirmar sobre a medida de CD?

2. Explique por que a unicidade da decomposição em fatores primos é importante na demonstração de $\sqrt{2}$ é irracional (p. 11).

3. O objetivo desta questão é generalizar a demonstração de que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (p. 11).

   (a) Adapte a demonstração para concluir que se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo, então $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

   (b) Dado $n \in \mathbb{N}$ qualquer, mostre que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Isto é, não pode existir um número natural cuja raiz quadrada seja um racional não inteiro.

4. Sabe-se que o número π, definido como a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma círculo, é irracional. Entretanto, os argumentos matemáticos para provar este fato são avançados demais para o ensino médio.

   (a) Que argumentos você empregaria para mostrar aos alunos do ensino médio que o número π está bem definido, isto é, que a razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo independe do círculo, embora o perímetro e o diâmetro variam? Justifique sua resposta.

   (b) Que estratégias você usaria para discutir a irracionalidade de π no ensino médio? Justifique sua resposta.

5. Explique e justifique a construção geométrica para o produto de dois números reais (Figura 4.7, p. 13).

4.6 Exercícios Suplementares

1. Nesta unidade, discutimos a interpretação da operação de divisão como medida (p. 18), em que consideramos o divisor q como uma unidade de medida e o dividendo p como uma grandeza a ser medida. Embora esta interpretação se aplique a quaisquer números reais, na prática, seu emprego na representação de divisões entre racionais pode ser menos ou mais complicado, dependendo do exemplo. Em linhas gerais, podemos destacar quatro "graus de dificuldade", a saber:

(i) $p > q$ *e* p *é múltiplo inteiro de* q.
Neste caso, o resultado da divisão é um número natural.

(ii) $p > q$*, mas* p *não é múltiplo inteiro de* q.
Neste caso, o resultado da divisão é um número racional maior do que 1.

(iii) $p < q$ *e* q *é múltiplo inteiro de* p.
Neste caso, o resultado da divisão é o inverso de um número natural.

(iv) $p < q$*, mas* q *não é múltiplo inteiro de* p.
Neste caso, o resultado da divisão é um número racional menor do que 1.

Os dois exemplos tratados aqui correspondem aos casos (i) e (ii). Use a interpretação da divisão como medida para representar as divisões $\frac{1}{4} \div \frac{5}{2}$ e $\frac{2}{3} \div \frac{5}{2}$, que correspondem aos casos (iii) e (iv), respectivamente. Discuta os graus de dificuldade.

2. Na discussão sobre áreas de retângulos (p. 22), afirmamos que, *se pelo menos um dos lados for incomensurável com* u*, não será possível encontrar uma subdivisão inteira de* u *que caiba um número inteiro simultaneamente em ambos os lados do retângulo*.

Podemos afirmar, neste caso, que a medida da área do retângulo em relação a unidade u^2, será um *número irracional*? Justifique sua resposta e a interprete geometricamente, relacionando-a com subdivisões de u^2.

4.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Contar e Medir

A existência de grandezas incomensuráveis mostra que *o problema da medida não pode ser reduzido ao problema da contagem*. Isto é, se só existissem segmentos comensuráveis, sempre que estivéssemos lidando com um problema envolvendo um número finito de segmentos, seria possível encontrar uma unidade comum u em relação à qual as medidas de todos seriam números naturais. Medir esses segmentos reduzir-se-ia a *contar quantas vezes* u *caberia* em cada um deles. A razão entre as medidas de quaisquer dois segmentos poderia, neste caso, ser representada por uma razão entre números naturais.

Em termos atuais, isto equivale a dizer que qualquer proporção seria representada por um número racional. Portanto, os números racionais seriam suficientes para expressar as medidas de todos os segmentos existentes. Assim, as grandezas incomensuráveis mostram a necessidade da construção dos números reais *para resolver o problema teórico da medida*.

Para Saber Mais

Um Número Incomensurável?

Nos meios de comunicação e em linguagem corrente, em geral, a palavra *incomensurável* é muitas vezes usada em frases do tipo: "havia um número incomensurável de formigas em nosso piquenique". Em sala de aula, evite usar o termo com este sentido. Em Matemática, incomensurabilidade é uma relação entre duas grandezas da mesma espécie; não dá ideia de uma quantidade muito grande. Uma palavra mais adequada no caso das formigas seria *incontável*. Noutros casos, como uma região gigantesca, poderia ser *imensurável*. Uma grandeza não pode ser incomensurável por si só, apenas quando comparada com outra da mesma espécie.

Na Sala de Aula

Comensurabilidade e Divisão de Frações

Tradicionalmente, uma das maiores dificuldades da Matemática do ensino básico são as operações com frações, especialmente a divisão. Estamos mais acostumados em interpretar a operação de divisão como *repartição em partes iguais*, em questões do tipo: "*Se dividimos um saco com* 20 *balas em* 5 *saquinhos com a mesma quantidade de balas cada, quantas balas haverá em cada saquinho?*" Entretanto, esta interpretação não se aplica quando o divisor não é um número natural. Na interpretação da divisão como repartição em partes iguais, são dados *a grandeza total e o número de partes* e pergunta-se *o tamanho de cada parte*.

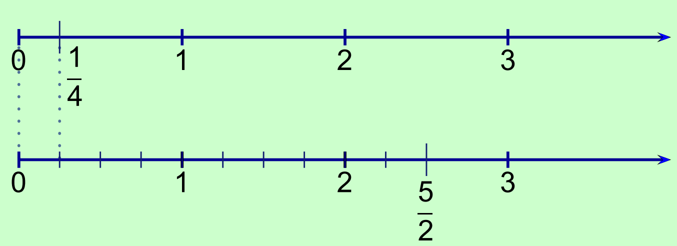
Em vez disso, podemos dar *a grandeza total e o tamanho de cada parte* e perguntar *o número de partes*. Por exemplo, podemos propor a questão: "*Se dividimos um saco com* 20 *balas em saquinhos com* 4 *balas cada, quantos saquinhos formaremos?*" Esta é a interpretação da operação de divisão como *medida* – que faz sentido mesmo quando o divisor não é um número natural. Observe que a pergunta é quantas vezes 4 balas *cabem* em 20. Portanto, é como se usássemos o saquinho de 4 para *medir* o saco de 20 balas.

Assim, dividir o número racional p pelo número racional q corresponde a *determinar a medida de* p *quando* q *é tomado como unidade*. Observe os exemplos a seguir.

Exemplo

$\dfrac{5}{2} \div \dfrac{1}{4}$.

Sejam $p = \dfrac{5}{2}$ e $q = \dfrac{1}{4}$. Neste caso, observamos que q cabe exatamente 10 vezes em p, isto é, se tomarmos o segmento de comprimento q, a medida do segmento de comprimento p será igual a 10. Assim, $\dfrac{5}{2} = 10 \times \dfrac{1}{4}$, ou $\dfrac{5}{2} \div \dfrac{1}{4} = 10$.



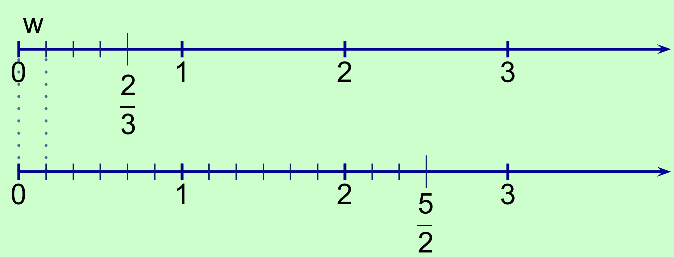
No Exemplo 1, o divisor cabe um número exato de vezes no dividendo. Logo, o resultado da divisão é um número natural. No caso em que isso não ocorre, devemos buscar uma unidade comum entre o dividendo e o divisor.

Exemplo

$\dfrac{5}{2} \div \dfrac{2}{3}$.

Sejam $p = \dfrac{5}{2}$ e $q = \dfrac{2}{3}$.

Para encontrar uma unidade w comum entre p e q, da qual ambos sejam múltiplos inteiros, devemos subdividir os segmento de comprimento $\dfrac{1}{2}$ em 3 e segmento de comprimento $\dfrac{1}{3}$ em 2. Isto é, dividimos p em 15 partes iguais e q em 4 partes iguais. Portanto, como $p = 15 \cdot w$ e $w = \dfrac{1}{4} \cdot q$, a medida de p em relação a q será igual a $w = \dfrac{15}{4}$. Assim, $\dfrac{5}{2} = \dfrac{15}{4} \times \dfrac{2}{3}$, ou $\dfrac{5}{2} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{4}$.



De forma geral, para dividir $p = \dfrac{a}{b}$ e $q = \dfrac{c}{d}$, podemos encontrar uma unidade comum w, subdividindo $\dfrac{1}{b}$ em d partes iguais e $\dfrac{1}{d}$ em b partes iguais. Logo, teremos que

(i) w cabe d vezes em $\dfrac{1}{b}$, e $\dfrac{1}{b}$ cabe a vezes em p, portanto w cabe $a\,d$ vezes em p, isto é, $p = (a\,d) \cdot w$;

(ii) analogamente, w cabe b vezes em $\dfrac{1}{d}$, e $\dfrac{1}{d}$ cabe c vezes em q, portanto w cabe $b\,c$ vezes em q, isto é, $w = \dfrac{1}{b\,c} \cdot q$.

Assim, considerando que w é uma subdivisão da unidade q e contanto quantas vezes w cabe em p, concluímos que a medida de p quando q é tomando como unidade será igual a $a\,d\,\dfrac{1}{b\,c} = \dfrac{a\,d}{b\,c}$. Assim, chegamos a uma dedução da conhecida fórmula de divisão de frações:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c}.$$

A interpretação da divisão como medida se aplica a qualquer divisão entre dois números reais, representados, por exemplo, por segmentos de reta. No caso dos segmentos serem *incomensuráveis*, não será possível encontrar uma unidade, como fizemos acima, e o resultado da divisão será um número *irracional*. Neste caso, podemos também usar subdivisões do divisor para encontrar *aproximações racionais* para o resultado da divisão. Voltemos por exemplo, ao caso do lado e a diagonal do quadrado. Já sabemos que não existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $d = \dfrac{m}{n} \cdot a$, isto é, $\dfrac{d}{a} \notin \mathbb{Q}$. Porém, podemos verificar que

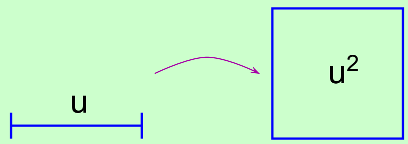
$$1 < \frac{d}{a} < \frac{3}{2}, \qquad \frac{4}{3} < \frac{d}{a} < \frac{5}{3}, \qquad \frac{5}{4} < \frac{d}{a} < \frac{6}{4},$$

e assim por diante. Em sala de aula, essas aproximações podem ser verificadas com ajuda de uma calculadora ou computador.

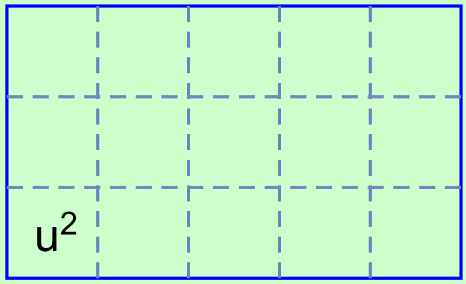
Comensurabilidade e Medição de Áreas

Na Sala de Aula

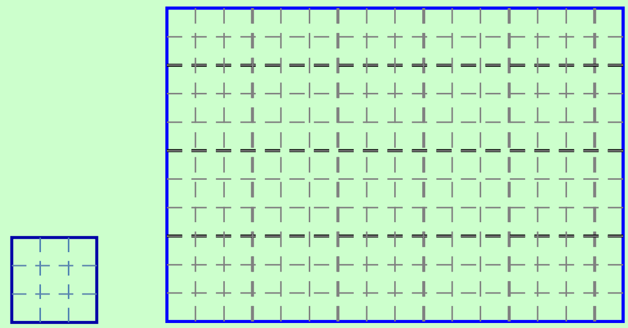
Para introduzir o conceito de área no ensino fundamental, antes de mais nada, é importante deixar claro que uma unidade de medida de comprimento u determina uma unidade de medida de área u^2, representada pelo quadrado de lado u, chamado *quadrado unitário*.



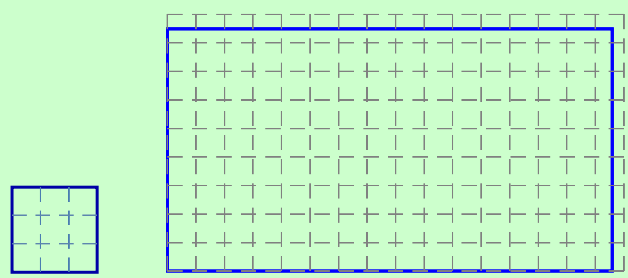
Se queremos medir a área de um retângulo cujos lados são ambos múltiplos inteiros de u, basta preenchê-lo com quadrados unitários e contar esses quadrados. A medida da área do retângulo, em relação à unidade u^2, será dada pelo número m de quadrados unitários que cabem no retângulo. Neste caso, a medida da área é um *número natural*. No exemplo abaixo, a medida da área é $S = 15\,u^2$.



Se esses lados não são múltiplos inteiros de u, mas são comensuráveis com u, podemos encontrar um subdivisão, $w = \frac{1}{k} \cdot u$, da qual ambos sejam múltiplos inteiros. Esta subdivisão determinará uma nova unidade de área, $w^2 = \frac{1}{n} \cdot u^2$, em que $n = k^2$. Basta então preencher o retângulo com quadrados de lado w e contar esses quadrados. A medida da área do retângulo, em relação a unidade u^2, será dada por $\frac{m}{n}$, sendo m o número de quadrados de lado w que cabem no retângulo. Neste caso, a medida da área é um *número racional*. No exemplo abaixo, a medida da área é $S = 176\,w^2 = 176\,\frac{1}{9}\,u^2 = \frac{176}{9}\,u^2$.



Entretanto, se pelo menos um dos lados for incomensurável com u, não será possível encontrar uma subdivisão inteira de u que caiba um número inteiro simultaneamente em ambos os lados do retângulo. Neste caso, podemos usar subdivisões inteiras de u para determinar aproximações racionais para a medida da área do retângulo. No exemplo abaixo, verificamos que $120\,w^2 < S < 144\,w^2$, logo $\frac{120}{9}\,u^2 < S < \frac{144}{9}\,u^2$.



Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[4] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[5] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[6] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[7] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[8] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[9] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[11] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

Unidades 5 e 6

Completeza e representação dos Números Reais

Sumário

5.1 Introdução 2
5.2 A Descrição Formal dos Reais 3
5.3 Representação Decimal 4
5.4 Representação Decimal dos Racionais 6
5.5 Os Números Reais 13
5.6 Exercícios Recomendados 15
5.7 Exercícios Suplementares 16
5.8 Textos Complementares 20

5.1 Introdução

Na unidade anterior, discutimos a noção de comensurabilidade na Matemática grega e sua relação com a existência de números irracionais, que nos conduziram ao modelo dos números reais como pontos de uma reta orientada, em que se destacam dois deles para representar a unidade de medida. Apesar de sua simplicidade, elegância e de seu grande apelo geométrico, este modelo para os números reais não permitia ir tão longe quanto a Matemática do Século XIX exigia para o seu desenvolvimento. Por fim, os matemáticos do final daquele século numa minuciosa revisão dos fundamentos da Matemática nos proporcionaram um modelo algébrico-analítico para os números reais de extrema eficiência, permitindo o extraordinário avanço desta ciência que se sucedeu.

Na matemática contemporânea, existem duas construções principais equivalentes para o conjunto dos números reais, uma através das sequências de Cauchy, devida a Cantor [7] e a outra através da noção de corte nos racionais, devida a Dedekind [3]. Entretanto, não adotaremos aqui esta abordagem construtiva pois nos afastaria dos nossos objetivos, tornando o nosso caminho muito longo. Ao contrário, adotaremos uma abordagem axiomática, relativamente simples.

Os nossos axiomas estão todos contidos na seguinte frase:

Os números reais formam um corpo ordenado completo.

O termo *corpo* refere-se à estrutura algébrica dos números reais, constituída pelas operações de adição e multiplicação e de suas propriedades. O adjetivo *ordenado* refere-se à existência de relação de ordem nos reais de maneira compatível com as operações (em um sentido que explicitaremos em seguida). E, finalmente, temos a importante propriedade de *completeza* dos reais, que diz respeito ao fato da reta real ser contínua, ou de não ter "buracos" (falando em linguagem figurativa).

Observe que o conjunto $\mathbb{Q}$ também possui todas as propriedades das operações e da ordem, isto é, $\mathbb{Q}$ *também é um corpo ordenado*, mas não é completo.

Assim, é a propriedade de completeza que *caracteriza* $\mathbb{R}$, isto é, que o diferencia de $\mathbb{Q}$ e de qualquer outro corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$.

Em particular – embora esse aspecto quase sempre passe despercebido no ensino básico – a completeza é essencial para garantir a existência das principais classes de funções reais (tais como raízes n-ésimas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas).

☞ Para Saber Mais - As Letras dos Conjuntos Numéricos - Clique para ler

5.2 A Descrição Formal dos Reais

As construções geométricas que usamos para fornecer interpretações visuais para a soma e para o produto de números reais já eram conhecidas desde a época de Euclides (300 anos antes de Cristo). Entretanto, elas representavam operações sobre grandezas geométricas (no caso, segmentos de reta), que não eram associadas a números.

Esta visão geométrica foi muito importante ao longo da história da Matemática, e ainda é muito importante hoje, pois oferece uma representação que nos ajuda consideravelmente a pensar quando queremos resolver um problema ou verificar a validade de uma propriedade envolvendo os números reais. Entretanto, com o progresso da Ciência, a diversificação das aplicações da Matemática, desde as mais corriqueiras até as de alta tecnologia, e o consequente aumento da complexidade dos problemas matemáticos levaram à necessidade de construir descrições precisas para os conceitos, em termos formais rigorosos. Uma maneira de fazer isso é por meio de uma lista de *axiomas*. Os números reais não são uma exceção.

☞ Para Saber Mais - O que é um Axioma? - Clique para ler

Essencialmente, como mencionado na introdução, descrever $\mathbb{R}$ formalmente consiste em estabelecê-lo como um **corpo ordenado completo**.

Quando dizemos apenas que $\mathbb{R}$ é um *corpo*, isto significa que estão definidas aí as operações de adição e multiplicação satisfazendo todas as propriedades algébricas usuais.

O termo *corpo ordenado* refere-se à relação de ordem $x \leqslant y$, que é compatível com a adição e multiplicação pelas leis conhecidas como *monotonicidades*: Para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x \leqslant y \implies x + z \leqslant y + z, \quad \text{e} \quad x \leqslant y\,,\; z > 0 \implies x \cdot z \leqslant y \cdot z.$$

Finalmente, a *completeza* de $\mathbb{R}$ equivale à continuidade da reta, isto é, à ausência de "buracos". Esta última propriedade pode ser enunciada de várias maneiras equivalentes.

Recapitulando, a nossa apresentação axiomática de $\mathbb{R}$ constitui-se de uma lista de axiomas que podem ser organizados em três grupos.

- O primeiro grupo estabelece as propriedades algébricas das operações: associatividade, comutatividade e elemento neutro da adição e da multiplicação; distributividade da multiplicação em relação à adição; elemento inverso da adição e, em especial, elemento inverso da multiplicação, de todo elemento não nulo. A existência dos inversos aditivo e multiplicativo permitem que a subtração e divisão fiquem bem definidas.
- O segundo grupo de axiomas estabelece as propriedades referentes à ordem: as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva, que são as condições mínimas para que se tenha uma relação de ordem; a tricotomia, que garante que dois números reais x e y quaisquer são "comparáveis", isto é, vale uma e somente uma das possibilidades $x < y$, $x = y$ ou $x > y$; e as monotonicidades da adição e da multiplicação, que tornam a relação de ordem compatível com as operações algébricas.
- O terceiro grupo é formado por apenas um axioma, mas com um papel crucial na caracterização de $\mathbb{R}$: o axioma que estabelece a propriedade de *completeza*.

Explicitaremos esse último axioma na próxima seção, quando trataremos da representação decimal dos números reais.

☞ Para Saber Mais - O Corpo Ordenado Completo - Clique para ler

5.3 Representação Decimal

A forma mais comum de representar os números reais é por meio de expressões decimais. Vamos falar um pouco sobre elas. E claro que basta considerar os números reais positivos, pois, para tratar de números negativos, basta acrescentar o sinal de menos.

Definição 1

Uma **expressão decimal** é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_1 \dots a_n \dots, \tag{5.1}$$

em que a_0 é um número inteiro $\geqslant 0$ e $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ são **dígitos**, isto é, números inteiros tais que $0 \leqslant a_n < 10$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado o *n-ésimo dígito* da expressão decimal α. O número natural a_0 chama-se a *parte inteira* de α.

Exemplo 1

$\alpha = 13,42800\dots$, $\beta = 25,121212\dots$ e $\pi = 3,14159265\dots$ são expressões decimais. Nos casos de α e β, está implícito como se obtêm os dígitos que são omitidos. No caso de π, o que está escrito aqui não permite saber qual a regra para achar os dígitos a partir do nono, mas isto não quer dizer que estes dígitos não estejam bem definidos. De fato, existem processos precisos e eficientes para determiná-los.

Mas de que forma uma sequência de dígitos precedida de um número inteiro na forma (5.1), representa um número real? A resposta é: a expressão decimal α corresponde a uma forma de representar a soma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots . \tag{5.2}$$

É importante compreender o significado das reticências no final da expressão. Elas dão a entender de que se trata de uma soma com infinitas parcelas, mas isto é uma coisa que não tem sentido, pelo menos em princípio. O significado preciso da igualdade 5.2 é o seguinte: o número real α tem por valores aproximados os números racionais

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{5.3}$$

Quando se substitui α por α_n, o erro cometido não é superior a

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}.$$

Assim, a_0 é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant \alpha,$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha, \text{ etc.}$$

Deste modo, tem-se uma sequência não decrescente de números racionais

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots < \alpha_n \leqslant \cdots$$

que são valores (cada vez mais) aproximados do número real α. Mais precisamente, tem-se $0 \leqslant \alpha - \alpha_n \leqslant 10^{-n}$ para cada $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Diz-se então que o número real α é o *limite* desta sequência de números racionais. O fato de que *existe* sempre um número real que é limite desta sequência (isto é, que tem os α_n como seus valores aproximados) é uma forma de dizer que o corpo ordenado dos números reais é completo. Portanto, o nosso axioma da completeza lê-se:

Axioma 2 Completeza

Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.

Veremos, a seguir, como os números racionais se caracterizam por suas expressões decimais.

5.4 Representação Decimal dos Racionais

Algumas características particulares das expressões decimais correspondem a propriedades específicas dos números que elas representam. A primeira delas é quando, a partir de um certo ponto, todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots .$$

Então,

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

é um número racional; na realidade uma fração decimal (fração cujo denominador é uma potência de 10). Por exemplo,

$$13,42800\ldots = 13 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000} = \frac{13428}{1000} .$$

Mais geralmente, mesmo que não termine em zeros, a expressão decimal de $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ pode representar um número racional, desde que seja periódica. Comecemos com o caso mais simples, que é também o mais intrigante. Trata-se da expressão decimal, ou seja, do número real

$$\alpha = 0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots .$$

Afirmamos que $\alpha = 1$. De fato, os valores aproximados de α são $\alpha_1 = 0,9$, $\alpha_2 = 0,99$, $\alpha_3 = 0,999$, etc. Ora, $1 - \alpha_1 = 0,1$; $1 - \alpha_2 = 0,01$; $1 - \alpha_3 = 0,001$ e, geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$. Vemos, portanto, que, tomando n suficientemente grande, a diferença $1 - \alpha_n$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Noutras palavras, os números racionais $\alpha_n = 0,99\ldots 99$ são valores cada vez mais aproximados de 1, ou seja, têm 1 como limite.

A igualdade $1 = 0,999\ldots$ costuma causar perplexidade aos menos experientes. A única maneira de dirimir o aparente paradoxo é esclarecer que o símbolo $0,999\ldots$ na realidade significa o número cujos valores aproximados são $0,9$, $0,99$, $0,999$, etc. E, como vimos acima, *esse é o número* 1. Assim, como já observamos, é importante entender que $0,999\ldots$ *representa o próprio limite da sequência* de números racionais cujos termos são $\alpha_n = 0,99\ldots 99$ (em que o dígito 9 aparece n vezes). Portanto, esse número *é igual a* 1, *e não uma aproximação de* 1.

☞ Na Sala de Aula - Por que $0,9999... = 1$? - Clique para ler

Uma vez estabelecido que

$$0,999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{10^n} + \cdots = 1,$$

resulta imediatamente que

$$0,111\ldots = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{10^n} + \cdots = \frac{1}{9}.$$

Consequentemente, para todo dígito a, tem-se

$$0,aaa\ldots = \frac{a}{10} + \frac{a}{100} + \cdots + \frac{a}{10^n} + \cdots = \frac{a}{9}.$$

Por exemplo, $0,777\ldots = \frac{7}{9}$.

Podemos ir mais além, observando que

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=\frac{99}{100}, \qquad \frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}=\frac{99}{10000}, \qquad \dots,$$
$$\frac{9}{10^{2k-1}}+\frac{9}{10^{2k}}=\frac{99}{10^{2k}}, \qquad \dots,$$

obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}\right)+\left(\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}\right)+\cdots=\frac{99}{100}+\frac{99}{100^2}+\cdots \\ &= 99\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right), \end{aligned}$$

logo

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3}+\cdots=\frac{1}{99}\,.$$

Daí resulta que, para quaisquer dígitos a e b, tem-se [1]

$$0,abab\ldots=\frac{ab}{100}+\frac{ab}{100^2}+\frac{ab}{100^3}+\cdots=ab\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right).$$

Então,

$$0,abab\ldots=\frac{ab}{99}. \tag{5.4}$$

Por exemplo,

$$0,3737\ldots=\frac{37}{100}+\frac{37}{100^2}+\frac{37}{100^3}+\cdots=37\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)=\frac{37}{99}\,.$$

DEFINIÇÃO 3 Uma expressão decimal $\alpha=a_0,a_1\ldots a_p\ldots$ chama-se uma **dízima periódica simples**, de período $a_1a_2\ldots a_p$, se os primeiros p dígitos após a vírgula repetem-se indefinidamente na mesma ordem. Para indicar de forma mais precisa o período, empregamos também a notação $\alpha=a_0,\overline{a_1\ldots a_p}$.

[1] Para evitar confusões, convém esclarecer que a partir daqui e até o fim desta unidade, aparecerão com frequência sequências de dígitos justapostos lado a lado. Nestes casos, esta notação *não significa um produto*, e sim *o número representado pela sequência de dígitos em notação decimal, na ordem dada*. Assim, $a_n\ldots a_0=10^na_n+\cdots+a_0$.

Por exemplo, $0,\overline{7}$ e $0,\overline{37}$ são dízimas periódicas simples com períodos 7 e 37, respectivamente. Adaptando o raciocínio acima para $p \in \mathbb{N}$, fixo, podemos generalizar a fórmula (5.4) para uma dízima periódica cujo período tem p dígitos. Observando que

$$\begin{gathered}\frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^p} = \frac{9 \cdots 9}{10^p} = \frac{10^p - 1}{10^p}, \\ \frac{9}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{9}{10^{2p}} = \frac{9 \cdots 9}{10^{2p}} = \frac{10^p - 1}{10^{2p}}, \quad \cdots ,\end{gathered}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{9}{10} + \cdots + \frac{9}{10^p}\right) + \left(\frac{9}{10^{p+1}} + \cdots + \frac{9}{10^{2p}}\right) + \cdots \\ &= \frac{10^p - 1}{10^p} + \frac{10^p - 1}{10^{2p}} + \cdots = (10^p - 1)\left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \cdots\right), \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots = \frac{1}{10^p - 1} .$$

Portanto, para quaisquer p dígitos $a_1 \ldots a_p$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0,\overline{a_1 \ldots a_p} &= \frac{a_p \ldots a_1}{10^p} + \frac{a_p \ldots a_1}{10^{2p}} + \frac{a_p \ldots a_1}{10^{3p}} + \cdots \\ &= a_p \ldots a_1 \left(\frac{1}{10^p} + \frac{1}{10^{2p}} + \frac{1}{10^{3p}} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Então,

$$0,\overline{a_1 \ldots a_p} = \frac{a_p \ldots a_1}{10^p - 1}. \tag{5.5}$$

Na expressão acima, lembramos que $10^p - 1 = 9 \ldots 9$ (em que o dígito 9 aparece p vezes). Por exemplo, $0,\overline{5231} = \frac{5231}{9999}$. Este argumento permite-nos concluir que *toda dízima periódica simples representa um número racional*. A representação desse número na forma de fração é chamada **fração geratriz** da dízima periódica (ou, simplesmente, sua *geratriz*). A expressão (5.5) corresponde à seguinte regra, comumente enunciada nos antigos compêndios de Aritmética como segue:

> *A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.*

Como sabemos, existem ainda as dízimas periódicas ditas compostas. São aquelas que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica.

Definição 4 Uma expressão decimal $\alpha = a_0, b_1 \dots b_m\overline{a_1 \dots a_p}$ chama-se uma **dízima periódica composta**, de período $a_1a_2 \dots a_p$, se os p dígitos, de posições $m+1$ a $m+p$, após a vírgula repetem-se indefinidamente na mesma ordem.

Para obter a geratriz de uma dízima periódica composta, procede-se como no exemplo a seguir:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0,35\overline{172} \\
100\alpha &= 35,\overline{172} = 35 + \frac{172}{999} = \frac{35 \times 999 + 172}{999} = \\
&= \frac{35(1000-1)+172}{999} = \frac{35000+172-35}{999} = \frac{35172-35}{999}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{35172-35}{99900}\,.$$

Podemos generalizar o argumento acima para um dízima periódica composta qualquer:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0, b_1 \dots b_m\overline{a_1 \dots a_p} \\
10^m\alpha &= b_1 \dots b_m, \overline{a_1 \dots a_p} = b_1 \dots b_m + \frac{a_1 \dots a_p}{10^p - 1} = \\
&= \frac{b_1 \dots b_m(10^p-1) + a_1 \dots a_p}{10^p-1} = \frac{b_1 \dots b_m\, 10^p - b_1 \dots b_m + a_1 \dots a_p}{10^p-1} \\
&= \frac{b_1 \dots b_m a_1 \dots a_p - b_1 \dots b_m}{10^p-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$0, b_1 \dots b_m\overline{a_1 \dots a_p} = \frac{b_1 \dots b_m a_1 \dots a_p - b_1 \dots b_m}{10^m(10^p-1)}. \tag{5.6}$$

Chegamos assim à seguinte regra tradicional, que muitos de nós decoramos desde nossa infância:

A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica, seguida de um período menos a parte não-periódica, e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não-periódica.

☞ Na Sala de Aula - Regras para Frações Geratrizes - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - Operações com Limites - Clique para ler

Em suma, *expressões decimais periódicas (simples ou compostas) representam números racionais*. Reciprocamente, *todo número racional é representado por uma expressão decimal finita (que acaba em zeros) ou periódica*, como mostraremos a seguir.

Para obter a expressão decimal do número racional $\frac{p}{q}$, faz-se o processo de "divisão continuada" de p por q, acrescentando-se zero ao dividendo p enquanto se tiver um resto não nulo, como no exemplo abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 140 & 27 \\ \cline{2-2} 50 & 0,518\ldots \\ 230 & \\ 140 & \\ \ldots & \end{array} \qquad \frac{14}{27} = 0,518518\ldots$$

Não é difícil perceber por que esse processo gera dízimas periódicas. Como nas divisões sucessivas só podem ocorrer os restos $0, 1, 2, \ldots q-1$, após no máximo q divisões um resto vai repetir-se e, a partir daí, os dígitos no quociente vão reaparecer na mesma ordem, logo tem-se uma expressão periódica. Mas, por que esse procedimento gera, de fato, os dígitos da representação decimal da fração $\frac{p}{q}$? Isto é, por que esse algoritmo funciona?

De forma mais geral, o procedimento pode ser descrito como a seguir. Primeiro, divide-se p por q, obtendo-se $p = a_0 q + r_0$, em que $a_0 \in \mathbb{N}$ é o quociente e $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < q$, é o resto. Isto é equivalente a escrever

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \qquad a_0 \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{r_0}{q} < 1. \tag{5.7}$$

Podemos concluir então que a_0 é a parte inteira de $\frac{p}{q}$. No segundo passo, acrescenta-se um 0 à direita do resto r_0, o que corresponde a multiplica-lo por 10, e divide-se o número obtido novamente por q. Assim, obtém-se $10r_0 = a_1 q + r_1$, em que $a_1 \in \mathbb{N}$ é o quociente e $r_1 \in \mathbb{N}$, $r_0 < q$, é o resto, o que equivale a

$$\frac{10r_0}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q}, \qquad a_1 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{r_1}{q} < 1.$$

Da expressão acima, podemos concluir que $a_1 \leqslant \frac{10r_0}{q} < 10$. Assim, a expressão acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{r_0}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q}, \qquad a_1 \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_1 < 10, \quad 0 \leqslant \frac{r_1}{10q} < \frac{1}{10}. \tag{5.8}$$

Juntando (5.7) e (5.8), obtemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant a_1 < 10, \quad 0 \leqslant \frac{r_1}{10q} < \frac{1}{10}. \tag{5.9}$$

Generalizando o raciocínio acima, podemos concluir que, se o processo de divisões sucessivas for continuado indefinidamente, obter-se-á a expressão decimal do número $\frac{p}{q}$. Para um estudo mais detalhado sobre os casos em que o racional $\frac{p}{q}$ gera uma dízima periódica simples, composta ou uma expressão decimal finita, bem como uma estimativa do número de algarismos do período, veja [12, pp. 158-171].

Em resumo, nesta seção, mostramos que *toda expressão decimal periódica representa um número racional* e que, reciprocamente, *todo número racional pode ser representado por uma expressão decimal periódica*. Ao enunciar estes fatos, observamos que podemos considerar expressões decimais finitas como casos particulares de expressões periódicas, com período 0. Por exemplo, $0,35000\ldots$ é periódica, com período 0. Em sala de aula, é costume separar este caso, por ser muito particular. Os argumentos desta seção consistem na demonstração do seguinte teorema.

Teorema 5

Um número $\alpha \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, α tem expressão decimal periódica.

5.5 Os Números Reais

Vejamos agora como comparar e operar com números reais por meio de suas representações decimais.

Não é possível generalizar os algoritmos usuais das quatro operações com números naturais para expressões decimais de números reais. Os algoritmos são estruturados da direita para a esquerda, enquanto as expressões decimais são organizadas da esquerda para a direita. Como começar uma adição, por exemplo?

Podemos entretanto usar os algoritmos para calcular aproximações racionais para os resultados das operações. Dados $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$ e $\beta = b_0, b_1 b_2 \ldots$, para calcular $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e $\dfrac{\alpha}{\beta}$ (se $\beta \neq 0$), fixado $n \in \mathbb{N}$, considera-se as aproximações $\alpha_n = a_0, a_1 \ldots a_n$, $\beta_n = b_0, b_1 \ldots b_n$. Os números racionais $\alpha_n + \beta_n$, $\alpha_n - \beta_n$, $\alpha_n \cdot \beta_n$ e $\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}$ são aproximações para os resultados que desejamos obter, tanto mais aproximados quanto maior for n.

☞ Para Saber Mais - A Correspondência entre Expressões Decimais e Números Reais - Clique para ler

A relação de ordem em $\mathbb{R}$, quando os seus elementos são representados por expressões decimais, traduz-se na ordem lexicográfica. Vejamos o que isto significa.

Sejam $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ e $\beta = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ dois números reais escritos na sua representação decimal de modo que essas representações não terminem numa sequência de noves. A relação de ordem $\alpha \leqslant \beta$ traduz-se do seguinte modo (cf. Exercício 7): se $\alpha \neq \beta$, tem-se que $a_n < b_n$ para o primeiro índice n tal que $a_n \neq b_n$.

Algumas propriedades dos números reais se deduzem sem dificuldade do axioma da completeza que adotamos. Citamos como exemplo as importantes propriedades a seguir.

Propriedade Arquimediana Essa propriedade garante que dado um número real α, sempre existe um número natural n tal que $n > \alpha$ (cf. Exercício 8).
Densidade dos Racionais Essa propriedade nos diz que os números racionais formam um conjunto denso nos números reais, ou seja, dados dois números reais α e β, com $\alpha < \beta$, existe um número racional r tal que $\alpha < r < \beta$ (cf. Exercício 9).

Recordando, um número real que não é racional é chamado de *número irracional*. Portanto, os números irracionais são aqueles que não possuem representação decimal periódica.

☞ Na Sala de Aula - O Valor de π - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - O que é 2^{π}? - Clique para ler

Na prática, nossos olhos (e mesmo os instrumentos mais delicados de aferição) têm um extremo de percepção (ou de precisão), sendo incapazes de distinguir diferenças inferiores a esse extremo. Portanto, nenhuma medição experimental pode oferecer como resultado um número irracional. Deve-se entretanto lembrar que, quando o raciocínio matemático assegura a incomensurabilidade, o número racional (com um número finito de casas decimais) obtido experimentalmente é apenas um valor aproximado – o valor exato é um número irracional. Por isso, afirmamos na Unidade 4 que os números racionais dão conta das medições *empíricas*, enquanto os números reais atendem ao *problema teórico da medida*.

☞ Na Sala de Aula - Densidade dos Racionais - Clique para ler

☞ Para Saber Mais - A Diagonal de Cantor - Clique para ler

☞ Na Sala de Aula - Mais Irracionais que Racionais - Clique para ler

5.6 Exercícios Recomendados

Os Exercícios 1 a 4 a seguir envolvem tópicos sobre números reais habitualmente tratados na escola, mas com os quais os estudantes costumam ter algumas dificuldades. Por exemplo, o Exercício 1 envolve um processo simples de aproximação que pode ser feito em sala de aula, com ajuda de uma calculadora de bolso. Este processo de aproximação pode ser prolongado indefinidamente e pode ser usado para construirmos as expressões decimais dos números irracionais que admitem representação por meio de radicais. Estas expressões decimais são, em geral, dadas nos livros didáticos sem qualquer justificativa, mesmo nos casos simples como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Os Exercícios 3 e 4 exploram um erro muito comum: a confusão entre um expressão decimal ter um padrão de regularidade qualquer e ter um padrão de repetição (isto é, um período), o que é uma situação muito mais particular.

1. Com a ajuda de uma planilha eletrônica, obtenha aproximações com até 10 casas decimais para os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[3]{5}$.

2. Considere um número racional $\frac{m}{n}$, onde m e n são primos entre si.

   (a) Sob que condições este número admite uma representação decimal finita?

   (b) Quando a representação é uma dízima periódica simples?

3. O número $0,123456789101112131415\ldots$ é racional ou irracional?

4. Em livros didáticos do ensino básico, encontramos comumente exercícios que pedem para classificar números dados como racionais ou irracionais. Dentre os exemplos dados, encontram-se expressões decimais como $0,1515\ldots$ ou $0,26\ldots$, mostrados dessa forma. Você considera que enunciados de exercícios desse tipo são adequados ou podem causar algum tipo de confusão?

5. Considere conhecidas todas as propriedades das operações de adição e de multiplicação com números reais, especialmente a definição de *inverso aditivo* (ou *simétrico*): *o simétrico de* $x \in \mathbb{R}$ *é o (único) número* $-x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x + (-x) = 0$.

   Justifique a "regra dos sinais" do produto, isto é, que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ vale:

(a) $-(-x) = x$;

(b) $(-x)\,y = x\,(-y) = -(x\,y)$;

(c) $(-x)\,(-y) = x\,y$.

Não é incomum que os alunos no ensino básico se confundam com esta regra, em geral por memorizá-la sem entender. Como você exploraria a representação dos números reais na reta, em especial a relação de simetria entre os números positivos e negativos para ajudá-los a entender melhor que $-(-x) = x$?

6. Ao terminar um problema envolvendo radicais, os alunos normalmente são instados a racionalizar o denominador do resultado obtido. Por que isso?

7. Sejam dados $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ e $\beta = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, números reais escritos de modo que essas representações não terminem numa sequência de noves. Mostre que a relação de ordem $\alpha \leqslant \beta$ traduz-se do seguinte modo: *se* $\alpha \neq \beta$ *tem-se que* $a_n < b_n$ *para o primeiro índice* n *tal que* $a_n \neq b_n$.

8. Mostre a Propriedade Arquimediana dos números reais, ou seja, dado um número real α, qualquer, existe um número natural n tal que $n > \alpha$.

9. Mostre que o conjunto dos racionais é denso nos reais, ou seja, dados α e β números reais, com $\alpha < \beta$, mostre que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < r < \beta$.

10. Mostre que o conjunto dos irracionais é denso nos reais, ou seja, dados α e β números reais, com $\alpha < \beta$, mostre que existe $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha < \gamma < \beta$.

5.7 Exercícios Suplementares

1. Nesta unidade (p. 4), observamos que as condições mínimas para que uma relação $\preccurlyeq$, definida entre os elementos de um conjunto X, seja considerada uma *relação de ordem* são as propriedades:

(i) *reflexiva*: $x \preccurlyeq x$, $\forall\, x \in X$;

(ii) *antissimétrica*: $x, y \in X$, $x \preccurlyeq y$, $x \preccurlyeq y \Rightarrow x = y$;

(iii) *transitiva*: $x, y, z \in X$, $x \preccurlyeq y$, $y \preccurlyeq z \Rightarrow x \preccurlyeq z$.

Além disso, dizemos que esta relação ordem é *total* se vale a propriedade:

(iv) *tricotomia*: $\forall\, x, y \in X$ vale uma e somente uma das possibilidades $x \preccurlyeq y$, $x = y$, $y \preccurlyeq x$.

Caso contrário, dizemos que a ordem é *parcial*.

Fixado um conjunto A, considere $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A, isto é, o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A.

(a) Mostre que a relação de inclusão define uma ordem em $\mathcal{P}(A)$.

(b) A ordem definida pela relação de inclusão é total ou parcial? Justifique sua resposta.

2. Comentamos que um corpo é dito *ordenado* se nele está definida uma relação de ordem *compatível com as operações algébricas* (p. 3), no sentido que valem as propriedades de monotonicidade. Dizer *corpo ordenado* e *corpo munido de uma ordem* é o mesmo? Considere o exemplo a seguir.

Podemos definir no conjunto dos números complexos, a chamada *ordem lexicográfica*, definida como segue. Se $z_1 = a_1 + i\, b_1$ e $z_2 = a_2 + i\, b_2$ são números complexos, diremos que $z_1 \leqslant z_2$ se:

$$a_1 < a_2 \text{ ou } (a_1 = a_2 \text{ e } b_1 < b_2)$$

(a) A ordem lexicográfica faz de $\mathbb{C}$ um corpo ordenado? Justifique sua resposta.

(b) É possível munir $\mathbb{C}$ de uma ordem de forma que ele seja um corpo ordenado? Justifique sua resposta.

3. Dizemos que um número real é um *número algébrico* se é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Denotamos por $\mathbb{A}$ o conjunto dos números reais algébricos.

É imediato concluir que todo número racional é algébrico, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$. Além disso, todos os números reais que admitem expressão por meio de radicais (tais como $\sqrt[k]{n}$, com $k, n \in \mathbb{N}$) são algébricos. Assim, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{A}$.

Na Unidade 3, mostramos que $\mathbb{Q}$ é *enumerável*, isto é, pode ser posto em correspondência biunívoca com $\mathbb{N}$. O objetivo deste exercício é mostrar que $\mathbb{A}$ é também enumerável.

Para isto, antes, será preciso provar as duas propriedades de conjuntos enumeráveis a seguir.

(i) A reunião de uma família enumerável de conjuntos finitos ou enumeráveis é um conjunto enumerável.

(ii) O produto cartesiano de uma família finita de conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.

Sugestão: Para provar essas propriedades, inspire-se na prova de que $\mathbb{Q}$ é enumerável, dada na Unidade 3.

Em seguida, faça o que se pede abaixo.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes inteiros e grau menor ou igual a n (incluindo o polinômio nulo). Mostre que existe uma função bijetiva entre P_n e o produto cartesiano $\mathbb{Z}^{n+1}$.

(b) Com base no item anterior, mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[x]$, dos polinômios com coeficientes inteiros, é enumerável.

(c) Para cada polinômio $p \in \mathbb{Z}[x]$, considere R_p, o conjunto das raízes reais de p. Observando que $\mathbb{A} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[x]} R_p$, use o item anterior para concluir que $\mathbb{A}$ é enumerável.

4. Da mesma forma que expressamos um número real qualquer na base 10, podemos encontrar expressões em relação a uma base $\beta \in \mathbb{N}$, com $\beta \geq 2$, qualquer. Dizemos que um número $\alpha \in \mathbb{R}$ está expresso na base β se ele é escrito na forma:

$$\alpha = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, \beta^{-n}$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os a_n são dígitos entre 0 e $\beta - 1$.

(a) Em uma base β, qualquer, é verdade que um número é racional se, e somente se, admite representação finita ou periódica?

(b) Considere o número que possui uma expressão na base β dada por $a_0 = 0$ e $a_n = \beta - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Que número é esse?

5. (a) Mostre que um número racional, representado como fração irredutível por $\frac{p}{q}$, admite expressão decimal finita se, e somente se, o denominador q não possui fatores primos diferentes de 2 ou 5.

(b) É verdade que, se um número racional possui representação decimal finita, então ele terá representação finita em relação a outra base qualquer?

(c) Generalize o fato demonstrado no item (a) para uma base qualquer.

5.8 Textos Complementares

Na Sala de Aula

Por que $0,9999... = 1$?

Mesmo com os argumentos acima, nem sempre é fácil para os alunos convencerem-se da validade da igualdade $0,9999... = 1$. Em sala de aula, algumas perguntas podem ajudar nesse convencimento. Por exemplo, se fosse verdade que $0,9999\ldots < 1$, então teria que existir um outro número real, diferente de $0,9999\ldots$ e de 1, que ficasse entre $0,9999\ldots$ e 1. Você seria capaz de exibir tal número?

Na Sala de Aula

Regras para Frações Geratrizes

Há algum tempo no passado, os alunos na escola costumavam ser obrigados a memorizar as duas regras para obtenção de dízimas periódicas enunciadas acima. A memorização dessas regras, por si só, não agrega entendimento sobre a relação entre as representações decimal e fracionária de números racionais. Assim, é mais recomendado que os alunos sejam encorajados a entender os processos dedutivos para obter essas frações, mesmo que seja em exemplos numéricos.

Na Sala de Aula

O Valor de π

Muitos alunos no ensino básico concebem os números irracionais (ou mesmo os números racionais com representação decimal infinita) como "números que não têm valor exato" ou "números aproximados". Não existem números cujos valores não sejam exatos! Para entender isto, basta verificar que cada número real é representado por um ponto *fixo* na reta real. Um número com infinitas casas decimais tem valor tão exato quanto qualquer outro.

Por exemplo, como o número π tem infinitas casas decimais que não possuem um período (pois é irracional), nunca poderemos escrever todos os dígitos. Porém, *isto não significa que π não tenha um valor exato ou aproximado*. O que é correto dizer é que π *pode ser aproximado por números com representação decimal finita*, uma vez que a densidade de $\mathbb{Q}$ nos garante que há números racionais tão próximos de π quanto queiramos. A conceituação de π, como razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo, nos garante que este número está *bem definido*, isto é, corresponde a um valor exato, representado por um ponto fixo na reta real. Recentemente, com auxílio de algoritmos especialmente concebidos e computadores rápidos, foi possível determinar os primeiros 56 bilhões de dígitos de π.

Talvez essas concepções errôneas sejam reforçadas por abordagens inadequadas frequentes. Não é incomum encontrarmos em livros didáticos frases do tipo "neste exercício considere $\pi = 3,14$". Evite empregar frases desse tipo. Não podemos "considerar $\pi = 3,14$", pois π é um número e $3,14$ é outro número (sendo, inclusive, um irracional e outro racional). Frases conceitualmente errôneas como essa podem não só levar o aluno à concepção de que π não é um número exato, pois aparece com valores diferentes em situações diferentes (às vezes $3,14$, outras vezes $3,1416$, etc.); como também causar confusão com o próprio conceito de número irracional, pois afirma-se que π é um número irracional, mas ao mesmo tempo ele aparece igualado a um número com representação decimal finita. Em situações em que o uso de aproximações para números irracionais é necessário, procure usar preferencialmente frases do tipo "aproxime π por $3,14$" ou "considere $\pi \cong 3,14$".

Na Sala de Aula

O que é 2^π?

Suponha que um aluno, em uma sala de aula de ensino médio, faça a seguinte pergunta:

Professor, o que é 2^π?

Como você responderia?

Provavelmente, se a pergunta fosse *o que é* 2^{-3} ou *o que é* $2^{\frac{1}{3}}$, seria mais fácil responder. A operação de potenciação, com expoentes inteiros e racionais, é definida de forma que sejam preservadas as propriedades já conhecidas, que decorrem da caracterização de potenciação de expoente natural como produto de parcelas repetidas. Assim, o resultado de 2^{-3} deve ser definido de tal forma que possamos, por exemplo, fazer o seguinte:

$$2^{-3} = 2^{1-4} = \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3}.$$

Analogamente, $2^{\frac{1}{3}}$ deve ser definido de forma que valha

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2.$$

Portanto, por definição de raiz, devemos ter $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$.

Por isso, estendemos a operação de potenciação para expoentes racionais definindo, para $a > 0$ e $m, n \in \mathbb{N}$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Mas, o que é 2^π?

A dificuldade em responder a esta pergunta está ligada ao fato de que a extensão da potenciação de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ não pode ser feita apenas por meio da preservação das propriedades algébricas da operação. Como observamos anteriormente, esta extensão envolve necessariamente a propriedade de *completeza* dos reais. Se já conhecemos a operação em $\mathbb{Q}$, devemos estendê-la para $\mathbb{R}$ por meio da completeza, usando a densidade dos racionais.

Por isso, no ensino médio, é muito mais difícil apresentar uma definição para a^x, com $x \in \mathbb{R}$ qualquer, de forma que o aluno de fato associe um significado a este símbolo. Entretanto, isto não é motivo para que esta questão seja simplesmente ignorada. Muitos livros didáticos definem potenciação apenas até expoentes racionais, e, alguns capítulos depois, apresentam a função exponencial com domínio em $\mathbb{R}$, sem qualquer menção a essa inconsistência.

Evidentemente, a compreensão da completeza dos reais está muito além dos objetivos do ensino médio. Porém, podemos usar uma ideia de *aproximação* para ajudar os alunos a atribuírem algum significado, mesmo que intuitivo e informal, ao símbolo 2^π, por exemplo. Todo número irracional pode ser aproximado por uma sequência de racionais. Um exemplo natural desta aproximação é dada pelos truncamentos finitos da representação decimal. Usando esta ideia, com ajuda de uma calculadora ou computador, podemos sugerir que o aluno complete uma tabela do tipo:

x	2^x
3	
$3,1$	
$3,14$	
$3,141$	
$3,1415$	

Enquanto a coluna da esquerda aproxima-se de π, a coluna da direita aproxima-se de algum número real α, que definiremos como 2^π.

Não só essa é uma forma de ajudar os alunos a perceberem que de fato 2^π *é um número*, isto é existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = 2^\pi$, como também é uma construção intuitiva bem próxima da definição formal.

Densidade dos Racionais

Na Sala de Aula

Muitas vezes o professor do ensino médio se pergunta o porquê da necessidade de aprender, por exemplo, que os racionais são densos em $\mathbb{R}$. De fato, o argumento de aproximar um número real por números racionais será fundamental na nossa abordagem das funções elementares e será utilizado em várias ocasiões, como por exemplo, na demonstração do Teorema Fundamental da Propocionalidade, que será apresentada na Unidade 9, e para definirmos, na Unidade 13, a exponencial de um número real arbitrário.

Terminamos comentando que, no contexto dos números reais, a densidade de $\mathbb{Q}$ parece ser mais útil que a densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Um ponto a favor dos racionais em relação aos irracionais é a escrita simples que estes números reais apresentam, a saber, a escrita na forma $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Um outro ponto a favor de $\mathbb{Q}$ é a sua enumerabilidade, muitas vezes utilizada na Análise Matemática. Assim, em muitos casos, para provarmos que um determinado resultado é válido para todo número real, sem dificuldade, o provamos para os racionais a partir da validade do resultado para os inteiros. Só depois provamos o resultado para os irracionais usando aproximações por racionais, ou seja, usando a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Este é o "pulo do gato" que muitas vezes o professor do ensino médio acaba achando desnecessário, pois na maioria dos textos esta passagem é omitida. É claro que não se espera que o professor do ensino médio ensine isso aos seus alunos com todo o formalismo, mas é necessário que ele tenha bem claro em mente o significado do que está tentando ensinar.

Na Sala de Aula

Mais Irracionais que Racionais

Embora a teoria de cardinalidades infinitas nos mostre que existem muito mais números sem representação por radicais ou na forma de frações, ironicamente, os números que admitem tais representações constituem a grande maioria dos exemplos com que os alunos têm contato no ensino básico.

Se pedirmos a um aluno do ensino médio que cite alguns números racionais e alguns números irracionais, é muito provável que ele seja capaz de fornecer muito mais exemplos dos primeiros do que dos últimos. Os exemplos de irracionais familiares não devem ir muito além de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π...

É claro que os argumentos matemáticos formais sobre as cardinalidades dos conjuntos numéricos não são acessíveis ao ensino médio. Entretanto, uma noção intuitiva sobre a comparação entre as cardinalidades de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^c$ pode ajudar a construir uma ideia rica do conjunto dos números reais. Podemos ajudar os alunos do ensino médio a construir tal noção intuitiva por meio da representação decimal. Não é difícil ver que, se pudéssemos construir uma expressão decimal infinita sorteando ao acaso dígito por dígito, a probabilidade de aparecer um período que se repetisse indefinidamente seria muito pequena. Assim, a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dízima periódica, isto é, um número racional, é muito menor que a de escolhermos um número irracional. De fato, essa probabilidade é igual a 0!

Para Saber Mais

As Letras dos Conjuntos Numéricos

As letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são as iniciais das palavras *número* (ou *natural*), *quociente* e *real*, respectivamente. A letra $\mathbb{Z}$ é a inicial da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

Para Saber Mais

O que é um Axioma?

Como sabemos, *teoremas* são fatos matemáticos, cuja veracidade é demonstrada logicamente, a partir de hipóteses e de outros fatos verdadeiros, previamente estabelecidos. Desta forma, teoremas encadeiam-se uns nos outros por meio de implicações lógicas. Entretanto, como para demonstrar fatos matemáticos, precisamos conhecer previamente outros fatos verdadeiros, essas cadeias de implicações não podem regredir indefinidamente, é preciso começar de algum lugar.

Por isso, muitas teorias matemáticas são estabelecidas axiomaticamente, isto é, construídas tendo como alicerce uma lista de *axiomas*, que são *fatos cuja veracidade é admitida sem demonstração*, a partir dos quais todos os demais são demonstrados como teoremas. Por exemplo, os axiomas mais usados atualmente para a Geometria Euclidiana foram propostos por David Hilbert (1862 - 1943) em 1899.

Ao elaborar uma lista de Axiomas, devemos visar duas características desejáveis. Em primeiro lugar, esta deve ser *suficiente*, no sentido que o objeto matemático descrito fique *perfeitamente caracterizado*, sem que haja a possibilidade de mais de uma interpretação e de forma que todas as propriedades possam ser estabelecidas. Além disso, tal lista deve ser *mínima*, no sentido que não devem ser incluídos como axiomas *fatos que possam ser demonstrados como teoremas* a partir dos demais axiomas.

Para Saber Mais

O Corpo Ordenado Completo

Descrever $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo de fato *caracteriza* $\mathbb{R}$, no sentido que $\mathbb{R}$ *o único* corpo ordenado completo (a menos de isomorfismo). Isto significa que qualquer conjunto, munido de duas operações e de uma relação de ordem, que satisfaçam todas as propriedades listadas acima, será equivalente a $\mathbb{R}$ (diferindo apenas, possivelmente, na forma como seus elementos são representados).

Em particular, a propriedade de *completeza* tem um papel crucial nesta caracterização. Observe que $\mathbb{Q}$, por exemplo, tem todas essas propriedades, a não ser a completeza. Portanto, $\mathbb{Q}$ também é um corpo ordenado – mas não é completo. Assim como $\mathbb{Q}$, existem outros infinitos corpos ordenados $\mathbb{K}$ tais que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Porém, *o único completo é* $\mathbb{R}$. Assim, não é incorreto dizer que $\mathbb{R}$ é *o (único) corpo ordenado completo*.

Para Saber Mais

Operações com Limites

É sempre bom lembrar que, como toda expressão decimal infinita representa o limite de uma série, então as operações que fizemos para deduzir as fórmulas (5.5) e (5.6) não são simples operações no sentido algébrico, e sim operações com limites. Portanto, essas operações só são válidas porque sabemos de antemão que todos os limites com que operamos existem. Se aplicarmos operações com limites sem ter essa certeza, podemos chegar a resultados inconsistentes.

Para Saber Mais

A Correspondência entre Expressões Decimais e Números Reais

Observemos que a correspondência

$$\text{expressão decimal} \mapsto \text{número real},$$

que associa a cada expressão decimal um número real é uma função sobrejetiva e "quase injetiva".

A primeira das afirmações acima (sobrejetividade) significa que, dado arbitrariamente um número real positivo α, existe uma expressão decimal $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ tal que

$$a_0 + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + a_n \cdot 10^{-n} + \cdots = \alpha.$$

Como de costume, basta considerar o caso em que $\alpha > 0$. Então, como já observamos, obtemos a expressão decimal de a tomando sucessivamente

$$\begin{aligned}
a_0 &= \text{o maior número natural} \leqslant \alpha; \\
a_1 &= \text{o maior dígito tal que } \alpha_1 = a_0 + \tfrac{a_1}{10} \leqslant \alpha; \\
a_2 &= \text{o maior dígito tal que } \alpha_2 = a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \tfrac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha; \\
&\ \vdots \\
a_n &= \text{o maior dígito tal que } \alpha_n = a_0 + \tfrac{a_1}{10} + \ldots + \tfrac{a_n}{10^n} \leqslant \alpha; \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Por exemplo, quando escrevemos que $\pi = 3,14159265...$ estamos dizendo que

$3 < \pi < 4$;

$3,1 < \pi < 3,2$;

$3,14 < \pi < 3,15$, etc.

Quanto à "quase injetividade" da correspondência, o que queremos dizer é que, se $0 \leqslant a_n \leqslant 8$, então as expressões decimais

$$a_0, a_1 \ldots a_n 999 \ldots \qquad \text{e} \qquad a_0, a_1 \ldots (a_n + 1)000 \ldots .$$

definem o mesmo número real. Por exemplo,

$$3,275999 \ldots = 3,276000 \ldots \qquad \text{e} \qquad 0,999 \ldots = 1,000 \ldots .$$

A afirmação (um tanto imprecisa) de que uma correspondência é "quase injetiva" não tem sentido algum em geral. No presente caso, estamos querendo dizer que a situação acima descrita é a única em que há quebra de injetividade. Isto pode ser provado mas não haveria muita vantagem em fazê-lo aqui. Portanto, para obter-se uma correspondência biunívoca entre os números reais e as expressões decimais, basta descartar aquelas que terminam por uma sequência infinita de noves.

Para Saber Mais

A Diagonal de Cantor

Georg Cantor (1845-1918) foi o primeiro a provar que existem diferentes números cardinais infinitos. Mais precisamente, Cantor demonstrou que, embora os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são ambos infinitos, não pode existir nenhuma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Em particular, não pode existir uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Como certamente existe uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ (a saber, aquela que a cada $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder o próprio n, pensado como elemento de $\mathbb{R}$), diz-se então que a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é estritamente menor do que a de $\mathbb{R}$.

A demonstração de Cantor consiste em mostrar que, dada qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, é sempre possível achar $y \in \mathbb{R}$ que não pertence à imagem $f(\mathbb{N})$, isto é, tal que $f(n) \neq y$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar um número real y cuja representação decimal tenha seu n-ésimo dígito diferente do n-ésimo dígito de $f(n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto garante que $y \neq f(n)$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, portanto $y \notin f(\mathbb{N})$.

O argumento de Cantor pode ser ilustrado da seguinte forma:

Definir uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ corresponde a construir uma "lista infinita" de números reais. Podemos construir essa lista representando cada um dos números reais na forma decimal (por simplicidade, consideramos apenas números reais entre 0 e 1):

$$\begin{array}{ccl} 1 & \to & f(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\ 2 & \to & f(2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\ 3 & \to & f(3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\ 4 & \to & f(4) = 0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\ 5 & \to & f(5) = 0,a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots \\ \vdots & & \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

Agora, suponhamos que percorramos essa lista, *ao longo da diagonal*, trocando cada um dos dígitos por outro qualquer. Com esses dígitos trocados, formamos uma nova expressão decimal, que representa um número real. Por construção, o número real assim formado difere de qualquer um dos presentes na lista, *em pelo menos um dígito* (o n-ésimo). Assim, este número é diferente de todos aqueles constantes da lista. Com isso, concluímos que nenhuma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode "cobrir" os reais totalmente, pois sempre que for dada tal função, seremos capazes de exibir um número real que não pertence à sua imagem. Por causa dessa ilustração, o argumento ficou conhecido como *diagonal de Cantor*.

Quando um conjunto é finito ou tem a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$, diz-se que ele é *enumerável*. O argumento de Cantor mostra que $\mathbb{R}$ não é enumerável. Na Unidade 2, demos um argumento para mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Também não é difícil ver que a reunião de dois conjuntos enumeráveis é ainda um conjunto enumerável. Se denotarmos por $\mathbb{Q}^c$ o conjunto dos números irracionais, teremos $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$. Resulta daí que o conjunto $\mathbb{Q}^c$ dos números irracionais é não-enumerável (pois, como $\mathbb{Q}$ é enumerável, se $\mathbb{Q}^c$ fosse enumerável, $\mathbb{R}$ também seria). Isto significa que existem muito mais números irracionais do que racionais!

Podemos ir ainda mais além. Veremos no Exercíco 3 que, se acrescentarmos aos racionais todos os números irracionais que possuem expressão por radicais (tais como $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}+1}$, etc.), o conjunto obtido ainda seria enumerável. Isto quer dizer que existem muito mais números que não admitem representação por radicais ou como frações (tais como π e e), do que números que possuem tais representações!

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

7

Desigualdades, Intervalos e Valor Absoluto

Sumário

7.1 Introdução 2
7.2 Desigualdades 3
7.3 Intervalos 7
7.4 Valor Absoluto 7
7.5 Exercícios Recomendados 10
7.6 Exercícios Suplementares 11
7.7 Textos Complementares 12

7.1 Introdução

Nesta unidade, trataremos das principais noções que dependem da relação de ordem do corpo dos números reais: *desigualdades*, *intervalos* e *valor absoluto*. Estas noções estão relacionadas com alguns tópicos sobre os quais os alunos do ensino fundamental e do ensino médio, em geral, têm grandes dificuldades, tais como, resolução de inequações, funções e equações modulares. Para que possamos ajudá-los a sanar tais dificuldades, a reflexão sobre alguns aspectos teóricos relacionados com essas ideias é essencial.

Na Seção 2 (Desigualdades), convidamos o leitor a prestar bastante atenção nas propriedades (P1) e (P2), que definem o conjunto $\mathbb{R}^+$, dos números reais positivos. O estabelecimento de um conjunto com essas propriedades é uma das formas de dizer que $\mathbb{R}$ é um corpo *ordenado*. Certifique-se de compreender as demonstrações das propriedades básicas da relação de ordem, pois são elas que garantem a validez das ferramentas empregadas para resolver inequações em $\mathbb{R}$.

Outra observação importante diz respeito ao sinal "menos" $(-)$. É comum que os estudantes, especialmente no ensino fundamental, tendam a considerar que qualquer símbolo precedido do sinal de menos representa necessariamente um número negativo. Assim, é importante frisar que este sinal pode ter o significado de um operador que, a cada número real x, associa seu simétrico, isto é, seu inverso em relação à operação de adição, ou seja, o único número real $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

Na começo da Seção 3, observe que uma caracterização comum aos nove tipos diferentes de intervalos dados é a seguinte: $x, y \in I\,,\ x < z < y \Rightarrow z \in I$. Isto é, um intervalo pode ser caracterizado como um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ tal que todo número localizado entre dois elementos de I é também um elemento de I. Assim, um intervalo é um subconjunto de $\mathbb{R}$ que não tem "buracos", ou, em termos matemáticos, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$.

É de fundamental importância a observação quanto ao fato do símbolo ∞ (empregado na notação de intervalos infinitos) não representar um número real. Ao contrário, este símbolo representa o fato de não existir nenhum número real que seja cota superior ou inferior (conforme o caso) para o intervalo em questão; isto é, o fato deste não ser limitado superiormente ou inferiormente (conforme o caso). Esta discussão pode ser empregada para ajudar os alunos a superarem a ideia conceitualmente incorreta de infinito como “um número muito grande”.

Como observaremos na Seção 3, a ideia de intervalo também nos permite descrever a importante propriedade de densidade dos números racionais e irracionais em $\mathbb{R}$.

É comum encontrarmos em livros didáticos comentários do tipo: *entre dois números reais quaisquer, existe um número racional e um número irracional*. Como já observamos na Unidade 5, é consequência imediata desta propriedade o fato de que, entre dois números reais quaisquer, existem *infinitos* números racionais e *infinitos* números irracionais. No entanto, esta conclusão nem sempre é imediata para os alunos. Assim, vale a pena frisar de forma mais contundente a distribuição dos números racionais e irracionais na reta real.

O conceito de módulo, abordado na Seção 4 (Valor Absoluto), envolve comumente dificuldades de compreensão por parte dos alunos, especialmente quando o problema exige separar em casos uma expressão algébrica envolvendo módulos. Assim, é importante ter clara a equivalência entre as duas definições de valor absoluto dadas no início da Seção 4, bem como sua interpretação como *distância até a origem*, que se generaliza na interpretação de $|x - y|$ como distância entre dois pontos quaisquer.

7.2 Desigualdades

A relação de desigualdade $x < y$ entre números reais é fundamental. Por isso, é conveniente destacar algumas de suas propriedades, para que saibamos o que estamos fazendo quando operamos com essa relação.

Em primeiro lugar, vale a pena lembrar que *todas* as propriedades das desigualdades derivam de duas afirmações simples e óbvias, que enunciaremos a seguir. Tais afirmações se referem aos números reais positivos. O conjunto dos números reais positivos será designado por $\mathbb{R}^+$. Assim,

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x > 0\}.$$

As propriedades básicas dos números positivos, das quais resulta tudo o que se pode provar sobre desigualdades, são as seguintes:

P1) Dado o número real x, há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou x é positivo, ou $x = 0$ ou $-x$ é positivo.

P2) A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos.

Com relação à propriedade P1), $-x$ é, por definição, o único número real tal que $-x + x = 0$. E quando $-x$ é positivo, diz-se que x é um número negativo e escreve-se $x < 0$.

A desigualdade entre números reais reduz-se ao conhecimento dos números positivos, pois a afirmação $x < y$ equivale à afirmação de que a diferença $y - x$ é um número positivo. As propriedades essenciais da relação $x < y$ (que também se escreve $y > x$) são obtidas a seguir.

1. *Tricotomia.* Dados $x, y \in \mathbb{R}$ vale uma, e somente uma, das seguintes alternativas: $x < y$, $x = y$ ou $y < x$;
2. *Transitividade.* Se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$;
3. *Monotonicidade da adição.* Se $x < y$, então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$;
4. *Monotonicidade da multiplicação.* Se $x < y$ e z é positivo, então $xz < yz$.

A tricotomia resulta imediatamente de (P1). Com efeito, ou a diferença $y - x$ é positiva (em tal caso $x < y$) ou é zero (e então $x = y$) ou é negativa (o que significa $y < x$).

Quanto à transitividade, ela se prova usando (P2). Assim, se $x < y$ e $y < z$ então $y - x$ e $z - y$ são positivos, logo a soma $z - x = (y - x) + (z - y)$ é positiva, ou seja, $x < z$.

A monotonicidade da adição, conforme está enunciada, segue-se imediatamente da definição de $x < y$. Com efeito, se $x < y$ então $y - x$ é positivo. Ora, $y - x = (y + z) - (x + z)$. Logo $x + z < y + z$. Há uma forma mais forte de enunciar a monotonicidade da adição, que é a seguinte:

3'. Se $x < y$ e $x' < y'$, então $x + x' < y + y'$.

A propriedade (3') nos autoriza a somar *membro a membro* duas desigualdades. Ela decorre de (2) e (3). De fato, Se $x < y$ e $x' < y'$ então, somando x' a ambos os membros da primeira igualdade e y a ambos os membros da segunda, em virtude de (3), obtemos $x + x' < y + x'$ e $y + x' < y + y'$. Por transitividade resulta então que $x + x' < y + y'$.

Finalmente, a monotonicidade da multiplicação resulta do fato de que o produto de dois números positivos é ainda um número positivo. Com efeito se $x < y$ e z é positivo então $y - x > 0$ e $z > 0$, logo $(y - x)z > 0$, ou seja $yz - xz > 0$, o que significa $xz < yz$.

Como no caso da adição, também é permitido multiplicar membro a membro duas desigualdades, desde que os números que nelas ocorrem sejam positivos. O enunciado preciso é:

4'. Sejam x, y, x', y' números positivos. Se $x < y$ e $x' < y'$, então $xx' < yy'$.

Para provar isto, multiplicamos ambos os membros da desigualdade $x < y$ pelo número positivo x' e ambos os membros de $x' < y'$ pelo número positivo y, obtendo $xx' < yx'$ e $yx' < yy'$. Por transitividade, vem $xx' < yy'$.

As pessoas atentas a detalhes observarão que, para ser válida a propriedade (4'), basta que apenas três dos quatro números x, x', y e y' sejam positivos. (A demonstração acima requer apenas a positividade de x' e y mas, como $x' < y'$, daí resulta também que $y' > 0$.)

De (P1) e (P2) e suas consequências decorrem as propriedades a seguir.

5. Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$ (Todo número, exceto zero, elevado ao quadrado é positivo).

Com efeito, se $x > 0$ então, $x^2 > 0$ por (P2). E se $-x > 0$ então, ainda por (P2), $(-x)(-x) > 0$. Mas $(-x)(-x) = x^2$, logo $x^2 > 0$ em qualquer caso.

6. Se $0 < x < y$ então $0 < 1/y < 1/x$ (Quanto maior for um número positivo, menor será seu inverso).

Em primeiro lugar, o inverso de um número positivo também é positivo porque $\frac{1}{x} = x \cdot (\frac{1}{x})^2$ que é um produto de dois números positivos. Logo, multiplicando ambos os membros de $x < y$ pelo número positivo $1/xy$, vem $x/xy < y/xy$, isto é, $1/y < 1/x$.

7. Se $x < y$ e z é negativo, então $xz > yz$ (Quando se multiplicam os dois membros de uma desigualdade por um número negativo, o sentido dessa desigualdade se inverte).

Com efeito, o produto dos números positivos $y - x$ e $-z$ é positivo, isto é, $(y-x)(-z) > 0$. Efetuando a multiplicação, vem $xz - yz > 0$. Portanto, $xz > yz$.

A resolução de uma inequação com uma incógnita consiste na aplicação sucessiva das propriedades acima para simplificá-la até chegar a uma expressão final do tipo $x < c$ ou $x > c$.

Usa-se frequentemente a notação $x \leqslant y$ para significar a negação de $y < x$. Portanto, $x \leqslant y$ significa que $x < y$ ou $x = y$. Por exemplo, são verdadeiras as afirmações $3 \leqslant 3$ e $5 \leqslant 7$.

Para encerrar estas considerações sobre desigualdades, observemos que a afirmação $x < y$, relativa aos números reais x e y, pode ser interpretada de três modos diferentes, apresentados a seguir.

- *Geometricamente*: $x < y$ significa que, num eixo orientado, o ponto de abscissa y está à direita do ponto de abscissa x.
- *Numericamente*: Sejam

$$x = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots \quad e \quad y = b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$$

  números reais positivos dados por suas expressões decimais. Como se pode reconhecer que $x < y$? Certamente tem-se $x < y$ quando $a_0 < b_0$. (Lembre-se que estamos descartando as expressões decimais que terminam com uma sequência de noves.) Ou então, quando $a_0 = b_0$ e $a_1 < b_1$. Ou, quando $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, mas $a_2 < b_2$. E assim por diante. É como a ordem segundo a qual as palavras estão dispostas num dicionário. Tem-se $x < y$ se, e somente se, $a_0 < b_0$ ou então existe um inteiro $k > 0$ tal que $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_{k-1} = b_{k-1}$ e $a_k < b_k$. Caso se tenha $x \leqslant 0 < y$, a relação $x < y$ é automática. E, finalmente, se x e y forem ambos negativos, tem-se $x < y$ se, e somente se, o número positivo $-y$ for menor do que o número positivo $-x$, segundo o critério acima.
- *Algebricamente*: (Supondo conhecido o conjunto dos números positivos, gozando das propriedades (P1) e (P2) acima enunciadas.) Tem-se $x < y$ se, e somente se, a diferença $d = y - x$ é um número positivo. Noutras palavras, vale $x < y$ se, e somente se, existe um número real positivo d tal que $y = x + d$.

Qual das três interpretações acima para o significado da desigualdade $x < y$ é a mais adequada? Todas são. As circunstâncias é que determinam qual é a mais conveniente.

7.3 Intervalos

Definição 1

Sejam a, b números reais, com $a < b$. Os nove subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo definidos são chamados **intervalos**[1].

$$\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x \leq b\}; & (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \leq b\}; \\
(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x < b\}; & (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x < b\}; \\
[a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x < b\}; & [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a \leq x\}; \\
(a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x \leq b\}; & (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ a < x\}; \\
 & (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.
\end{array}$$

Os quatro intervalos da esquerda são *limitados*, com extremos a, b. O intervalo $[a,b]$ é *fechado*, (a,b) é *aberto*, $[a,b)$ é *fechado à esquerda*, $(a,b]$ é *fechado à direita*. Os cinco intervalos da direita são *ilimitados*. O intervalo $(-\infty, b]$ é a semirreta esquerda, fechada, de origem b. Os demais têm denominações análogas. Deve-se ressaltar enfaticamente que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ *não representam números reais*. Neste contexto, são apenas partes da notação de intervalos ilimitados.

☞ Para Saber Mais - Intervalos degenerados - Clique para ler

Os intervalos são (com as notáveis exceções de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$) os subconjuntos de $\mathbb{R}$ mais comumente empregados no ensino básico.

7.4 Valor Absoluto

O *valor absoluto (ou módulo)* de um número real x, indicado pela notação $|x|$, é definido pondo-se

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Outra maneira de se definir o valor absoluto consiste em pôr

$$|x| = max\{x, -x\},$$

isto é, o valor absoluto de x é maior dos números x e $-x$. (Quando $x = 0$ tem-se, é claro, $x = -x = |x| = 0$.)

Assim, por exemplo, $|x - 3| = x - 3$ se $x \geqslant 3$ e $|x - 3| = 3 - x$ quando $x < 3$.

Nas questões que envolvem o valor absoluto, somos obrigados, em princípio, a fazer as inevitáveis "considerações de casos", analisando separadamente as situações conforme o sinal de cada expressão que ocorre no interior das barras verticais $|\quad|$. Algumas vezes (infelizmente raras) isto pode ser evitado usando-se esta outra caracterização de valor absoluto: $|x| = \sqrt{x^2}$. Aqui estamos tirando partido da convenção que regula o uso do símbolo $\sqrt{a}$:

para todo $a \geqslant 0$, $\sqrt{a}$ é o número não negativo cujo quadrado é a.

Outra importante interpretação do valor absoluto é a seguinte: se x e y são respectivamente as abscissas dos pontos X e Y sobre o eixo $\mathbb{R}$, então $|x - y|$ é a distância do ponto X ao ponto Y (figura 7.1).

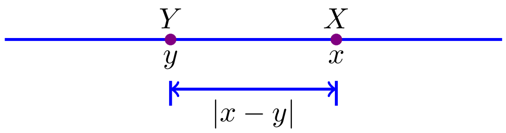


Figura 7.1: A interpretação do valor absoluto como distância.

A interpretação do valor absoluto $|x-y|$ como a distância no eixo real entre os pontos de abscissas x e y, permite que se possa enxergar intuitivamente o significado e a resposta de algumas questões envolvendo módulos. Por exemplo, a igualdade $|x - 2| = 3$ significa que o número x (ou o ponto que a ele corresponde no eixo) está a uma distância 3 do número 2. Logo, deve ser $x = 5$ (se x estiver à direita de 2) ou $x = -1$ (se estiver à esquerda). Um outro exemplo é uma desigualdade como $|x - a| < \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$. Isto significa que a distância de x ao ponto a é menor do que ε, logo x deve estar entre

$a - \varepsilon$ e $a + \varepsilon$. Portanto o conjunto $\{x \in \mathbb{R}\ ;\ |x - a| < \varepsilon\}$ é o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, chamado intervalo aberto de centro a e raio ε

Terminamos esta unidade observando que quando se lida com valores absolutos, não basta saber que $|x|$ é igual a x ou a $-x$. É necessário especificar quando é que se tem cada um desses casos. Esta observação deve ser aplicada especialmente na resolução de desigualdades.

7.5 Exercícios Recomendados

1. Dados os intervalos $A = [-1, 3)$, $B = [1, 4]$, $C = [2, 3)$, $D = (1, 2]$ e $E = (0, 2]$ dizer se 0 pertence a $((A \setminus B) \setminus (C \cap D)) \setminus E$, ou não.

2. Verifique se cada passo na solução das inequações abaixo está correto:

   (a) $\dfrac{5x+3}{2x+1} > 2 \quad \Rightarrow \quad 5x + 3 > 4x + 2 \quad \Rightarrow \quad x > -1;$

   (b) $\dfrac{2x^2+x}{x^2+1} < 2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + x < 2x^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x < 2.$

3. Sejam $a, b, c, d > 0$ tais que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

   Interprete este resultado no caso em que a, b, c e d são inteiros positivos (isto é, o que significa somar numeradores e denominadores de duas frações?)

4. Utilize a interpretação geométrica do módulo para resolver as equações e inequações abaixo:

   (a) $|x - 1| = 4;$

   (b) $|x + 1| < 2;$

   (c) $|x - 1| < |x - 5|;$

   (d) $|x - 2| + |x + 4| = 8;$

   (e) $|x - 2| + |x + 4| = 1.$

5. Sejam a e b números reais não negativos. Mostre que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}.$$

   Interprete geometricamente esta desigualdade.

6. Sabendo que os números reais x, y satisfazem as desigualdades $1,4587 < x < 1,4588$ e $0,1134 < y < 0,1135$, têm-se os valores exatos de x e y até milésimos. Que grau de precisão, a partir daí, podemos ter para o valor de xy? Determine esse valor aproximado. Como procederíamos para

obter um valor aproximado de x/y? Qual o grau de precisão encontrado no caso do quociente?

7. Considere todos os intervalos da forma $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Existe um número comum a todos estes intervalos? E se forem tomados os intervalos abertos?

7.6 Exercícios Suplementares

1. Prove que se a, x e y são números reais tais que

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x = a$.

2. Verdadeiro ou falso? Justifique a resposta dada:

   (a) $x < 7$ implica $|x| < 7$;

   (b) Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - 3| = |x - 4|$;

   (c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

3. Resolva a inequação

$$\frac{1}{2x+1} < \frac{1}{1-x}.$$

7.7 Textos Complementares

Para Saber Mais

Intervalos degenerados

Na definição 1, optamos por incluir apenas os casos em que $a < b$. Quando $a = b$, devemos incluir na lista de tipos de intervalos o conjunto vazio $\varnothing$ e os conjuntos unitários $\{a\}$ – estes correspondem aos casos chamados *intervalos degenerados*.

É importante observar que devemos incluir os casos de intervalos degenerados para que seja válida a seguinte caracterização:

$$I \subset \mathbb{R} \text{ é um intervalo se, e somente se, } x, y \in I\,,\ x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

De fato, os conjuntos unitários satisfazem trivialmente a propriedade $x, y \in \{a\}\,,\ x < z < y \Rightarrow z \in \{a\}$, por vacuidade; e o conjunto vazio a satisfaz também por vacuidade (como não existem elementos $x, y \in \varnothing$, em particular não existem elementos que contradizem a propriedade).

A caracterização acima permite-nos mostrar que a noção de intervalo corresponde a um caso particular (no caso da reta real) do conceito mais geral de *conjunto conexo*. No entanto, esta generalização escapa aos objetivos deste curso. Os leitores interessados podem consultar [?].

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

8

Funções Reais e Gráficos

Sumário

8.1 Introdução 2
8.2 Gráficos 3
8.3 Gráficos e Tabelas 4
8.4 Gráficos, Equações e Inequações 13
8.5 Gráficos e Domínios 15
8.6 Gráficos e Transformações no Plano 17
8.7 Crescimento e Pontos de Extremo 21
8.8 A Função Afim 23
8.9 Exercícios Recomendados 25
8.10 Exercícios Suplementares 27
8.11 Textos Complementares 31

8.1 Introdução

Em muitos casos, a abordagem para o conceito de função em livros didáticos do ensino básico é organizada em três contexto distintos: um *contexto concreto*, em que o conceito de função é motivado por meio de situações (ditas) cotidianas; um *contexto abstrato*, em que o conceito é apresentado como relação entre dois conjuntos; e finalmente um *contexto operacional*, em que se enfoca a manipulação algébrica de funções reais de variável real. No contexto concreto, o objetivo alegado é convencer os alunos da importância do conceito matemático de função, por meio da modelagem de situações supostamente familiares a eles (mas que frequentemente são escolhidas de forma inadequada). São empregadas principalmente descrições verbais e representações algébricas elementares. No contexto abstrato, a intenção é apresentar o conceito de função em toda a sua generalidade matemática, com domínios e contra-domínios genéricos (porém, os exemplos dados frequentemente envolvem apenas conjuntos finitos). A forma de representação predominante são os chamados diagramas de Venn. Em seguida, o tom da abordagem muda significativamente para o contexto operacional. A ênfase passa a ser o estudo de propriedades de certas classes de funções reais elementares (afins, quadráticas, modulares, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas), representadas na forma algébrica. São explorados alguns procedimentos particulares (ou inadequadamente particularizados) para manipulação algébrica e esboço de gráficos. A preocupação com domínio e contradomínio na definição de uma função é abandonada e a ênfase passa a se concentrar apenas nas fórmulas algébricas. Os dois contextos anteriores são então deixados de lado e esta passa a ser a abordagem predominante no restante dos livros.

Geralmente, poucas relações são estabelecidas entre esses três contextos. Em alguns casos, a separação é tão estrita, que pode causar a impressão de que o termo "função" é empregado para noções matemáticas inteiramente distintas, que por acaso recebem o mesmo nome.

O estudo das propriedades de funções reais elementares no ensino básico, com ênfase em suas principais classes, é certamente importante. Entretanto, a separação excessiva entre essas classes e entre os diferentes contextos em que o conceito de função é abordado pode ter efeitos prejudiciais à aprendizagem.

Por exemplo, a ênfase em procedimentos operacionais particularizados para manipulação algébrica de funções reais pode levar a uma concepção de função restrita à ideia de fórmula (como já comentamos na Unidade 4). Além disso, certas propriedades gerais de funções reais podem ser entendidas pelos alunos como sendo particulares de alguma classe; e reciprocamente, certas propriedades que são particulares de alguma classe podem ser indevidamente generalizadas.

Nesta unidade, discutiremos algumas propriedades gerais de funções reais de variável real. Nas unidades seguintes aprofundaremos o estudo das principais classes de funções reais elementares. A clareza de propriedades gerais de funções reais é importante para articular adequadamente os contextos concreto, abstrato e operacional de funções no ensino básico.

8.2 Gráficos

Uma função na forma $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada uma função *real* (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) *de variável real* (pois sua variável independente assume valores reais, isto é, seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$). O gráfico de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in D \, , \; y = f(x)\right\} .$$

Assim, um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $x \in D$ e os números reais x e y satisfazem a lei de associação de f. Em outras palavras, *o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de associação*. Por mais básico que possa parecer este fato, nem sempre ele é claramente entendido pelos estudantes no ensino básico – e estas dificuldades de aprendizagem estão relacionados com a forma como gráficos de funções são usualmente ensinados.

☞ Na Sala de Aula - Tratamento da Informação - Clique para ler

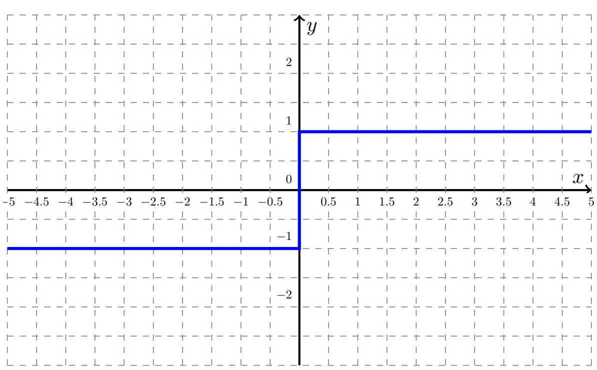
8.3 Gráficos e Tabelas

O principal recurso para traçar gráficos de funções reais apresentado aos alunos no ensino básico é o procedimento baseado em substituição e interpolação. A partir de uma expressão algébrica dada, monta-se uma tabela de valores e, em seguida, os pontos correspondentes são marcados no plano cartesiano e ligados. Em geral, os valores da variável independente escolhidos para a tabela são números inteiros próximos de 0 e os pontos são ligados por meio de segmentos de reta. Este procedimento, efetuado da maneira descrita, envolve pouca reflexão matemática sobre a função em questão. Tanto a escolha dos valores para a composição da tabela quanto a interpolação dos pontos obtidos são feitas sem que sejam levadas em consideração as propriedades algébricas e geométricas da função.

Portanto, o procedimento de substituição e interpolação reduz-se essencialmente a uma rotina mecanizada, que não contribui para a compreensão do gráfico como o conjunto dos pontos que satisfazem à lei de associação da função, e ainda pode induzir a erros. Observemos os Exemplos 1 a 3, a seguir.

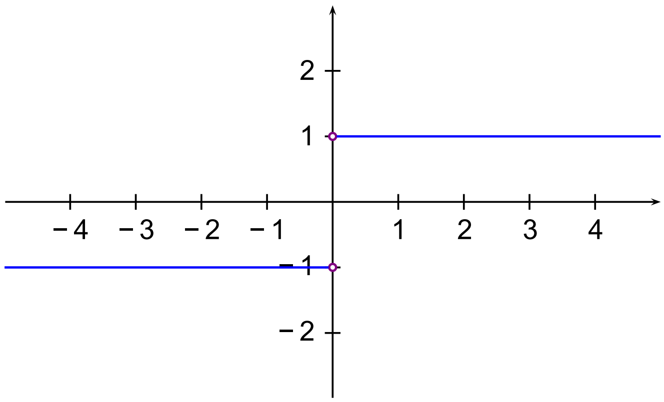
Exemplo 1

Ao lado, temos o gráfico da função $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$, traçada por um programa de computador. O gráfico está correto? Por que você acha que o gráfico adquiriu este aspecto?



Evidentemente, o gráfico traçado pelo computador não está correto. Para traçá-lo corretamente, devemos considerar o fato de que $x = 0$ não pertence ao domínio de h, portanto o gráfico tem uma interrupção neste ponto (que em geral representamos por uma bolinha aberta) e observar que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

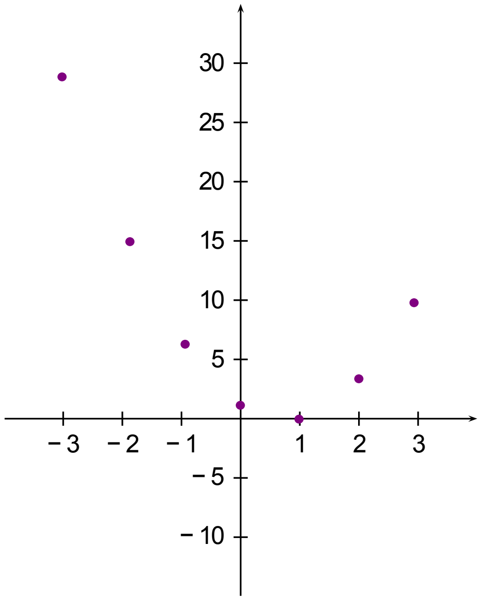


Para responder porque o gráfico de h adquiriu este aspecto, devemos entender como ele foi traçado pelo computador: foi calculado um número grande (porém finito) de valores e os pontos correspondentes foram interpolados, sem que fossem levadas em conta as propriedades qualitativas da função (no caso, a interrupção do gráfico). Por isso, o programa ligou os pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$, como esse segmento fosse parte do gráfico (o que contradiria o próprio fato de f ser uma função).

Exemplo 2

Considere a função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Suponha que, para esboçar o gráfico de p, você monte uma tabela com valores entre -3 e 3, por exemplo, e marque os pontos correspondentes no plano cartesiano.

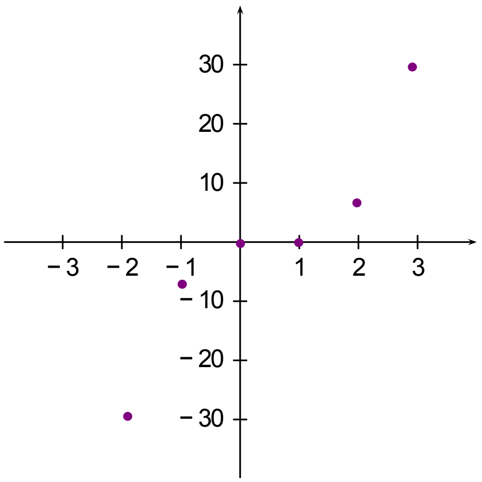
x	$p(x)$
-3	28
-2	15
-1	6
0	1
1	0
2	3
3	10



Os pontos marcados de fato sugerem o formato de parábola, mas deixam escapar o mínimo absoluto da função, que ocorre no ponto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. É claro que, como se trata de uma função quadrática, dispomos de métodos, acessíveis ao ensino básico, que nos permitem localizar este ponto de mínimo.

Exemplo 3 Considere agora $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Como no exemplo anterior, para esboçar o gráfico de q, suponha que você monte uma tabela com valores entre -3 e 3 e marque os pontos correspondentes.

x	$q(x)$
-3	-84
-2	-30
-1	-6
0	0
1	0
2	6
3	30



Neste caso, os pontos marcados dão ideia do crescimento da função, mas não do que ocorre no intervalo $[0, 1]$, onde se encontram os dois extremos locais da função. Entretanto, não há formas acessíveis ao ensino básico que nos permitam localizar esses pontos, pois para isso precisaríamos lançar mão de métodos do cálculo infinitesimal. Porém, fatorando a função q, obtemos

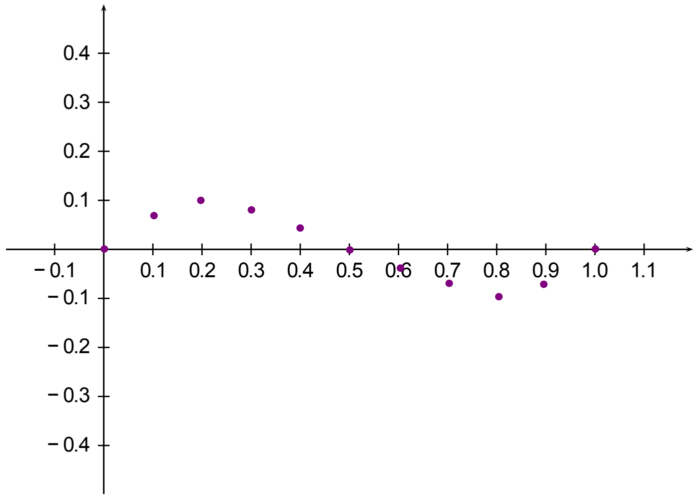
$$q(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = x(2x^2 - 3x + 1)\,.$$

Esta fatoração fornece as raízes de q: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ e $x_3 = 1$. Além disso, a fatoração permite-nos determinar o sinal da função nos intervalos entre as raízes. Como já sabemos que $2x^2-3x+1 < 0$ se $\frac{1}{2} < x < 1$ e $2x^2-3x+1 > 0$ se $x < \frac{1}{2}$ ou $x > 1$, concluímos que

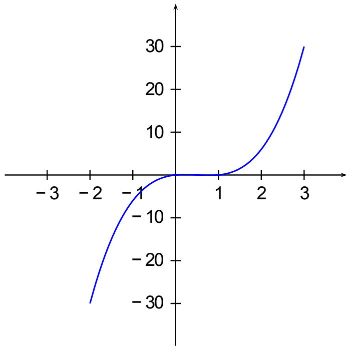
$$q(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } \tfrac{1}{2} < x < 1;$$
$$q(x) > 0 \text{ para } 0 < x < \tfrac{1}{2} \text{ ou } x > 1.$$

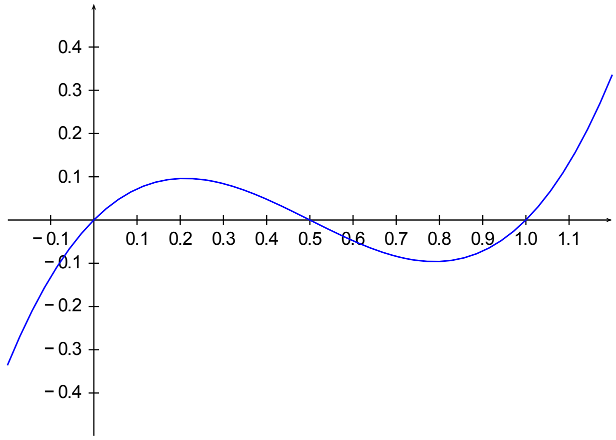
Assim, q vale 0 nas extremidades do intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e é positiva em seu interior. Podemos concluir daí que q tem (pelo menos) um ponto de máximo local no interior desse intervalo. Analogamente, q vale 0 nas extremidades do intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ e é negativa em seu interior. Portanto, q tem (pelo menos) um ponto de mínimo local no interior do intervalo. Para localizar as posições exatas desses extremos locais, precisaríamos de métodos do cálculo infinitesimal. Mas, com a ajuda de uma tabela de valores adequadamente escolhidos (e uma calculadora), podemos dar aos alunos no ensino médio uma ideia aproximada do comportamento da função no intervalo $[0, 1]$.

x	$q(x)$
$0,1$	$0,072$
$0,2$	$0,096$
$0,3$	$0,084$
$0,4$	$0,048$
$0,5$	0
$0,6$	$-0,048$
$0,7$	$-0,084$
$0,8$	$-0,096$
$0,9$	$-0,072$



Esta análise combinada permite-nos ter uma ideia do comportamento global de q e do comportamento de q no intervalo $[0, 1]$.





Em geral, no ensino básico os únicos exemplos de funções polinomiais apresentados aos alunos são as de 1º e 2º graus. Exemplos elementares de funções polinomiais de graus maiores, e mesmo funções racionais simples, podem ser analisados, por meio da combinação de métodos qualitativos (tais como fatoração e estudo de sinais) e quantitativos (substituição de valores, escolhidos levando-se em conta as propriedades da função em questão). Esses métodos não apresentam dificuldades conceituais adicionais para os alunos no ensino médio, desde que aplicados a exemplos elementares. Mesmo que não seja possível determinar as posições exatas de pontos de máximo e de mínimo, essa combinação de métodos permite esboços razoavelmente aproximados. Sobretudo, este tipo de análise pode contribuir para ampliar a compreensão dos alunos sobre gráficos de funções, com foco nas relações entre o aspecto dos gráficos e as propriedades algébricas das funções.

Exemplo 4

Considere agora $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$. Então,

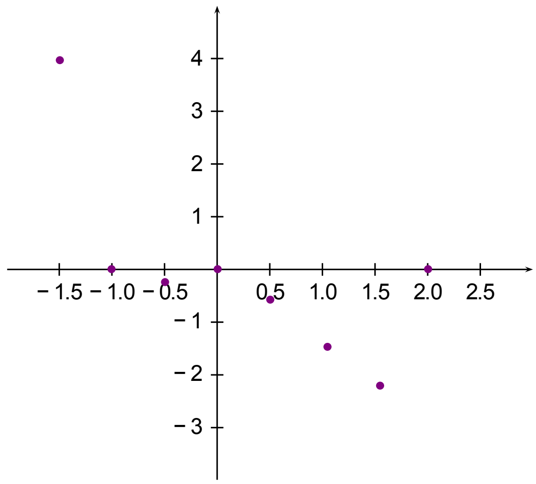
$$g(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2).$$

Logo, as raízes de g são: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 2$. Podemos concluir também que

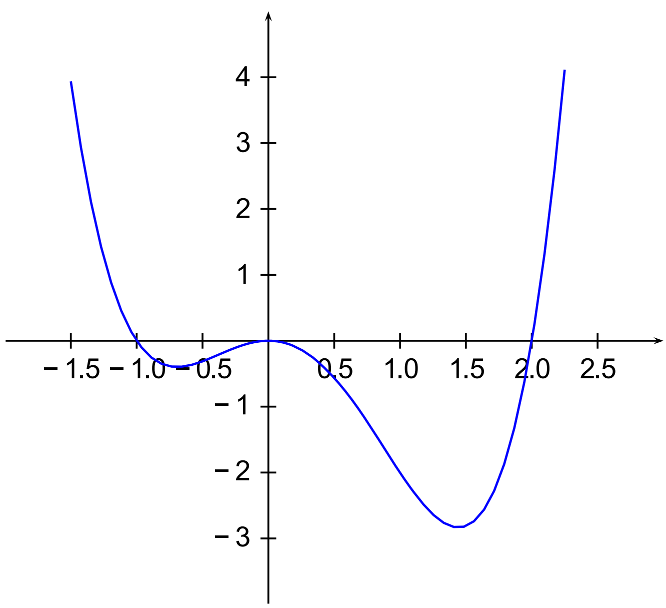
$$g(x) < 0 \text{ para } -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < 2;$$
$$g(x) > 0 \text{ para } x < -1 \text{ ou } x > 2.$$

Para compor a tabela abaixo, substituímos na expressão de g (com ajuda da calculadora) alguns valores, em intervalos $\Delta x = 0,5$. (Por que você acha que fizemos esta escolha? Você faria outra?)

x	$g(x)$
$-1,5$	$3,9375$
-1	0
$-0,5$	$-0,3125$
0	0
$0,5$	$-0,5625$
1	-2
$1,5$	$-2,8125$
2	0
$2,5$	$10,9375$



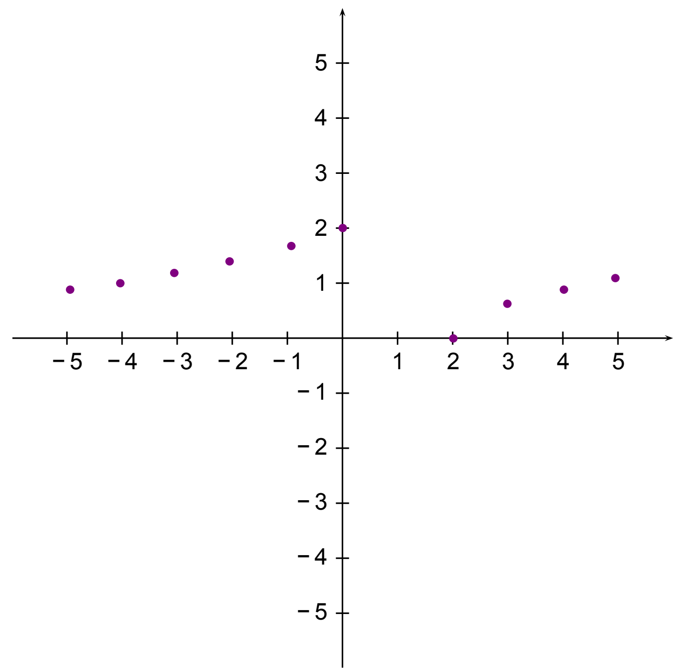
Assim, podemos ter um esboço aproximado do gráfico de g. É importante ressaltar que, para ter certeza do aspectos do gráfico, teríamos que usar métodos analíticos do cálculo infinitesimal.



Exemplo 5

Considere $r : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Não é difícil ver que a única raiz de r é $x = 2$, que $r(x) > 0$ para $x < 1$ ou $x > 2$ e que $r(x) < 0$ para $1 < x < 2$. Uma tabela com valores inteiros de x nos dá o seguinte resultado.

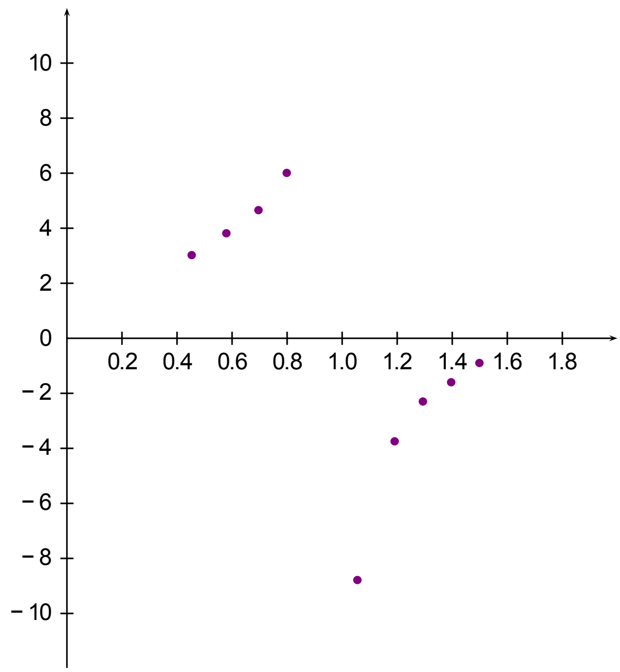
x	$r(x)$
-5	$7/6$
-4	$6/5$
-3	$5/4$
-2	$4/3$
-1	$3/2$
0	2
2	0
3	$1/2$
4	$2/3$
5	$3/4$



Os valores acima sugerem que, quando os valores de x ficam grandes em módulo (tanto positivos quanto negativos), os valores de $r(x)$ ficam cada vez mais próximos de 1. Isto ocorre porque, para valores grandes de x as constantes -2 e -1 tendem a ficar desprezíveis, portanto temos que $\frac{x-2}{x-1} \cong \frac{x}{x} = 1$.

Por outro lado, a tabela acima deixa de fora o comportamento de r na parte do domínio em que a função assume valores negativos e, sobretudo, nos próximos de $x = 1$. É sempre importante entender o comportamento de uma função na proximidade do ponto em que ela não está definida (como é o caso), ou em que é descontínua.

x	$r(x)$
$0,5$	3
$0,6$	$3,5$
$0,7$	$4,333\ldots$
$0,8$	6
$0,9$	11
$1,1$	-9
$1,2$	-4
$1,3$	$-2,333\ldots$
$1,4$	$-1,5$
$1,5$	-1

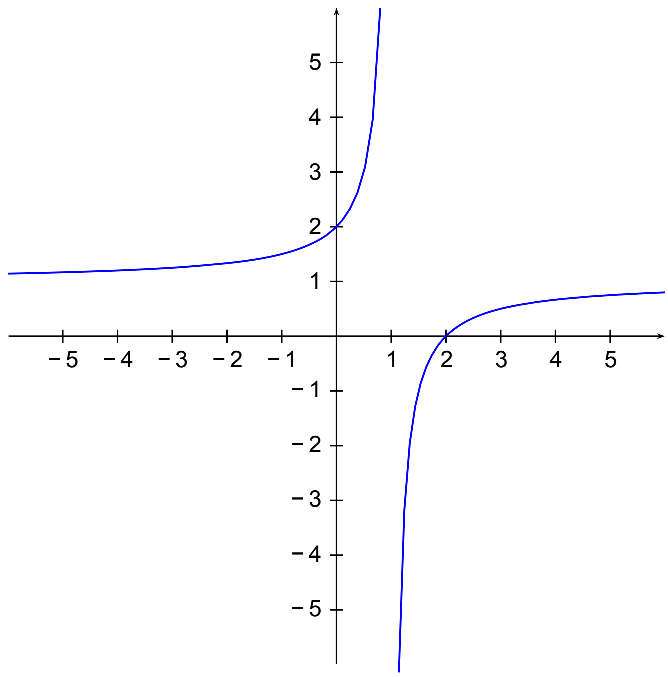


Percebemos que, quando x se aproxima de 1, os valores de $r(x)$ ficam cada vez maiores em módulo (positivos à esquerda e negativos à direita de 1). Isto ocorre porque estamos calculando o resultado de divisões cujos divisores são números próximos de 0, o que equivale a multiplicar por números grandes (em módulo).

Esta discussão é uma forma intuitiva de introduzir a noção de limite. No caso, temos

$$\lim_{x \to 1^-} r(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} r(x) = -\infty, . \qquad \lim_{x \to -\infty} r(x) = \lim_{x \to +\infty} r(x) = 1$$

Podemos traçar o seguinte esboço do gráfico de r:



Em suma, é importante que fique claro para os alunos que uma tabela de valores sempre fornecerá um retrato aproximado do gráfico. Por exemplo, no Exemplo 4, escolhemos compor a tabela com valores com $\Delta x = 0,5$, porém valores com espaçamento menor dariam um esboço mais preciso do gráfico. Por isso, o uso de tabelas de valores para a construção de gráficos sempre deve ser articulada com a análise *qualitativa* das propriedades da função. Mesmo assim, algumas questões com respeito ao comportamento gráfico de funções permanecerão em aberto no ensino médio, pois suas respostas demandam métodos e argumentos do Cálculo Infinitesimal.

No caso do Exemplo 4, a escolha dos valores com $\Delta x = 0,5$ baseou-se na constatação de que g admite pelo menos um ponto de mínimo local no intervalo $]-1,0[$ e pelo menos um ponto de mínimo local no intervalo $]0,2[$ (uma vez que $g(-1) = g(0) = g(2) = 0$ e $g(x) < 0$ em $]-1,0[$ e em $]0,2[$). Entretanto, para saber o número de pontos de extremo e a localização exata em que esses pontos ocorrem, precisaríamos recorrer à derivada de g. No caso do Exemplo 5, a análise algébrica da função, combinada com as tabelas com valores convenientemente escolhidos, permitiu ter uma ideia intuitiva do comportamento da função perto de $x = 1$ e quando x cresce indefinidamente.

8.4 Gráficos, Equações e Inequações

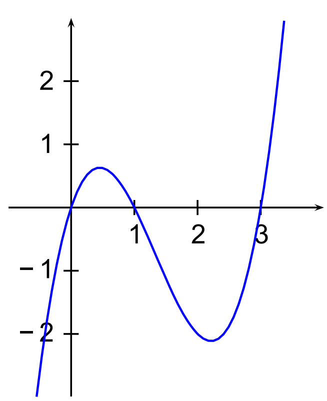
Uma grande dificuldade dos alunos no ensino médio é a resolução de inequações que não sejam de 1º grau, tais como as quadráticas e modulares. Mesmo em casos simples como $x^2 > 1$, muitos alunos tendem a aplicar mecanicamente a regra de "passar para o outro lado", chegando à solução errônea $x > 1$. Entender o significado geométrico da resolução de equações e inequações pode ajudá-los a evitar tais erros. Para isso, devemos entender a relação entre funções, equações e inequações. Uma equação em uma variável pode ser escrita como $f(x) = 0$, para alguma função real f; e, analogamente, uma inequação em uma variável pode ser escrita como $f(x) > 0$ ou $f(x) \geqslant 0$, para alguma função real f.

Assim, no Exemplo 4, temos que

A solução da inequação $x^4 - x^3 - 2x^2 < 0$ é o conjunto $]-1, 0[\cup]0, 2[$.
A solução da inequação $x^4 - x^3 - 2x^2 \leqslant 0$ é o conjunto $[-1, 2]$.
A solução da inequação $x^4 - x^3 - 2x^2 > 0$ é o conjunto $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$.
A solução da inequação $x^4 - x^3 - 2x^2 \geqslant 0$ é o conjunto $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$.

Exemplo 6

Suponhamos que queiramos resolver a inequação $x^3 - 4x^2 + 3x \geqslant 0$, para $x \in \mathbb{R}$. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$. Se fatoramos f, obtemos: $f(x) = x\,(x-1)\,(x-3)$. Podemos concluir daí que as raízes de f são $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 3$ e que $f(x) < 0$ para $0 < x < 1$ ou $x > 3$; $f(x) > 0$ para $x < 0$ ou $1 < x < 3$. Portanto, a solução da inequação $x^3 - 4x^2 + 3x \geqslant 0$ é o conjunto $[0, 1] \cup [3, +\infty[$. O gráfico da função dá uma interpretação geométrica para a solução da inequação.



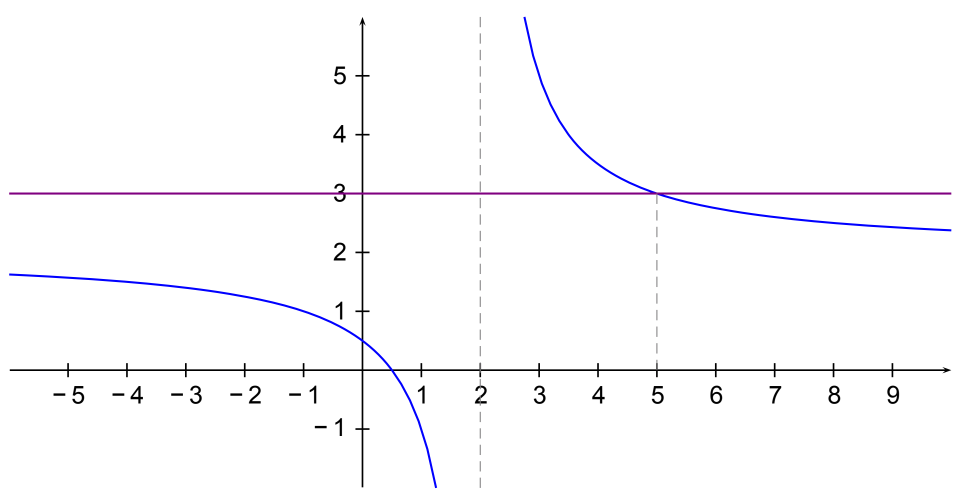
Exemplo 7

Consideremos a inequação $\dfrac{2x-1}{x-2} > 3$, para $x \in \mathbb{R}$. Uma tentativa descuidada de resolvê-la poderia nos levar à conclusão de que ela é equivalente à inequação de 1º grau $2x - 1 > 3x - 6$, cuja solução é $x < 5$. Entretanto, em primeiro lugar, é preciso excluir o valor da $x = 2$ da solução da inequação. Além disso, devemos lembrar que $x - 2$ também assume valores negativos, portanto, ao multiplicar a inequação por este termo, precisamos separar a resolução em dois casos.

- Se $x - 2 > 0$, isto é, $x > 2$, temos
$$\frac{2x-1}{x-2} > 3 \iff 2x - 1 > 3x - 6 \iff x < 5.$$
Portanto, os valores que satisfazem à inequação neste intervalo são aqueles tais que $2 < x < 5$.
- Se $x - 2 < 0$, isto é, $x < 2$, temos
$$\frac{2x-1}{x-2} > 3 \iff 2x - 1 < 3x - 6 \iff x > 5.$$
Portanto, não existem valores que satisfaçam à inequação neste intervalo.

Então, a solução correta da inequação é o conjunto $]2, 5[$.

Esses procedimentos algébricos de resolução podem ganhar mais concreteza para os alunos se acompanhados de uma interpretação geométrica. Esta interpretação pode ser dada pelo gráfico da função $g : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$, como ilustra a figura abaixo.



8.5 Gráficos e Domínios

Não é incomum encontrarmos em livros do ensino médio exercícios cujos enunciados pedem para "determinar o domínio" de funções com expressões algébricas dadas. Como observamos na Unidade 4, uma função é definida por três elementos: domínio, contradomínio e lei de associação. Assim, o domínio de uma função é parte de sua definição. Quando dizemos que conhecemos uma função, então seu domínio já deve ser sabido. Portanto, não faz sentido pedir que se determine o domínio de uma função dada.

Por exemplo, o maior conjunto em que podemos definir uma função real de variável real com lei de associação dada pela expressão $y = \sqrt{x}$ é o intervalo $[0, +\infty[$. Isto é, o conjunto $[-1, +\infty[$ não pode ser domínio de uma função com essa lei de associação. Porém, nada impede que escolhamos domínios como $[1, +\infty[$, ou $\mathbb{N}$; e $f_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_2 : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ serão *funções diferentes*.

Em geral, a intenção com exercícios deste tipo é pedir que se determine *o maior subconjunto de* $\mathbb{R}$ *possível que pode ser definido como domínio de uma função cuja lei de associação é estabelecida pela expressão algébrica dada*. Essa linguagem pode ser um tanto rebuscada para o ensino básico, mas é importante que os alunos entendam que o domínio de uma função é definido junto com a função, e não algo que se determina posteriormente. Este fato pode ser ilustrado por problemas em que usamos funções para modelar situações concretas, pois nestes casos o domínio escolhido dependerá das condições do problema.

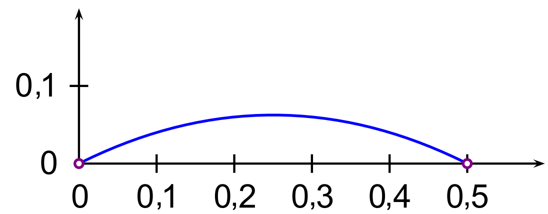
Exemplo 8

Considere o seguinte problema: *Dentre todos os retângulos cujo perímetro é igual a* 1*, determinar aquele de maior área.* Como o perímetro do retângulo é fixo, a medida de um dos lados determina a do segundo. Assim, a área do retângulo depende apenas de um dos lados. Se chamamos a medida deste lado de x, sua área será dada por:

$$S(x) = x\left(\frac{1}{2} - x\right).$$

Se olharmos apenas para a expressão algébrica acima, veremos que ela pode ser definida para $x \in \mathbb{R}$. Porém, se consideramos o fato de que queremos definir a *função área*, cuja variável independente é o lado do retângulo, concluiremos que, no contexto do nosso problema só faz sentido tomar $0 < x < \frac{1}{2}$. Assim, definimos:

$$\begin{array}{rccc} S: & \left]0, \frac{1}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x\left(\frac{1}{2} - x\right) \end{array}$$



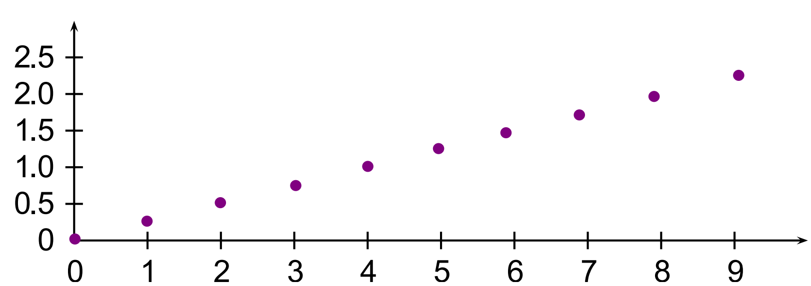
Observe que o desenho do gráfico deve ser consistente com o domínio da função. Esta função atinge um máximo absoluto em $x = \frac{1}{4}$. Portanto, a solução do problema é o quadrado de lado $\frac{1}{4}$.

Exemplo 9

Em muitos casos, no ensino básico, abordamos situações envolvendo grandezas que dependem de variáveis que assumem apenas valores discretos, como por exemplo: *O preço de um lápis é R$* $0,25$. *Qual é o preço de* n *lápis?* Para representar esta situação por meio de uma função, devemos definir:

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & 0,25\,n \end{array}$$

Neste caso, o gráfico de p terá o aspecto abaixo.



Observe que, embora a expressão algébrica de $0,25\,n$ faça sentido para qualquer valor real da variável n, definimos p com domínio $\mathbb{N}$ (em geral, não compramos $\frac{1}{2}$ lápis, ou π lápis). O aspecto do gráfico de uma função está relacionado com o seu domínio. No caso deste exemplo, como o domínio de p é $\mathbb{N}$, seu gráfico é constituído por pontos isolados, *que não devem ser ligados*.

Como o procedimento para esboço de gráficos mais apresentado aos alunos no ensino básico baseia-se na ligação não criteriosa de pontos, e como em geral é dada muita ênfase em fórmulas algébricas para representar funções e pouca reflexão sobre a natureza de suas variáveis e seus domínios, uma tendência comum entre os alunos é simplesmente ligar esses pontos.

8.6 Gráficos e Transformações no Plano

Quando ensinamos funções trigonométricas no ensino médio, frequentemente exploramos os efeitos de parâmetros reais a, b, c, d em família de curvas do tipo $f(x) = c\,\mathrm{sen}\,(d\,x + b) + a$. Por exemplo, a Figura 8.1 mostra a comparação entre as curvas $y = \sin(x)$, $y = \sin(x) + 1$ e $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; e a Figura 8.2 mostra a comparação entre as curvas $y = \sin(x)$, $y = 2\sin(x)$ e $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

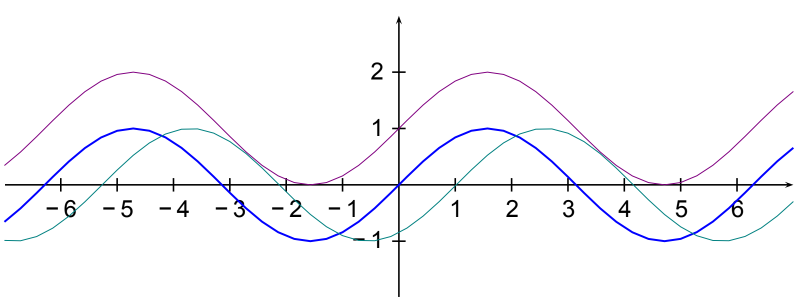


Figura 8.1: As curvas $y = \sin(x)$, $y = \sin(x) + 1$ e $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

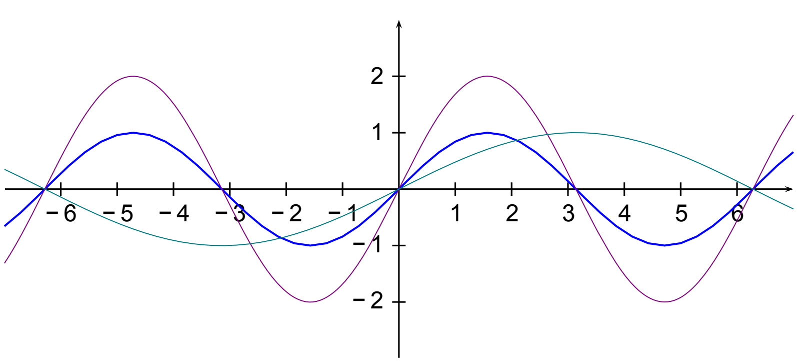


Figura 8.2: As curvas $y = \sin(x)$, $y = 2\sin(x)$ e $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Quando somamos uma constante à função, deslocamos o gráfico verticalmente; e quando somamos uma constante à variável independente, deslocamos o gráfico horizontalmente. Quando multiplicamos uma função trigonométrica por uma constante, dilatamos ou contraímos o gráfico verticalmente, isto é, alteramos a amplitude. Quando multiplicamos a variável independente de uma função trigonométrica por uma constante, dilatamos ou contraímos o gráfico horizontalmente, isto é, alteramos a frequência e o período (de forma inversamente proporcional). Estes efeitos não são restritos às funções trigonométricas (ou às funções periódicas), e podem ser generalizados para funções reais quaisquer (independentemente da função ter amplitude, frequência ou período). De forma geral, temos que:

- os parâmetros aditivos a e b determinam translações horizontais e verticais nos gráficos das funções;
- os parâmetros multiplicativos c e d determinam dilatações ou contrações horizontais e verticais nos gráficos das funções.

Não é difícil entender o que ocorre quando variamos o parâmetro aditivo a. Como estamos somando uma mesma constante às ordenadas de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico, o resultado é um *deslocamento vertical*:

- no sentido positivo do eixo (para cima), se o valor do parâmetro for positivo;
- no sentido negativo do eixo (para baixo), se o valor do parâmetro for negativo.

No entanto, pode ser mais difícil interpretar a influência do parâmetro b no gráfico. A soma de uma constante positiva à variável independente da função (dentro dos parênteses) acarreta em um movimento para a esquerda, e não para a direita como poderia ser inicialmente esperado pelos alunos. Neste caso, justamente porque definimos uma nova função somando b unidades à variável x, para que um elemento do domínio desta nova função tenha a mesma imagem que um elemento do domínio da função original, este deve ser subtraído de b unidades. Isto provoca um *deslocamento horizontal do gráfico*:

- no sentido positivo do eixo (para a direita), se o valor do parâmetro for negativo;
- no sentido negativo do eixo (para a esquerda), se o valor do parâmetro for positivo.

Uma tabela com valores convenientemente escolhidos pode ajudar a entender estes efeitos. Por exemplo, considere as funções $f, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f_1(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Observe na tabela abaixo a relação entre os valores da variável x, de $x - \frac{\pi}{4}$ e de $f_1(x)$. Compare esses valores com as curvas mostradas na Figura 8.1.

$x - \frac{\pi}{4}$	x	$f_1(x)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	1
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	-1
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0

De forma semelhante, multiplicar a função por c corresponde a multiplicar por uma constante positiva as ordenadas de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico. O resultado é uma *dilatação vertical*. Se o parâmetro tiver valor negativo, além da dilatação, o gráfico sofre também uma *reflexão em relação ao eixo horizontal*. Assim, temos:

- um esticamento vertical se o valor do parâmetro for maior que 1;
- um encolhimento vertical se o valor do parâmetro estiver entre 0 e 1;
- um esticamento vertical composto com reflexão em relação ao eixo horizontal se o valor do parâmetro for menor que -1;
- um encolhimento vertical composto com uma reflexão em relação ao eixo horizontal se o valor do parâmetro estiver entre -1 e 0.

Resta entender o efeito do parâmetro d. Como definimos uma nova função multiplicando a variável dependente por uma constante d, para que um elemento do domínio da nova função tenha a mesma imagem que um elemento do domínio da função original, este deve ser dividido por d. Isto provoca uma *dilatação horizontal* do gráfico, que será composta com uma *reflexão em relação ao eixo vertical*, se o parâmetro tiver valor negativo. Sintetizando,

- um encolhimento horizontal se o valor do parâmetro for maior que 1;
- um esticamento horizontal se o valor do parâmetro estiver entre 0 e 1;
- um encolhimento horizontal composto com uma reflexão em relação ao eixo vertical se o valor do parâmetro for menor que -1;
- um esticamento composto com uma reflexão em relação ao eixo vertical se o valor do parâmetro estiver entre -1 e 0.

Como no caso das translações horizontais, uma tabela pode ajudar a entender o efeito de uma dilatação horizontal. Considere as funções $f, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $f_2(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$. A tabela abaixo relaciona os valores da variável x, de $\frac{1}{2}\,x$ e de $f_2(x)$. Compare esses valores com as curvas mostradas na Figura 8.2.

$\frac{1}{2}\,x$	x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	π	1
π	$2\,\pi$	0
$\frac{3\,\pi}{2}$	$3\,\pi$	-1
$2\,\pi$	$4\,\pi$	0

Como já comentamos, as conclusões obtidas acima, sobre os efeitos de translações e dilatações em gráficos de funções, são gerais, e não exclusivas das funções trigonométricas. Escolhemos o exemplo da função seno somente porque o formato particular de seu gráfico facilita a visualização dos efeitos geométricos.

☞ Para Saber Mais - Translações e Vértices de Parábolas - Clique para ler

8.7 Crescimento e Pontos de Extremo

No ensino fundamental e no ensino médio, estamos acostumados a ensinar a classificação de funções do primeiro grau como *crescentes* ou *decrescentes* (dependendo do sinal do coeficiente angular); e a determinação de máximos ou mínimos de funções do segundo grau (dependendo do sentido da concavidade). Porém, crescimento e máximos e mínimos não são conceitos restritos a funções polinomiais de primeiro ou segundo graus. Observe suas definições gerais, que também generalizam as definições dadas na Unidade 5 para as sequências.

Definição 1

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) f é **monótona (estritamente) crescente** se $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2);$$

(ii) f é **monótona não decrescente** se $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

(iii) f é **monótona (estritamente) decrescente** se $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2);$$

(iv) f é **monótona não crescente** se $x_1, x_2 \in D$,
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Definição 2

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(i) f é **limitada superiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leqslant M$, para todo $x \in D$;

(ii) f é **limitada inferiormente** se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geqslant M$, para todo $x \in D$;

(iii) $x_0 \in D$ é um **ponto de máximo absoluto** de f se $f(x_0) \geqslant f(x)$, para todo $x \in D$;

(iv) $x_0 \in D$ é um **ponto de mínimo absoluto** de f se $f(x_0) \leqslant f(x)$, para todo $x \in D$;

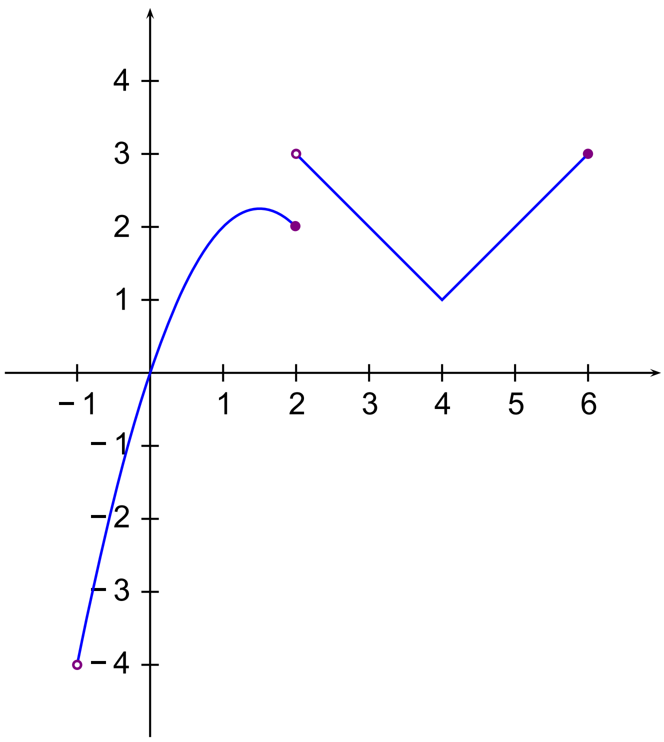
(v) $x_0 \in D$ é um **ponto de máximo local** de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \geqslant f(x)$, para todo $x \in D \cap \,]x_0 - r, x_0 + r[\,$;

(vi) $x_0 \in D$ é um **ponto de mínimo local** de f se existe $r > 0$ tal que $f(x_0) \leqslant f(x)$, para todo $x \in D \cap \,]x_0 - r, x_0 + r[\,$.

EXEMPLO 10

A função $h :]-1, 6] \to \mathbb{R}$, cujo gráfico é esboçado abaixo, é definida por

$$h(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ |x-4| + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



Então, h:

- possui um máximo local em $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$;
- possui mínimos locais em $(2, 2)$ e em $(4, 1)$;
- possui um máximo absoluto em $(6, 3)$;
- não possui mínimos absolutos;
- é crescente em $\left]-1, \frac{3}{2}\right]$ e em $[4, 6]$;
- é decrescente em $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ e em $]2, 4]$.

☞ Na Sala de Aula - Propriedades Particulares e Gerais - Clique para ler

8.8 A Função Afim

Definição 3

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **afim** quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 11

A *função identidade* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são afins as *translações* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções *lineares*, $f(x) = ax$ e as funções *constantes* $f(x) = b$.

É possível, mediante critérios como os que apresentaremos logo a seguir, saber que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente.

Exemplo 12

O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, em que x é a distância percorrida (usualmente medida em quilômetros), o valor inicial b é a chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

Veremos a seguir que o gráfico de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta. Para isto, basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1+b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares. Para que isto ocorra, é necessário e suficiente que a maior das três distâncias entre pares desses pontos seja igual à soma das outras duas (figura 8.3). Ora, podemos sempre supor que as abscissas x_1, x_2 e x_3 são tais que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}; \\
d(P_2, P_3) &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}; \\
d(P_1, P_3) &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.
\end{aligned}$$

Daí segue-se imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

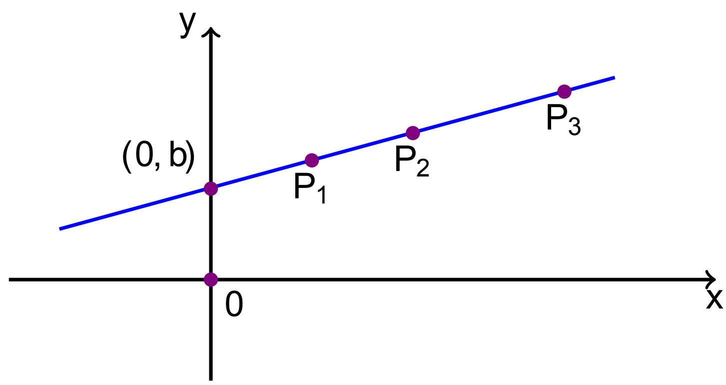


Figura 8.3: O gráfico de uma função afim é uma reta.

Como consequência do que acabamos de apresentar, para que uma função afim f fique inteiramente determinada basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Isto porque o gráfico de f é uma linha reta e, como sabemos, uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos.

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se a *inclinação*, ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente. Note que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não é paralela ao eixo OY. Deixamos como exercício para o leitor verificar a recíproca deste fato. Ou seja, que se o gráfico de uma função é uma reta não vertical, então a função é afim.

☞ Na Sala de Aula - Comentários sobre Terminologia - Clique para ler

8.9 Exercícios Recomendados

1. Em cada um dos itens a seguir, defina uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, com a a lei de formação dada, onde D é o maior subconjunto possível de $\mathbb{R}$. Esboce o gráfico da função definida.

(a) $y = x^3 + x^2 + x$;

(b) $y = x^4 - 5x^2 + 4$;

(c) $y = x\,|x|$;

(d) $y = |x^2 - 1|$;

(e) $y = x + |x|$;

(f) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

2. Resolva as inequações a seguir, para $x \in \mathbb{R}$, e interprete as soluções geometricamente.

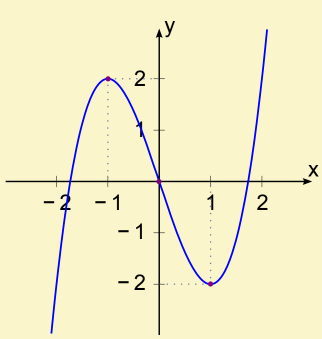
(a) $(x^2 - 1)^2 \geqslant 1$;

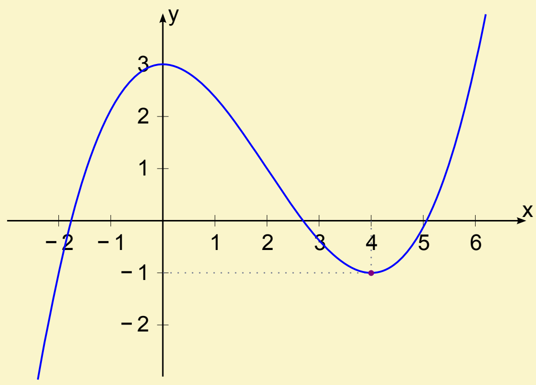
(b) $x^3 - 2\,x^2 - x + 2 > 0$;

(c) $\dfrac{2x + 1}{x + 1} < 3$.

3. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x^2 - 1|$. Esboce os gráficos de h e das funções definidas por $h_1(x) = h(x + 1) - 2$, $h_2(x) = 3\,h(2\,x)$ e $h_3(x) = \frac{1}{2}\,h(3\,x - 1) - 2$.

4. Abaixo, vemos os gráficos de duas funções, com domínio $\mathbb{R}$, da forma $q(x) = p(a\,x + b) + c$, em que a, b e c são constantes reais. Determine, em cada caso, os valores de a, b e c. Justifique sua resposta.





5. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior que o dobro ou menor que o dobro da corrida original?

6. A escala N de temperaturas foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

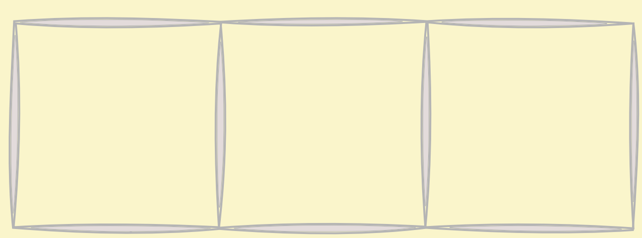
°N	°C
0	18
100	43

Em que temperatura ferve a água na escala N ?

7. Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$.

8. Prove que toda reta não vertical r é o gráfico de uma função afim.

9. Um garoto brinca de arrumar palitos fazendo uma sequência de quadrados como na figura. Se ele fez n quadrados, quantos palitos utilizou?

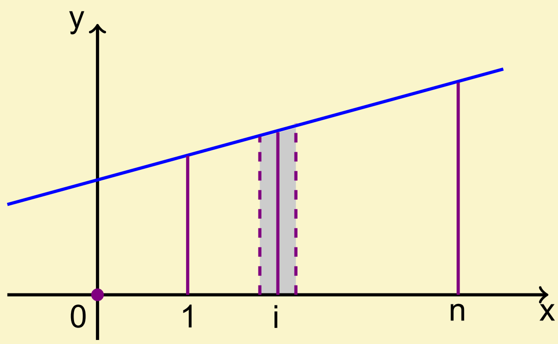


10. As grandezas X e Y são inversamente proporcionais. Se X sofre um acréscimo de 25% qual o decréscimo percentual sofrido por Y ?

11. Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de uma P.A. são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de uma função afim.

(a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações

$$x = i - \tfrac{1}{2} \text{ e } x = i + \tfrac{1}{2}.$$



(b) Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = \frac{1}{2}$ e $x = n + \frac{1}{2}$.

(c) Conclua que $S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$.

8.10 Exercícios Suplementares

1. Determine todos os máximos e mínimos locais e absolutos das seguintes funções:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

(b) $f : [-1, 2[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$

(c) $f :]-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \;\; x < 0 \\ x - 1 & \text{se} \;\; x \geqslant 0 \end{cases}$

(d) $f : [0, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3\,x & \text{se} \;\; x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se} \;\; x \leqslant 1 \end{cases}$

(e) $f : [0, 5] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3\,x & \text{se} \;\; x < 5 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se} \;\; x \leqslant 4 \end{cases}$

2. Considere a função $g : [0, 5] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 4\,x - x^2, & \text{se} \;\; x < 3 \\ x - 2, & \text{se} \;\; x \geqslant 3 \end{cases}$$

Determine as soluções de:

(a) $g(x) = -1$ (b) $g(x) = 0$ (c) $g(x) = 3$

(d) $g(x) = 4$ (e) $g(x) < 3$ (e) $g(x) \geqslant 3$

3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

(a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto;

(b) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo local;

(c) Se f tem um máximo local, então f tem um máximo absoluto;

(d) Todo máximo local de f é máximo absoluto;

(e) Todo máximo absoluto de f é máximo local;

(f) Se x_0 é ponto de extremo local de f, então é ponto de extremo local de f^2;

(g) Se x_0 é ponto de extremo local de f^2, então é ponto de extremo local de f;

(h) Se f e g são crescentes, então a composta $f \circ g$ é uma função crescente;

(i) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente;

(j) Se f é crescente em $A \subset \mathbb{R}$ e em $B \subset \mathbb{R}$, então f é crescente em $A \cup B \subset \mathbb{R}$.

4. Mostre que a função inversa de uma função crescente é também uma função crescente. E a função inversa de uma função decrescente é decrescente.

5. Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é **uma função par** se $f(x) = f(-x)$, $\forall\ x \in D$. Dizemos que f é **uma função ímpar** se $f(x) = -f(-x)$, $\forall\ x \in D$. Responda as perguntas a seguir, justificando suas respostas.

(a) Que tipos de simetrias podemos observar em gráficos de funções pares e de funções ímpares?

(b) Se f e g são funções pares, o que podemos afirmar sobre as funções $f+g$ e $f\cdot g$?

(c) Se f e g são funções ímpares, o que podemos afirmar sobre as funções $f+g$ e $f\cdot g$?

(d) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, o que podemos afirmar sobre as funções $f+g$ e $f\cdot g$?

(e) Podemos afirmar que toda função polinomial de grau par é uma função par?

(f) Podemos afirmar que toda função polinomial de grau ímpar é uma função ímpar?

6. Nesta unidade, afirmamos que não faz sentido pedir que se determine o domínio de uma função dada previamente, pois o domínio de uma função é parte da própria definição (p. 15). Faz sentido pedir que se determine a imagem de uma função previamente dada? Justifique sua resposta.

7. No Exemplo 10 (p. 22), afirmamos que a função h é decrescente em $]2,4\,]$ e crescente em $[\,4,6\,]$. Considerando a Definição 1, você vê alguma contradição nessa afirmação? Justifique sua resposta.

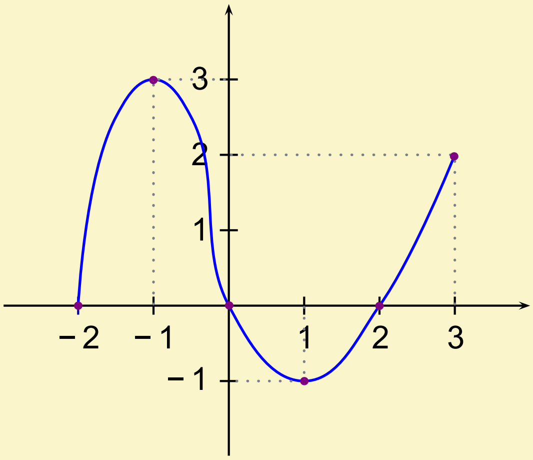
8. Considere $f:[-2,3]\to\mathbb{R}$ a função cujo gráfico é dado abaixo. Em cada um dos itens a seguir, defina uma função $h: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ obtida a partir de f através da operação indicada, em domínio D conveniente, e esboce o gráfico da função h definida.

(a) $h(x)=|f(x)|$

(b) $h(x)=f(|x|)$

(c) $h(x)=(f(x))^2$

(d) $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.



9. Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 6 da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quando ficará pela metade?

10. Admita que 3 operários, trabalhando 8 horas por dia, construam um muro de 36 metros em 5 dias.

(a) Quantos dias são necessários para que uma equipe de 5 operários, trabalhando 6 horas por dia, construa um muro de 15 metros?

(b) Que hipóteses foram implicitamente utilizadas na solução do item anterior?

(c) Dentro dessas mesmas hipóteses, exprima o número D de dias necessários à construção de um muro em função do número N de operários, do comprimento C do muro e do número H de horas trabalhadas por dia.

8.11 Textos Complementares

Para Saber Mais

Translações e Vértices de Parábolas

Uma aplicação interessante de translações de gráficos é a obtenção das fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola. Primeiro, devemos escrever uma parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$, qualquer, na chamada *forma canônica*, completando quadrados:

$$\begin{aligned} y &= a\,x^2 + b\,x + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x +\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0 \tag{8.1}$$

em que: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

Estas são as conhecidas fórmulas das coordenadas do vértice de uma parábola. Pelo que já estudamos de translações, sabemos que a parábola 8.1 é dada pela translação de $y = a\,x^2$, de x_0 unidades na horizontal e y_0 unidades na vertical. Assim, podemos deduzir a seguinte propriedade: *qualquer parábola é dada por uma translação de uma parábola com mesmo valor de a e vértice na origem*. Decorre ainda desta propriedade que *quaisquer duas parábolas com mesmo valor de a são congruentes*, isto é, uma qualquer uma delas pode ser obtida a partir da outra por meio de uma translação. Da forma canônica, podemos deduzir também outras propriedades importantes das parábolas, como a existência do eixo de simetria vertical e a própria fórmula das raízes. Retornaremos a este assunto na Unidade 9.

Na Sala de Aula

Tratamento da Informação

Nos últimos anos, têm recebido grande ênfase na escola os diferentes tipos de gráficos (tais como gráficos de setores, de barras, de linhas) usados para organizar informações numéricas e largamente difundidos em veículos de comunicação de massa. A interpretação desses gráficos é certamente um objetivo importante para o ensino básico. Entretanto, também é importante que fique claro para os estudantes que, neste contexto, a palavra *gráfico* é usada em um sentido diferente (e mais geral) que gráficos de funções. Nem todos os tipos de gráficos usados para representar informações numéricas podem ser interpretados como gráficos de funções.

Na Sala de Aula

Propriedades Particulares e Gerais

No começo desta unidade, comentamos que às vezes alunos do ensino básico generalizam indevidamente propriedades particulares e particularizam indevidamente propriedades gerais. Por exemplo, máximos e mínimos são conceitos que se aplicam a funções reais em geral, e não somente a funções quadráticas. Porém, as fórmulas para determiná-los $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ (conhecidas como *coordenadas do vértice*) só se aplicam a parábolas.

Considerar a existência de máximos e mínimos como particularidades de parábolas é uma particularização indevida de uma propriedade geral, mas aplicar as fórmulas acima é uma generalização indevida de uma propriedade particular.

Na Sala de Aula

Comentários sobre Terminologia

1. Se a função afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número a de *coeficiente angular* da função f. O nome mais apropriado, que usamos, é *taxa de variação* (ou taxa de crescimento). Em primeiro lugar não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Em segundo lugar, mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$. Em resumo: tem-se taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

2. A maioria dos nossos textos escolares refere-se à função afim como "função do primeiro grau". Essa nomenclatura sugere a pergunta: o que é o grau de uma função? Função não tem grau. O que possui grau é um polinômio. (Quando $a \neq 0$, a expressão $f(x) = ax + b$ é um polinômio do primeiro grau.) O mesmo defeito de nomenclatura ocorre também com as funções quadráticas, que estudaremos no capítulo seguinte. Elas muitas vezes são chamadas, incorretamente, "funções do segundo grau".

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

9

Funções Lineares e Afins

Sumário

9.1 A Função Linear 3
9.2 Caracterização da Função Afim 7
9.3 Exercícios Recomendados 10
9.4 Exercícios Suplementares 11
9.5 Textos Complementares 13

Dando continuidade à unidade anterior, agora passaremos a aprofundar nosso estudo sobre *funções lineares* e *funções afins*. Na Seção 1, as funções lineares são apresentadas como modelos matemáticos para proporcionalidade. Por incrível que possa parecer, esta ligação básica entre dois conceitos matemáticos tão importantes é, na maior parte das vezes, negligenciada nos livros didáticos. Os assuntos proporcionalidade e funções lineares são, em geral, tratados em capítulos separados, até mesmo em anos distintos, sem que nenhuma relação seja explicitamente apontada. Como ocorre em muitas outras situações, a abordagem da noção de proporcionalidade representa uma importante oportunidade para estabelecer relações entre diferentes campos da matemática, como aritmética, geometria e funções. A compreensão inadequada da noção de proporcionalidade pode levar à sua generalização indevida pelos alunos, considerando uma proporcionalidade qualquer situação em que o crescimento de uma grandeza implica no crescimento de uma outra. Por exemplo, não é incomum a afirmação de que "a área de um quadrado é proporcional ao seu lado". É verdade que, quanto maior for o lado de um quadrado, maior será a sua área; porém, isto não significa que estas grandezas sejam proporcionais. De fato, se $x \in \mathbb{R}^+$ representa o lado de um quadrado, a área não pode ser expressa por uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ na forma $f(x) = a\,x$, com $a \in \mathbb{R}$.

Procure refletir sobre esta questão ao estudar a primeira seção da unidade. Observe como a definição de proporção enunciada estabelece uma relação de dependência funcional entre as grandezas. Certifique-se de entender bem as provas de que toda função com a propriedade de proporcionalidade direta é da forma $f(x) = a\,x$, e de que toda função com a propriedade de proporcionalidade inversa é da forma $f(x) = \dfrac{a}{x}$ (em que $a = f(1)$, em ambos os casos). Na demonstração do Teorema Fundamental da Proporcionalidade, atente para a importância da hipótese de monotonicidade para a generalização do argumento no caso em que x é um número irracional.

Na Seção 2, também são discutidos alguns aspectos importantes e pouco explorados na escola. Em geral, funções afins são abordadas simplesmente com base na sua expressão algébrica $y = ax + b$, mas pouca ênfase é dada à caracterização fundamental de funções afins como aquelas em que acréscimos iguais na variável independente implicam em acréscimos iguais na variável dependente. Esta caracterização permite que os alunos compreendam mais claramente o comportamento qualitativo desta classe de funções. Além disso, é muito importante a relação entre funções afins e progressões aritméticas, aqui discutida. Este é mais um exemplo de conceitos que apresentam relações fundamentais entre si, mas que são apresentados de forma estanque nos livros didáticos.

9.1 A Função Linear

A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios.

Diremos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c e x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, é uma *proporcionalidade direta*. Se $f(cx) = f(x)/c$, para quaisquer $c \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, diremos que f é uma *proporcionalidade inversa*.

É claro que se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo c e todo x então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) = ca$, ou seja, $f(c) = ac$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando que f é uma função linear.

Quanto à proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ (onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) tal que $f(cx) = f(x)/c$ para $c, x \in \mathbb{R}^*$ quaisquer. Usando o mesmo raciocínio anterior, isto quer dizer que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, tem-se $f(x) = a/x$, onde a constante a é $f(1)$.

Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de "proporcionalidade".

Na prática, há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada explicitamente (ou quase). Por exemplo, se um quilo de açúcar custa a reais então x quilos custam $y = ax$ reais.

Em muitos casos, porém, a constante a de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem mesmo tem relevância alguma para o problema. Um exemplo disso se tem nas aplicações do teorema de Tales.

Naquele teorema, tem-se um triângulo ABC e uma correspondência que a cada ponto X do lado AB associa o ponto Y do lado AC tal que XY é paralelo a BC. O teorema de Tales assegura que o comprimento y do segmento AY é proporcional ao comprimento x de AX. Mas que importância tem a constante de proporcionalidade $a = y/x$? Por acaso, tem-se $a = \operatorname{sen} B/\operatorname{sen} C$ mas este valor não significa muito no caso.

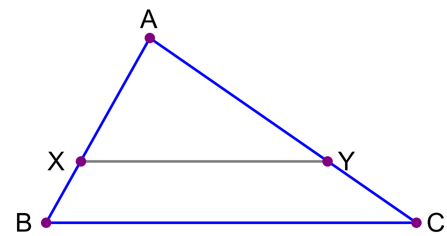


Figura 9.1: O Teorema de Tales.

Este exemplo chama a atenção para o fato de que nos problemas relativos à proporcionalidade o que importa muitas vezes é saber apenas que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $y'/x' = y/x$ é constante.

Quando a correspondência $x \mapsto y$, $x' \mapsto y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $y'/x' = y/x$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três. Nisto consiste a tradicional "regra de três".

Mas há uma questão preliminar que é a seguinte: como vamos ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? Precisamos que se tenha $f(cx) = cf(x)$ para todos os valores reais de c e x. Em particular, *para todo* c. Isto é fácil de verificar quando c é inteiro. E nos outros casos? E se c for irracional? Felizmente basta que se saiba que $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo n inteiro, desde que se suponha que f é monótona (o que é fácil de constatar na prática).

O teorema abaixo é a chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é ou não linear.

Teorema 1
Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:
(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$. A fim demostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, provemos inicialmente que, para todo número racional $r = m/n$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos usar aqui a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número irracional x tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo.) Temos

$$\frac{f(x)}{a} < x.$$

Tomemos um número racional r (aqui usamos a densidade de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) tal que

$$\frac{f(x)}{a} < r < x.$$

Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As implicações $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são óbvias.

Em algumas situações, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo) cujas medidas são expressas apenas por números reais positivos. Então temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Neste caso, as afirmações do Teorema leem-se assim:

(1^+) $f(nx) = n \cdot f(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$;

(2^+) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$;

(3^+) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Neste novo contexto, o Teorema Fundamental da Proporcionalidade continua válido, isto é, as afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) são ainda equivalentes. Isto se mostra introduzindo a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações (1^+), (2^+) e (3^+) para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F.

Deve-se observar que a função f do teorema acima sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente vale um resultado análogo, com $a < 0$.

A importância deste teorema está no seguinte fato: se queremos saber se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar duas coisas.

Primeira: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f ser identicamente nula.)

Segunda: $f(nx) = nf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1

Se investirmos a quantia x, digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital $f(x)$. Evidentemente, f é uma função crescente de x: quanto mais se aplica mais se recebe no final. Além disso, tem-se $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo x. De fato, esta igualdade significa que tanto faz abrir uma caderneta de poupança com o capital inicial $x' = nx$ como abrir (no mesmo dia) n cadernetas, cada uma com o valor inicial x. O Teorema Fundamental nos permite concluir que $f(x)$ é proporcional a x. Mais precisamente, se a aplicação de 1 real der, no final de um ano, um valor de resgate igual a a, então o capital inicial de x reais se transformará em $f(x) = ax$ no final de um ano. (Não confundir este exemplo com o crescimento do capital em função do tempo. Este não é proporcional e será tratado quando estudarmos a função exponencial.)

☞ Para Saber Mais - Teorema Fundamental da Proporcionalidade X Continuidade - Clique para ler

9.2 Caracterização da Função Afim

Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?

No caso da tarifa do táxi não há problema. Tem-se $f(x) = ax + b$ onde x é a distância percorrida, $f(x)$ é o preço a pagar, b é a bandeirada e a é a taxa por quilômetro rodado. Mas nem todo problema é assim tão explícito.

Vejamos um caso diferente.

E.W. observou, numa sapataria, que o vendedor determinava o número do sapato do cliente medindo seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números $\ldots 36, 37, 38, \ldots$. O fato mais importante que ele percebeu foi que esses números estavam igualmente espaçados, isto é, a distância de cada um deles para o seguinte era constante. Isto queria dizer que a acréscimos iguais no tamanho do pé corresponderiam acréscimos iguais no número do sapato. Dito de outro modo: se um certo pé precisar de crescer h centímetros para passar de tamanho 33 para 34, precisará de crescer os mesmos h centímetros para passar de 38 para 39. Isto lhe deu a certeza de que a função que faz corresponder a cada comprimento x de um pé o número $f(x)$ do sapato adequado é uma função afim: $f(x) = ax + b$. (Vide teorema a seguir.)

E.W. sabia que, para determinar os coeficientes a, b da função afim, bastava conhecer $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para dois valores diferentes quaisquer x_1 e x_2.

Ele atravessou a rua. Do outro lado havia uma papelaria, onde comprou uma régua. Voltou à sapataria e pediu emprestada a escala do vendedor. Como sua régua media até milímetros enquanto a escala só marcava pontos e meios pontos, escolheu dois valores $x_1 \neq x_2$ tais que os números de sapato correspondentes, $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, assinalados na escala, fossem inteiros. Tomou $x_1 = 20, x_2 = 28$ e viu que $f(x_1) = 32, f(x_2) = 42$. A partir daí, calculou os coeficientes $a = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ e $b = y_1 - ax_1$ chegando à fórmula

$$f(x) = \frac{5x + 28}{4},$$

que dá o número do sapato de uma pessoa em função do comprimento do seu pé em centímetros. Para chegar à sua fórmula, E.W. fez uso do seguinte

Teorema 2 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o valor do acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

A demonstração deste teorema, que faremos agora, é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Para fixar ideias, suporemos que a função f seja crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer h, $k \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x)\\ &= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)\\ &= \varphi(h) + \varphi(k).\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$.

Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observação. A recíproca do teorema acima é óbvia. Se $f(x) = ax + b$ então $f(x+h) - f(x) = ah$ não depende de x. A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$". Outra maneira de exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

Existe uma conexão interessante entre funções afins e progressões aritméticas, análoga à que veremos mais tarde entre funções exponenciais e progressões geométricas.

Uma *progressão aritmética* pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçados na reta. Isto quer dizer que a razão $h = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_{i+1} - x_i = \cdots .$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x_i), i = 1, 2, \ldots$

também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ah.$$

Assim, se tivermos uma reta não-vertical (gráfico de uma função afim) em $\mathbb{R}$ e tomarmos sobre ela os pontos

$$(1, y_1), (2, y_2), \ldots, (i, y_i), \ldots$$

cujas abscissas são os números naturais $1, 2, \ldots, i, \ldots$, as ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots$ desses pontos formam uma progressão aritmética.

Reciprocamente, se uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ então f é uma função afim.

Com efeito, neste caso a nova função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética, e tem a propriedade $g(0) = 0$. Mostremos que g é linear.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética, logo o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Por conseguinte, $g(-x) = -g(x)$.

Em seguida, consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, \ldots, nx$ formam uma progressão aritmética, o mesmo se dando com suas imagens por $g : 0, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$. A razão desta progressão pode ser obtida tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é $g(x)$. Segue-se então que $g(nx) = n \cdot g(x)$. Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos $-n \in \mathbb{N}$, logo $g(nx) = -g(-nx) = -(-n \cdot g(x)) = n \cdot g(x)$. Assim, vale $g(nx) = ng(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue-se que g é linear: $g(x) = ax$, portanto, pondo $f(0) = b$, temos $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

☞ Para Saber Mais - Funções Poligonais - Clique para ler

9.3 Exercícios Recomendados

1. Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 segundos na escada quando sobe 5 degraus e 20 segundos quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo normalmente gasto no percurso?

2. Augusto, certo dia, fez compras em 5 lojas. Em cada loja, gastou metade do que possuia e pagou, na saída, R$ 2,00 de estacionamento. Se após toda essa atividade ainda ficou com R$ 20,00, que quantia ele tinha inicialmente?

3. Seguindo as ideias de E.W., construa uma régua para medir números de sapatos.

4. Estuda-se a implantação da chamada "fórmula 95". Por essa fórmula os trabalhadores teriam direito à aposentadoria quando a soma da idade com o número de anos de serviço atingisse 95. Adotada essa fórmula, quem começasse a trabalhar com 25 anos, com que idade se aposentaria?

5. Em uma escola há duas provas mensais, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não alcançar média 7 nessas provas, fará prova final. Sua média final será então a média entre a nota da prova final, com peso 2 e a média das provas mensais, com peso 3. João obteve 4 e 6 nas provas mensais. Se a média final para aprovação é 5, quanto ele precisa obter na prova final para ser aprovado?

6. Arnaldo dá a Beatriz tantos reais quanto Beatriz possui e dá a Carlos tantos reais quanto Carlos possui. Em seguida, Beatriz dá a Arnaldo e a Carlos tantos reais quanto cada um possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo. Terminam todos com R$ 16,00 cada. Quanto cada um possuía no início?

9.4 Exercícios Suplementares

1. Dado o gráfico da função f, abaixo, obtenha, em cada caso, o gráfico da função g tal que

(a) $g(x) = f(x) - 1$;

(b) $g(x) = f(x-1)$;

(c) $g(x) = f(-x)$;

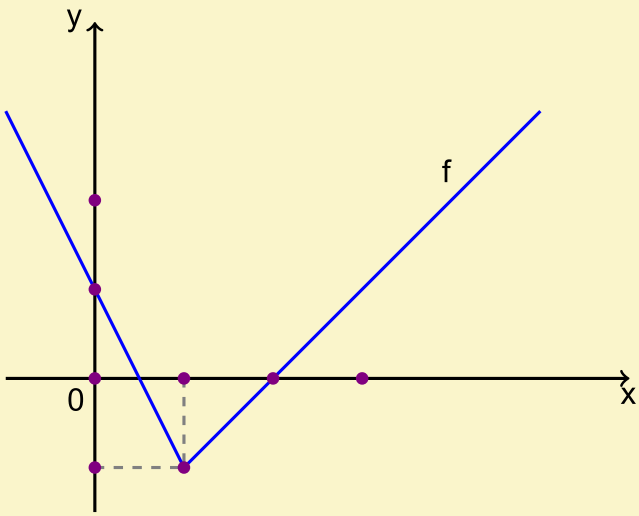
(d) $g(x) = 2f(x)$;

(e) $g(x) = f(2x)$;

(f) $g(x) = |f(x)|$;

(g) $g(x) = f(|x|)$;

(h) $g(x) = \max\{f(x); 0\}$.



2. Determine os valores reais de x que satisfazem a

(a) $2x + 3 - (x-1) < x + 1$;

(b) $2x + 3 - (x-1) < x + 5$;

(c) $\min\{x+1; 5-x\} > 2x - 3$;

(d) $\min\{x+1; 5-x\} < 2x$;

(e) $\min\{2x-1; 6-x\} = x$;

(f) $2|x+1| - |1-x| \leqslant x + 2$;

(g) $(2x+3)(1-x) = (2x+3)(x-2)$;

(h) $|x + 1 - |x-1|| \leqslant 2x - 1$.

3. Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de salsichas: um desconto de 10% é dado nas compras de 3 quilos ou mais. Sabendo que o preço do quilo de salsicha é de R$ 4,00, pede-se:

(a) o gráfico do total pago em função da quantidade comprada;

(b) o gráfico do preço médio por quilo em função da quantidade comprada;

(c) a determinação de quais consumidores poderiam ter comprado mais salsicha pagando o mesmo preço;

(d) a determinação de quantos quilos foram comprados por um consumidor que pagou R$ 15,00.

4. Dadas as progressões aritméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \ldots, f(a_n) = b_n, \ldots$

5. Defina uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pondo $f(x) = 2x$ se x é racional e $f(x) = 3x$ se x é irracional. Mostre que se tem $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$ mas f não é linear.

6. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 7x + \text{sen}(2\pi x)$, é crescente e, para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, transforma a progressão aritmética $x, x+1, x+2, \ldots$ numa progressão aritmética. Entretanto, f não é afim. Por que isto não contradiz o fato provado no final da Seção 2?

9.5 Textos Complementares

Para Saber Mais

Teorema Fundamental da Proporcionalidade X Continuidade

No enunciado que demos para o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, fizemos a hipótese de que a função f fosse crescente (ou decrescente, seria o mesmo). Outra hipótese possível para o teorema - e equivalente, neste caso, à monotonicidade - seria de que a função f fosse contínua. Note-se que, na demonstração, a monotonicidade foi usada apenas para provar que se $f(r) = ar$ para todo r racional então $f(x) = ax$ para todo x real. Esta conclusão é imediata quando f é contínua, pois todo número real x é limite de uma sequência de números racionais r_n, logo a continuidade de f nos dá $f(x) = \lim f(r_n) = \lim ar_n = ax$. A razão pela qual optamos em usar monotonicidade, em vez da continuidade para f é que este último conceito não é usualmente tratado no segundo grau, enquanto "crescente" e "decrescente" são noções bem mais elementares, que não dependem da ideia de limite.

Para Saber Mais

Funções Poligonais

As funções poligonais surgem naturalmente, tanto na vida cotidiana (imposto de renda como função da renda líquida, preço de uma mercadoria que oferece descontos crescentes quando aumenta a quantidade comprada) como em diversas áreas da Matemática (Análise, Cálculo Numérico, Equações Diferenciais, Topologia).

Diz-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função poligonal* quando existem $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ tais que, para $x \leqslant t_0$, para $x \geqslant t_n$ e em cada um dos intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, f coincide com uma função afim f_i. (Para evitar descontinuidades, exige-se que $f_i(t_i) = f_{i-1}(t_{i-1})$.) Equivalentemente, podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é poligonal quando seu gráfico é uma linha poligonal.

O protótipo de função poligonal é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Ou então $f(x) = |x - c|$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

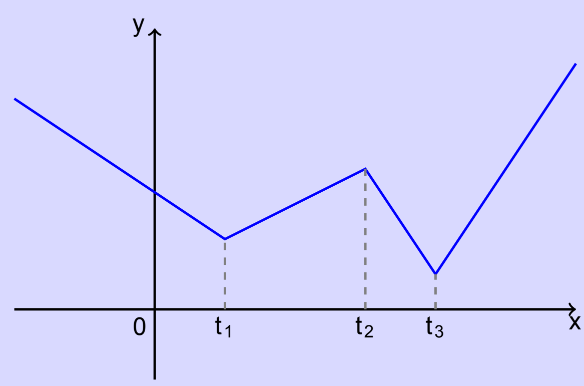


Figura 9.2: Funções poligonais.

Outros exemplos são dados por expressões do tipo

$$f(x) = |\alpha x + \beta| \quad \text{ou} \quad g(x) = |x - \alpha| + |x - \beta|.$$

Estes exemplos nos levam a conjeturar que toda função poligonal pode ser definida combinando valores absolutos de funções afins. Esta conjetura é verdadeira. (Ver exercícios deste capítulo.)

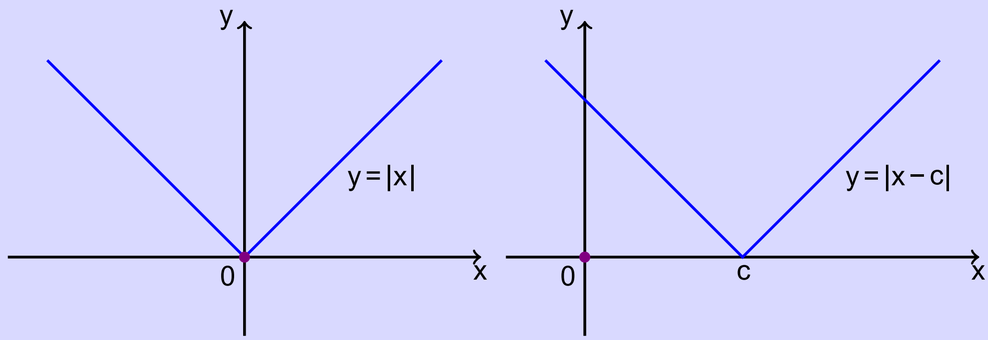


Figura 9.3: As funções $y = |x|$ e $y = |x - c|$.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974. 4

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012. 7

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária. 11

10

Função Quadrática

Sumário

10.1 Introdução 2
10.2 Definição e Preliminares 5
10.3 Um Problema Muito Antigo 9
10.4 A Forma Canônica do Trinômio 11
10.5 O Gráfico da Função Quadrática 14
10.6 Exercícios Recomendados 20
10.7 Exercícios Suplementares 21
10.8 Textos Complementares 23

10.1 Introdução

Nesta Unidade, começamos a aprofundar nossos estudos sobre *funções quadráticas*. Na Seção 2, são feitas algumas observações de caráter geral sobre essa classe de funções.

Para entender bem a observação inicial, é importante ter clara a definição de função. Como já estudamos anteriormente, uma função é definida por três elementos fundamentais: domínio, contradomínio e lei de correspondência. Assim, $f : X \to Y$ e $f' : X' \to Y'$ são iguais se, e somente se, possuem mesmos domínio, contradomínio e lei de correspondência; isto é, se, e só se, $X = X'$, $Y = Y'$ e $f(x) = f'(x)$, para todo $x \in X$.

Por outro lado, polinômios são definidos por seus coeficientes. Assim, dois polinômios são iguais se, e somente se, seus coeficientes correspondentes são iguais. Poderia então acontecer de trinômios do segundo grau diferentes definirem uma mesma função; porém, na Seção 2, provaremos que isto não ocorre.

Portanto, a função que a cada polinômio $a\,x^2 + b\,x + c$ associa a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ é uma bijeção. O mesmo argumento aí empregado serve para mostrar que, de forma mais geral, uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de grau qualquer não pode ser definida por mais de um polinômio. Isto é, uma função polinomial admite uma única expressão polinomial.

A concepção restrita de função apenas como fórmula pode levar os estudantes a considerar erroneamente que expressões simbólicas diferentes necessariamente definem funções diferentes, sem levar em conta domínio, contradomínio e lei de associação. Por exemplo,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3-3\,x+2}{x^2-2\,x+1} \end{array}$$

são *a mesma função*, expressa de maneiras diferentes.

Esse exemplo chama atenção para o fato de que a lei de correspondência deve ser estabelecida por meio da verificação da igualdade ponto a ponto, e não da simples observação formal da expressão algébrica.

Uma outra observação feita na segunda seção diz respeito ao número de pontos necessários para definir uma parábola. Certifique-se de entender claramente a conclusão obtida:

Dados três pontos no plano, (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), x_1, x_2 e x_3, distintos dois a dois, existe uma única função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na forma $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$. Tem-se $a = 0$ se, e somente se, os pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares (neste caso, a função f não será quadrática).

Ao ler o *Comentário sobre Colinearidade* reflita sobre o uso em sala de aula do critério para verificação da colinearidade de três pontos no plano que se baseia no cálculo de um determinante. O conceito matemático de determinante é muito mais sofisticado que a noção de colinearidade de pontos no plano e, portanto, sua compreensão é consideravelmente menos acessível aos alunos no ensino médio. Esta compreensão insuficiente pode levar à mera memorização do critério, mascarando o que de fato está sendo feito. Existem outras formas de verificar a colinearidade (como a simples observação da inclinação das retas determinadas pelos pontos em questão), que não só são de mais simples aplicação (pois certamente conduzirão à mesma expressão algébrica), como também deixam mais explícita a ideia de colinearidade, possibilitando uma compreensão mais abrangente. Assim, o uso desse critério não agrega nenhuma vantagem, nem do ponto de vista prático, nem do ponto de vista conceitual.

Na Seção 3, são discutidos alguns aspectos interessantes do desenvolvimento histórico dos métodos de resolução das equações de segundo grau. Alguns desses métodos surgiram antes mesmo da disseminação da simbologia algébrica, a partir do trabalho de François Viéte. Por exemplo, os problemas de perímetros e áreas tratados pelos gregos, que hoje recairiam em equações do segundo grau, eram resolvidos de forma puramente geométrica. Para os matemáticos gregos a noção de *resolver* um problema desse tipo não correspondia a determinar soluções numéricas, e sim a expressar a solução por meio de uma construção geométrica. Nessas soluções geométricas, não havia qualquer envolvimento de números ou de notações algébricas, mesmo porque a matemática grega era quase que puramente *retórica*. Os métodos de resolução dos babilônios também não empregavam a notação algébrica, e sim, *receitas*, como aquela enunciada no texto.

Outra observação importante é o fato de que números complexos, e mesmo números reais negativos, por muito tempo não foram considerados legitimamente como números. Os números complexos começaram a ser usados nas resoluções das equações polinomiais do terceiro grau, a princípio não como soluções, mas apenas como símbolos formais que serviam para obtenção de soluções reais positivas, mas que se cancelavam durante o processo. Não é verdadeira a observação, encontrada em grande parte dos livros didáticos de matemática, de que os números complexos "foram inventados" para resolver equações do tipo $x^2 + 1 = 0$. Nesses casos, considerava-se simplesmente que a solução não existia – não havia necessidade de se criar um novo tipo de números apenas com este objetivo.

A reflexão sobre obstáculos observados no desenvolvimento histórico da matemática é importante para a prática do professor no ensino básico. Esta importância se deve ao fato de que o desenvolvimento histórico dos conceitos revela dificuldades que, embora já superadas, podem ser vivenciadas pelos alunos no processo de aprendizagem. A abordagem pedagógica não deve "imitar" o desenvolvimento histórico, ou recriar seus obstáculos em sala de aula, mas conhecimento histórico pode ser uma ferramenta importante para o planejamento da abordagem pedagógica. Para saber mais sobre esses e outros aspectos históricos, veja [6].

Na Seção 4, é apresentada esta forma de expressar trinômios do segundo grau: $f(x) = a\,(x - x_0)^2 + y_0$, em que $x_0 = -\frac{b}{2a}$ e $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$ são apresentados no ensino médio como "coordenadas do vértice da parábola". Esta forma permite determinar diversas propriedades importantes das funções quadráticas:

- o estudo do número de raízes reais e complexas, e a determinação dos valores dessas raízes;
- o máximo ou o mínimo absoluto;
- o eixo de simetria vertical.

Em geral, essas propriedades são dadas nas escolas como fórmulas sem justificativa. Entretanto, essas justificativas não são inacessíveis para alunos do ensino médio, especialmente se são precedidas por exemplos simples, que ficam, progressivamente, mais sofisticados. Por exemplo, pode-se começar com os casos chamados "incompletos" (aqueles em que $b = 0$ ou $c = 0$), seguindo-se dos "trinômios quadrados perfeitos". Nestes casos, as raízes podem ser encontradas apenas com manipulações algébricas simples elementares, sem o uso de qualquer fórmula. Começar a abordagem por esses casos mais simples, não só possibilita uma preparação gradual para a dedução da fórmula geral, como também enfatiza o conceito de raiz (como um número real x_0 tal que $f(x_0) = 0$), em relação à utilização da fórmula sem significado. Em seguida, podem-se apresentar os casos em que é necessário "completar quadrados" e a dedução da fórmula geral.

A discussão dessas propriedades, de um ponto de vista gráfico, é aprofundada na seção 4. Além disso, essa seção apresenta alguns aspectos sobre gráficos pouco discutidos no ensino médio, tais como a parábola como lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta e de um ponto dados e a aplicação de translações no plano a gráficos de funções. As translações no plano aplicadas a parábolas são empregadas para a determinação de focos e diretrizes. É importante observar que o efeito desse tipo de transformação, como visto anteriormente na Unidade 7, não é uma particularidade de funções quadráticas, e vale para gráficos de funções em geral.

10.2 Definição e Preliminares

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *quadrática* quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Comecemos observando que os coeficientes a, b e c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Noutras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = c'$. Daí tem-se $ax^2 + bx = a'x'^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, cancelando x, obtemos $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, vem $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$, donde concluímos $a = b$ e $a' = b'$.

A observação acima permite que se identifique uma função quadrática com um trinômio do segundo grau. Há, em princípio, uma diferença sutil entre esses dois conceitos. Um *trinômio do segundo grau* é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A palavra *formal* aí significa que a letra X é apenas um símbolo, sendo X^2 um outro modo de escrever XX. Por definição, dois trinômios $aX^2 + bX + c$ e $a'X^2 + b'X + c'$ são iguais quando $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$. [Em última análise, um trinômio é o mesmo que um terno ordenado de números reais (a, b, c).]

A cada trinômio corresponde a função quadrática definida pela regra $x \mapsto ax^2+bx+c$. A observação anterior significa que essa correspondência (trinômio) $\mapsto$ (função quadrática) é biunívoca. (Pela definição de função quadrática, tal correspondência é automaticamente sobrejetiva.)

A partir de agora, identificaremos a função quadrática com o trinômio do segundo grau a ela associado e nos permitiremos falar da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sempre que não houver perigo de confundi-la com o número real $f(x)$, que é o valor por ela assumido no ponto x.

A fim de que se tenha $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, não é necessário exigir, como fizemos acima, que

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Basta supor que esta igualdade valha para três valores distintos de x. Passemos a discutir este assunto.

Suponhamos que as funções quadráticas,

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{e} \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c',$$

assumam os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos x_1, x_2 e x_3. Escrevendo $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Sabemos que $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Isto significa que

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0. \end{cases} \tag{S}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, vem

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0$$

e

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0.$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$, obtendo

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$

e

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0.$$

Subtraindo membro a membro, temos $\alpha(x_3 - x_2) = 0$.

Como $x_3 - x_2 \neq 0$, resulta daí que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$.

Acabamos de mostrar que *se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3, então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.*

Examinando o argumento usado, vemos que se tem um sistema (S) de três equações lineares a três incógnitas α, β, γ com os segundos membros iguais a zero (sistema homogêneo). O que provamos foi que a única solução desse sistema é a solução trivial $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Sabemos que, em geral, quando um sistema homogêneo só admite a solução trivial então podemos substituir os zeros dos segundos membros por números arbitrários que sempre teremos solução única. No caso presente, isto é fácil de ver diretamente: usando os mesmos passos seguidos acima, vemos que, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um terno ordenado de número a, b, c tais que

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1, \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2, \\ ax_3^2 + bx_3 + c &= y_3. \end{aligned}$$

Neste sistema, vários hábitos tradicionais são violados. As incógnitas são a, b, c em vez dos x, y, z de costume. Os coeficientes conhecidos são x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2 e 1, 1, 1. Além disso, as incógnitas estão escritas antes dos coeficientes. Mesmo assim, não há maiores dificuldades em resolvê-lo, adotando, como dissemos, a mesma sequência de passos do caso homogéneo.

Estamos especialmente interessados no valor da incógnita a neste sistema. Ela é

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left[\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right].$$

Podemos então afirmar o seguinte: dados três números reais distintos x_1, x_2 , x_3 e números reais arbitrários y_1 , y_2, y_3, existe um, e somente um, terno de números a, b, c tais que a função

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

cumpre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

A função $f(x) = ax^2 + bx + c$, acima obtida, pode não ser quadrática, a menos que nos asseguremos que $a \neq 0$. O valor de a acima obtido mostra que a é zero se, e somente se, vale

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Se olharmos para os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ em $\mathbb{R}^2$, a condição acima significa que as retas AC e AB têm a mesma inclinação, isto é, que os pontos A, B e C são colineares.

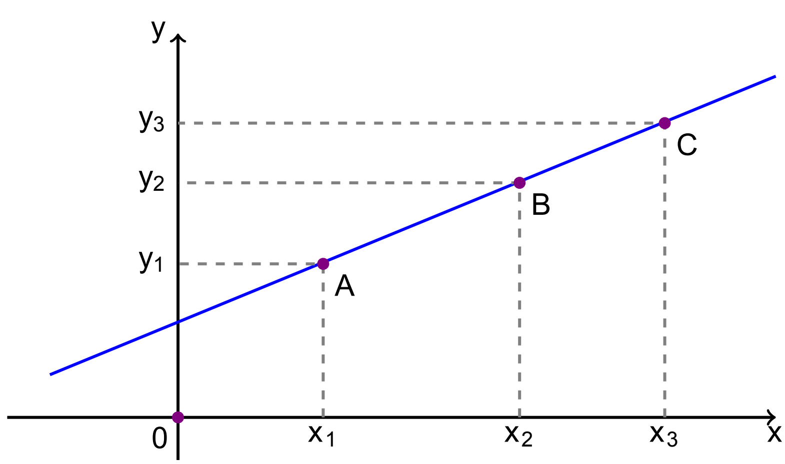


Figura 10.1: Pontos colineares.

Então podemos enunciar:

Sejam x_1, x_2, x_3 três números reais distintos e y_1, y_2, y_3 números tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

☞ Para Saber Mais - Comentário sobre Colinearidade - Clique para ler

10.3 Um Problema Muito Antigo

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau.

Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números, dados sua soma s e seu produto p.

Em termos geométricos, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p.

Os números procurados são as raízes da equação do segundo grau

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Com efeito, se um dos números é x, o outro é $s - x$ e seu produto é

$$p = x(s - x) = sx - x^2,$$

logo

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Observe que se α é uma raiz desta equação, isto é, $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então $\beta = s - \alpha$ também é raiz, pois

$$\begin{aligned}\beta^2 - s\beta + p &= (s-\alpha)^2 - s(s-\alpha) + p = \\ &= s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p = \\ &= \alpha^2 - s\alpha + p = 0.\end{aligned}$$

Achar as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ é, também, um conhecimento milenar. Note-se que, até o fim do século 16, não se usava uma fórmula para os valores das raízes, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto começou a ser feito a partir de François Viete, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Antes disso, o que se tinha era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos (com coeficientes numéricos).

A regra para achar dois números cuja soma e cujo produto são dados era assim enunciada pelos babilônios:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Na notação atual, esta regra fornece as raízes

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

para a equação $x^2 - sx + p = 0$.

Os autores dos textos cuneiformes não deixaram registrado o argumento que os levou a esta conclusão, mas há indícios de que pode ter sido algo assim:

Sejam α e β os números procurados, digamos com $\alpha \leqslant \beta$. Esses números α e β são equidistantes da média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Se conhecermos a diferença $d = \beta - (s/2) = (s/2) - \alpha$ teremos os dois números $\alpha = (s/2) - d$ e $\beta = (s/2) + d$. Mas d é fácil de achar, pois

$$p = \alpha\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2,$$

logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \quad \text{e} \quad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Daí

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Como os dados s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios nunca tiveram preocupação com eventuais soluções negativas fornecidas por sua regra. Mas certamente deviam ocorrer casos em que $(s/2)^2 < p$, como no problema de achar dois números cuja soma e cujo produto são ambos iguais a 2. Isto porém não os levou a inventarem os números complexos. Nestes casos, eles simplesmente diziam que os números procurados não existiam. O que é absolutamente correto no âmbito dos números reais.

Observação 1. Os números complexos só vieram a forçar sua admissão na Matemática no século 16, com a fórmula para as raízes da equação do terceiro grau, que fornecia as raízes reais por meio de uma expressão contendo raízes quadradas de números negativos.

Observação 2. Se procurarmos dois números cuja soma é 6 e cujo produto é 9, encontraremos que esses números são 3 e 3. Então é um número só; não são dois. Para não ter que acrescentar ao enunciado do nosso problema a frase "... ou um número cujo dobro é s e cujo quadrado é p", preferimos seguir o costume, que se adota em Matemática desde aqueles tempos, segundo o qual a palavra "dois" às vezes significa "dois ou um". Quando quisermos garantir que significa "dois" mesmo, diremos "dois números diferentes". Mesma observação vale para três, quatro, etc.

10.4 A Forma Canônica do Trinômio

Consideremos o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\Big[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\Big].$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $(x + \frac{b}{2a})^2$. Completando o quadrado, podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = a\Big[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big],$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big].$$

Esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau (chamada a *forma canônica*) tem algumas consequências. Em primeiro lugar, ela conduz imediatamente à fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0\\ &\Leftrightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\ &\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

A passagem da linha (2) para a linha (3) só tem sentido quando o *discriminante*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é $\geqslant 0$. Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x+(b/2a)$ não pode ser negativo.

O método de completar o quadrado tem aplicações noutras questões matemáticas. Independente disso, é instrutivo fazer os alunos praticarem seu uso em exemplos concretos, para resolverem a equação do segundo grau sem aplicar diretamente a fórmula (4).

Da fórmula (4) resulta imediatamente que, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2+bx+c=0$$

tem duas raízes reais distintas

$$\alpha = (-b-\sqrt{\Delta})/2a$$

e

$$\beta = (-b+\sqrt{\Delta})/2a,$$

com $\alpha < \beta$, cuja soma é $s=-b/a$ e cujo produto é

$$p=(b^2-\Delta)/4a^2 = 4ac/4a^2 = c/a.$$

Em particular, a média aritmética das raízes é $-b/2a$, ou seja, as raízes α e β são equidistantes do ponto $-b/2a$.

Quando $\Delta = 0$, a equação dada possui uma única raiz, chamada *raiz dupla*, igual a $-b/2a$.

Suponhamos $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre $\geqslant 0$. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2$$

é igual a zero, ou seja, quando $x = -b/2a$. Neste ponto, $f(x)$ também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é

$$f(-b/2a) = c - (b^2/4a).$$

Se $a < 0$, o valor $f(-b/2a)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Quando $a > 0$, $f(x) = ax^2+bx+c$ não assume valor máximo: é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo: é ilimitada inferiormente.

A forma canônica ainda nos ajuda a responder a seguinte pergunta: Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, para quais valores $x \neq x'$ tem-se $f(x) = f(x')$?

Olhando para a forma canônica, vemos que $f(x) = f(x')$ se, e somente se,

$$\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 = \Big(x' + \frac{b}{2a}\Big)^2.$$

Como estamos supondo $x \neq x'$, isto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} = -\Big(x + \frac{b}{2a}\Big),$$

isto é

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-b/2a$.

Exemplo 1

O conhecimento do ponto onde uma função quadrática assume seu valor máximo ou mínimo permite obter rapidamente uma resposta para a tradicional questão de saber qual o valor máximo do produto de dois números cuja soma é constante. Neste problema, um número s é dado e quer-se achar um par de números x, y, com $x + y = s$, tais que o produto xy seja o maior possível. De $x + y = s$, tiramos $y = s - x$, portanto deve-se encontrar o valor de x que torna máximo o produto $x(s - x) = -x^2 + sx$. Esse valor máximo é assumido quando $x = s/2$, logo $y = s - x = s/2$. Concluímos então que o produto de dois números cuja soma é constante assume seu valor máximo quando esses números são iguais. (Note como ficaria complicado o enunciado desta conclusão se não tivéssemos permitido que a expressão *dois números* pudesse significar dois números iguais.)

10.5 O Gráfico da Função Quadrática

Veremos nesta seção que *o gráfico de uma função quadrática é uma parábola*.

Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a *parábola* de *foco* F e *diretriz* d é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de F e de d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o *vértice* dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Lembremos que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta.

Exemplo 2

O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, 1/4)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4$. Com efeito, a distância de um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = (0, 1/4)$ é igual a

$$\sqrt{x^2 + (x^2 - 1/4)^2}.$$

A distância do mesmo ponto (x, x^2) à reta $y = -1/4$ é $x^2 + 1/4$.

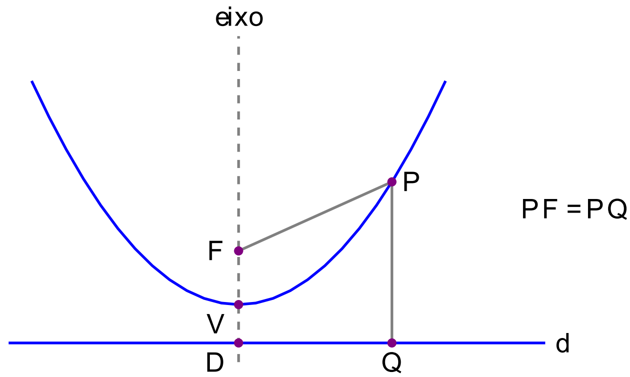


Figura 10.2: Foco e eixo da parábola.

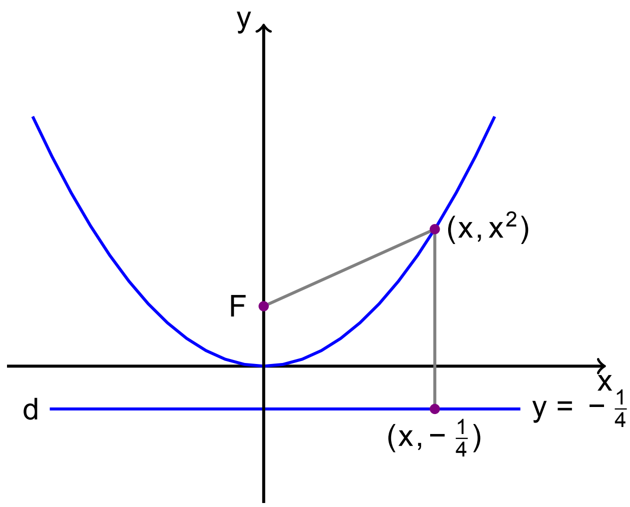


Figura 10.3: O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$.

Como se trata de números positivos, para verificarmos a igualdade entre estas duas distâncias, basta ver que seus quadrados são iguais. E, como se verifica facilmente, tem-se de fato,

$$x^2 + (x^2 - 1/4)^2 = (x^2 + 1/4)^2, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3

Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4a$.

A fim de se convencer deste fato, basta verificar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$x^2 + \Big(ax^2 - \frac{1}{4a}\Big)^2 = \Big(ax^2 + \frac{1}{4a}\Big)^2,$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = (0, 1/4a)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -1/4a$ (veja Figura 9.4).

Conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

Exemplo 4

Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = (m, 1/4a)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -1/4a$ (veja Figura 9.5).

Para se chegar a esta conclusão, tem-se duas opções. Ou se verifica que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade

$$(x-m)^2 + \Big[a(x-m)^2 - \frac{1}{4a}\Big]^2 = \Big[a(x-m)^2 + \frac{1}{4a}\Big]^2$$

ou então observa-se simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Exemplo 5

Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

A afirmação acima resulta imediatamente do exemplo anterior, levando em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

Segue-se deste último exemplo que o gráfico de qualquer função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

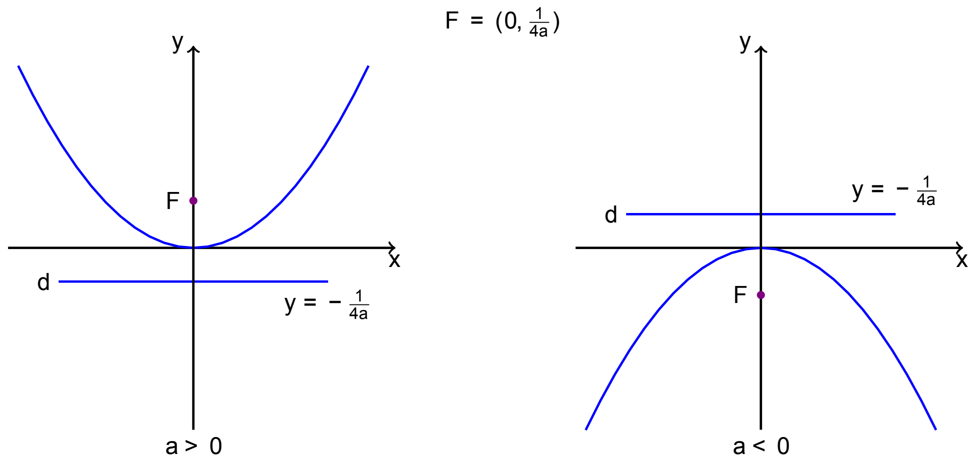


Figura 10.4: Os gráficos de $f(x) = ax^2$.

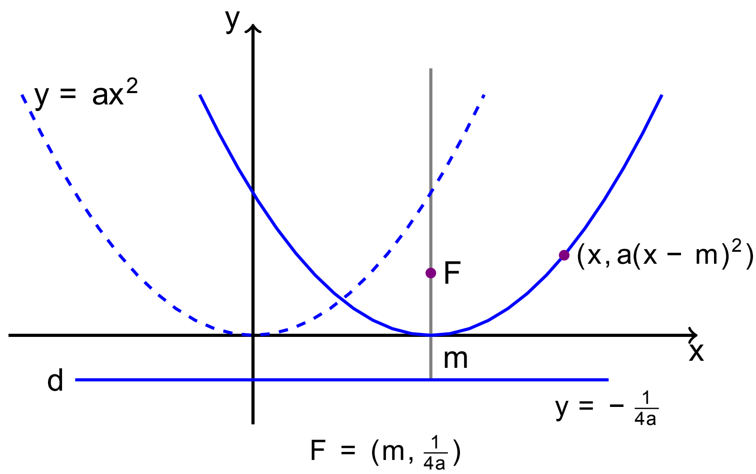


Figura 10.5: Translações horizontais.

é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right).$$

Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$.

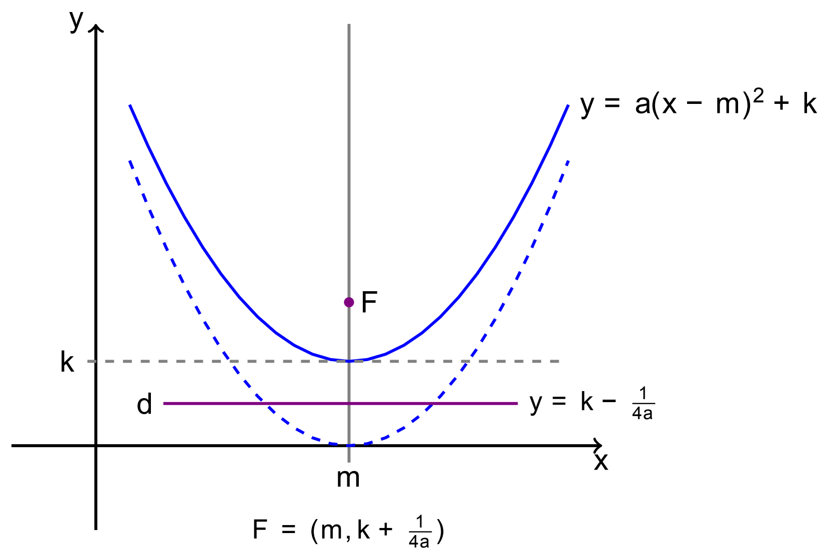


Figura 10.6: Os gráficos de $f(x) = a(x - m)^2 + k$.

Com efeito, a forma canônica do trinômio

$$ax^2 + bx + c$$

nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k,$$

onde

$$m = -b/2a \quad \text{e} \quad k = (4ac - b^2)/4a.$$

O ponto do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = -b/2a$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $x = -b/2a$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$.

A propriedade, provada no final da seção anterior, segundo a qual a função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

assume valores iguais $f(x) = f(x')$ se, e somente se, os pontos x e x' são simétricos em relação a $-b/2a$ (ou seja, $x + x' = -b/a$) significa que a reta vertical $x = -b/2a$ é um eixo de simetria do gráfico de f; mais precisamente, é o eixo dessa parábola.

O gráfico da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é um elemento de grande importância para entender o comportamento desta função. As abscissas α, β dos pontos onde esse gráfico intersecta o eixo OX são as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

O ponto médio do segmento $[\alpha, \beta]$ é a abscissa do vértice da parábola. Se o gráfico está inteiramente acima, ou inteiramente abaixo do eixo horizontal OX, a equação não possui raízes. Se o gráfico apenas tangencia o eixo OX, a equação tem uma raiz (única) dupla. Se $\alpha < x < \beta$ então $f(x)$ tem sinal contrário ao sinal de a; se $x < \alpha$ ou $x > \beta$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a. Estas e outras conclusões resultam imediatamente do exame do gráfico.

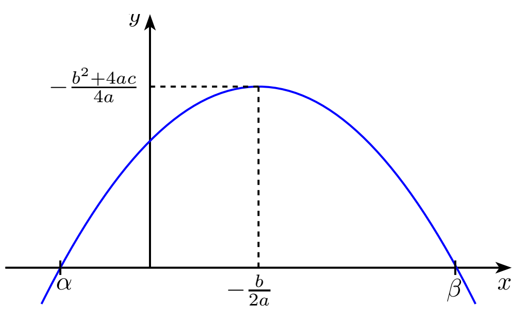
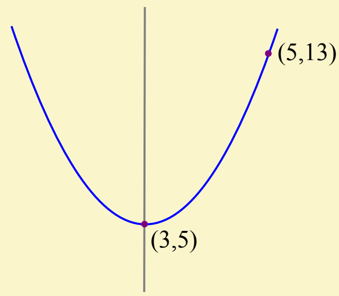
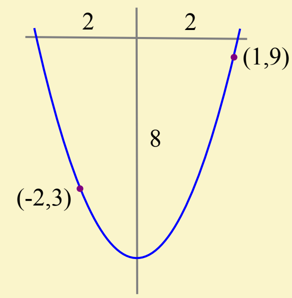


Figura 10.7: Coordenadas do vértice.

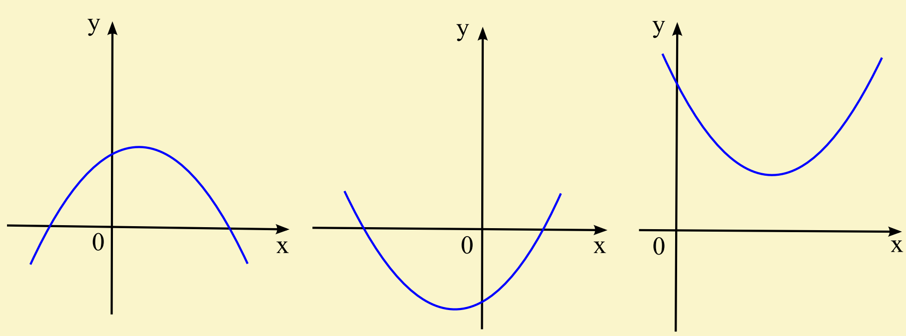
10.6 Exercícios Recomendados

1. Encontre a função quadrática cujo gráfico é dado em cada figura abaixo:





2. Identifique os sinais de a, b e c nas funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujos gráficos são dados abaixo:

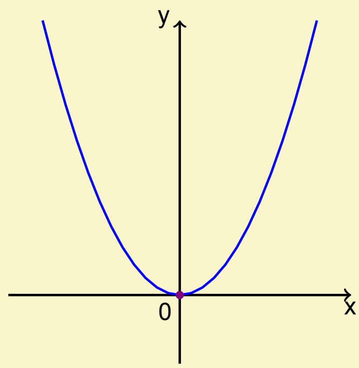


3. Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $f(x) = a(x-m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo ou máximo.

   a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$,

   b) $f(x) = 8x - 2x^2$.

4. Encontre a unidade que deve ser usada nos eixos cartesianos de modo que a parábola abaixo seja o gráfico da função $f(x) = 2x^2$.



5. Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:

   a) $[1, 4]$; b) $[6, 10]$.

6. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$.

   a) Mostre que
   $$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

   b) Mais geralmente, mostre que se $0 < \alpha < 1$, então
   $$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

   Interprete geometricamente esta propriedade.

10.7 Exercícios Suplementares

1. Prove que se a, b e c são inteiros ímpares, as raízes de $y = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

2. Uma pessoa possui um gravador de fita de vídeo dotado de um contador que registra o número de voltas dadas pelo carretel da direita. A fita, de 6 horas de duração, está parcialmente gravada. O contador indica 1750 ao final do trecho gravado e 1900 ao final da fita. O problema é saber quanto tempo de gravação ainda está disponível no final da fita.

   a) Explique porque não é razoável supor que o tempo de gravação seja proporcional ao número de voltas no contador.

b) Considerando que a fita se enrola em cada carretel segundo círculos concêntricos igualmente espaçados, mostre que o tempo $T(n)$ de gravação após n voltas é dado por uma função da forma $T(n) = an^2 + bn$.

c) Medindo o tempo de gravação correspondente às primeiras 100, 200, 300 e 400 voltas, foram encontrados os dados abaixo. Estes valores são consistentes com o modelo acima?

Volta	Tempo(s)
100	555
200	1176
300	1863
400	2616

d) Quanto tempo de gravação resta na fita?

3. Dado um conjunto de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja R_n o número máximo de regiões determinadas por n retas do plano.

a) Quando se adiciona mais uma reta na posição geral a um conjunto de n retas em posição geral, quantas novas regiões são criadas?

b) Deduza de a) que R_n é dada por uma função quadrática de n e obtenha a expressão para R_n.

4. No máximo quantos pontos de interseção existem quando são desenhadas n circunferências?

10.8 Textos Complementares

Para Saber Mais

Comentário sobre Colinearidade

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três pontos distintos em $\mathbb{R}^2$. A condição necessária e suficiente para que esses pontos sejam colineares é apresentada, em todos os nossos textos escolares, sob a forma da equação

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

na qual o primeiro membro é um determinante 3×3. Desenvolvendo esse determinante, vemos que a equação acima significa

$$(x_2 - x_3)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0$$

ou seja

$$(*) \qquad \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Como vimos, esta última igualdade exprime que as retas AB e AC têm a mesma inclinação. Ela constitui um critério de colinearidade mais simples, mais direto, mais fácil de verificar e mais elementar do que aquele adotado nos livros que nossos alunos usam, pois não requer o conhecimento de determinantes.

Pode-se objetar que a igualdade (*) só tem sentido quando $x_1 \neq x_2$ e $x_1 \neq x_3$. É verdade. Mas o caso em que $x_1 = x_2$ ou $x_1 = x_3$ não requer cálculo algum. Se algum dos denominadores na igualdade (*) é igual a zero, isto quer dizer que dois dos pontos A, B, C têm a mesma abscissa, logo estão sobre uma reta vertical. Basta então olhar para a abscissa do terceiro ponto: se for igual às outras duas então A, B e C estão na mesma vertical, logo são colineares. Se for diferente, A, B e C não são colineares.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974. 4

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

11

Função Quadrática - Aplicações

Sumário

11.1 Introdução 2
11.2 Uma Propriedade Notável da Parábola 2
11.3 O Movimento Uniformemente Variado 8
11.4 Exercícios Recomendados 11
11.5 Exercícios Suplementares 12

11.1 Introdução

Em continuidade à unidade anterior, são propostos agora alguns aprofundamentos e aplicações do estudo das propriedades das parábolas e das funções quadráticas.

Na Seção 2, estabelecemos uma importante propriedade geométrica dessas curvas: *A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.* Como observado no início da seção, esta propriedade é amplamente aplicada à construção de diversos equipamentos tecnológicos. Certifique-se de entender claramente todos os conceitos e teoremas necessários para a demonstração dessa propriedade, a saber, as definições de *ângulo entre uma curva e uma reta* e de *reta tangente a uma parábola em um ponto P*; a caracterização das retas tangentes ao gráfico de uma função quadrática; e a caracterização de retas perpendiculares por meio de seus coeficientes angulares.

Na Seção 3, estudamos a aplicação das funções quadráticas para descrever um tipo particular de movimento, em que a aceleração é constante. Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, isto significa que, neste tipo de movimento, a velocidade pode não ser constante, mas cresce ou decresce com uma taxa constante. Observe que esta é uma característica muito particular, que permite que este tipo de movimento seja modelado por funções quadráticas e, portanto, completamente descrito por meio de métodos algébricos simples. Assim, nossos conhecimentos sobre funções quadráticas nos permitem obter todas as informações sobre o movimento no caso uniformemente variado. Para estudar a cinemática no caso de movimentos mais gerais, são necessários métodos do Cálculo Infinitesimal.

11.2 Uma Propriedade Notável da Parábola

Se girarmos uma parábola em torno do seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada *parabolóide de revolução*, também conhecida como *superfície parabólica*. Esta superfície possui inúmeras aplicações interessantes, todas elas decorrentes de uma propriedade geométrica da parábola, que veremos nesta seção.

A fama das superfícies parabólicas remonta à Antiguidade. Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 A.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando os navios com os raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. Mas a lenda sobreviveu, e com ela a ideia de que ondas (de luz, de calor, de rádio ou de outra qualquer natureza), quando refletidas numa superfície parabólica, concentram-se sobre o foco, assim concentrando grandemente o sinal recebido.

Da lenda de Arquimedes restam hoje um interessante acendedor solar de cigarros e outros artefatos que provocam ignição fazendo convergir os raios de sol para o foco de uma superfície parabólica polida.

Outros instrumentos atuam inversamente, desviando na direção paralela ao eixo os raios de luz que emanam do foco. Como exemplos, citamos os holofotes, os faróis de automóveis e as simples lanternas de mão, que têm fontes luminosas à frente de uma superfície parabólica refletora.

Um importante uso recente destas superfícies é dado pelas antenas parabólicas, empregadas na rádio-astronomia, bem como no dia-a-dia dos aparelhos de televisão, refletindo os débeis sinais provenientes de um satélite sobre sua superfície, fazendo-os convergir para um único ponto, o foco, deste modo concentrando-os consideravelmente.

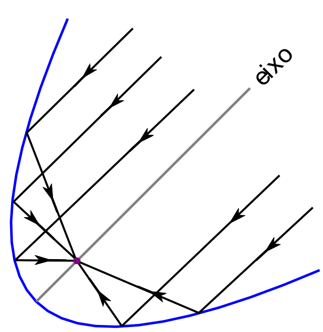


Figura 11.1: Propriedades de reflexão da parábola.

Vamos agora analisar o fundamento matemático desses aparelhos.

Começaremos com o princípio segundo o qual, quando um raio incide sobre uma superfície refletora, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Neste contexto, a superfície parabólica pode ser substituída pela parábola que é a interseção dessa superfície com o plano que contém o raio incidente, o raio refletido e o eixo de rotação (igual ao eixo da parábola).

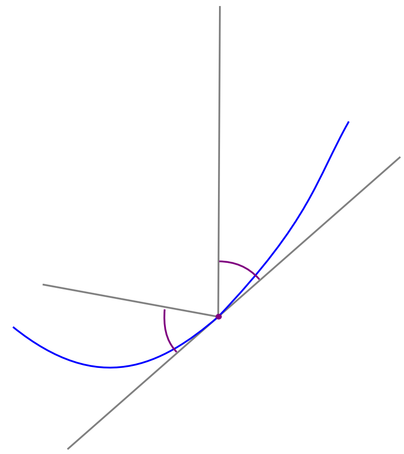


Figura 11.2: Propriedades de reflexão da parábola.

O ângulo entre uma reta e uma curva que se intersectam no ponto P é, por definição, o ângulo entre essa reta e a tangente à curva traçada pelo ponto de interseção. É assim que se interpretam os ângulos de incidência e reflexão.

A *tangente* a uma parábola no ponto P é a reta que tem em comum com a parábola esse único ponto P e tal que todos os demais pontos da parábola estão do mesmo lado dessa reta.

A tangente a uma parábola tem sua posição determinada pelo seguinte teorema:

Se a parábola é o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sua tangente no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, é a reta que passa por esse ponto e tem inclinação igual a $2ax_0 + b$.

Para provar isto, mostremos que todos os pontos dessa parábola que têm abscissa diferente de x_0 estão fora da reta mencionada e no mesmo semi-plano determinado por ela.

Mais precisamente, suponhamos (para fixar ideias) que seja $a > 0$. Mostraremos que, para todo $x \neq x_0$, o ponto (x, y) da parábola, com $y = ax^2+bx+c$, está acima do ponto $(x, y_0+(2ax_0+b)(x-x_0))$, de mesma abscissa x, situado sobre a reta. Noutras palavras, queremos provar que (supondo $a > 0$)

$$x \neq x_0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0).$$

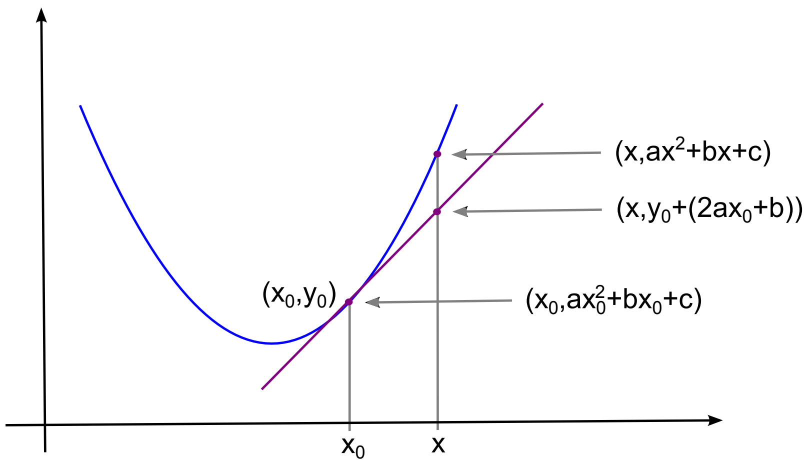


Figura 11.3: Propriedades de reflexão da parábola.

Para isto, basta notar que se $x \neq x_0$, então

$$ax^2 + bx + c - [ax_0^2 + bx_0 + c + (2ax_0 + b)(x - x_0)]$$
$$= a(x - x_0)^2 > 0.$$

Isto mostra que a reta de inclinação $2ax_0 + b$ que passa pelo ponto (x_0, y_0), com $y_0 = f(x_0)$, tem este único ponto em comum com a parábola que é o gráfico de f e que todos os pontos da parábola estão acima dessa reta. Logo esta reta é tangente à parábola neste ponto. Quando $a > 0$, a parábola se situa acima de qualquer de suas tangentes, conforme acabamos de ver. Se for $a < 0$ então a parábola se situa abaixo de todas as suas tangentes.

Observação. Todas as retas paralelas ao eixo de uma parábola têm apenas um ponto em comum com essa parábola mas nenhuma delas é tangente porque há pontos da parábola em ambos semiplanos por ela determinados.

Sabendo que a parábola, gráfico da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

tem, no ponto $P = (x, y)$, uma tangente cuja inclinação é $2ax + b$, calculemos agora a inclinação da reta FQ que une o foco F ao ponto Q, pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d.

No cálculo que se segue, admitiremos que P não é o vértice da parábola, isto é, que sua abscissa x é diferente de $-b/2a$, logo $2ax + b \neq 0$. Caso P fosse o vértice, a reta FQ seria vertical e a tangente no ponto P teria inclinação zero, logo seria horizontal.

A inclinação da reta FQ é dada por uma fração cujo numerador é a diferença entre as ordenadas de Q e F e cujo denominador é a diferença entre as abscissas desses pontos.

Ora, já vimos que $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e $Q = (x, k - \frac{1}{4a})$, onde $m = -b/2a$ e $k =$ ordenada do vértice da parábola. Logo a inclinação de FQ é igual a

$$\frac{k - \frac{1}{4a} - (k + \frac{1}{4a})}{x - m} = \frac{-1}{2a(x-m)} = \frac{-1}{2a(x + \frac{b}{2a})} = -\frac{1}{2ax+b}.$$

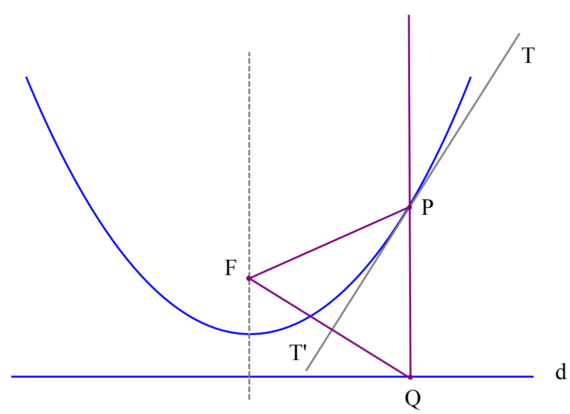


Figura 11.4: Propriedades de tangência.

Isto significa que o segmento de reta FQ é perpendicular à reta TT', tangente à parábola no ponto P, conforme o resultado a seguir.

Lema. *As retas $y = ax + b$ e $y = a'x + b'$, com $a \neq 0$ e $a' \neq 0$, são perpendiculares se, e somente se, $a' = -1/a$.*

Demonstração: Como as retas $y = ax$ e $y = a'x$ são paralelas às retas dadas, aquelas serão perpendiculares se, e somente se, estas o forem. Suponhamos que estas retas sejam perpendiculares. Tomando $x = 1$, vemos que o ponto $(1, a)$ pertence a uma das retas e o ponto $(1, a')$ pertence à outra (veja Figura 10.5).

Então o triângulo cujos vértices são os pontos $(0, 0), (1, a)$ e $(1, a')$ é retângulo, logo a altura baixada do vértice do ângulo reto é a média geométrica dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. Ora, o comprimento da altura é 1. Além disso, um dos números a e a' (digamos a') é negativo e o outro é positivo. Logo os referidos segmentos medem a e a'. Assim $1 = -aa'$

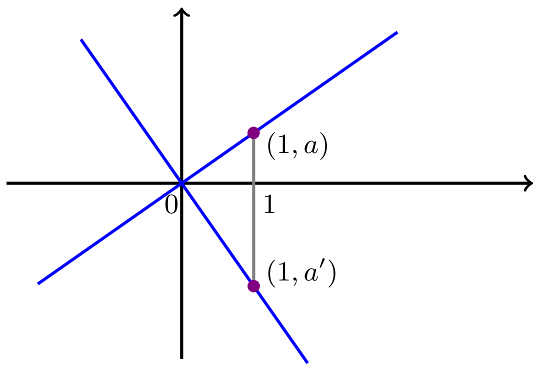


Figura 11.5: Retas perpendiculares.

e $a' = -1/a$. Reciprocamente, se $a' = -1/a$, consideramos a reta $y = bx$, perpendicular à reta $y = ax$ a partir da origem. Pelo que acabamos de ver, temos $b = -1/a$. Assim, $b = a'$, mostrando que $y = a'x$ coincide com $y = bx$, e, portanto é perpendicular a $y = ax$.

Podemos, finalmente, enunciar a propriedade geométrica da parábola na qual se baseiam as aplicações da superfície parabólica (veja Figura 10.6).

A tangente à parábola num ponto P faz ângulos iguais com a paralela ao eixo e com a reta que une o foco F a esse ponto.

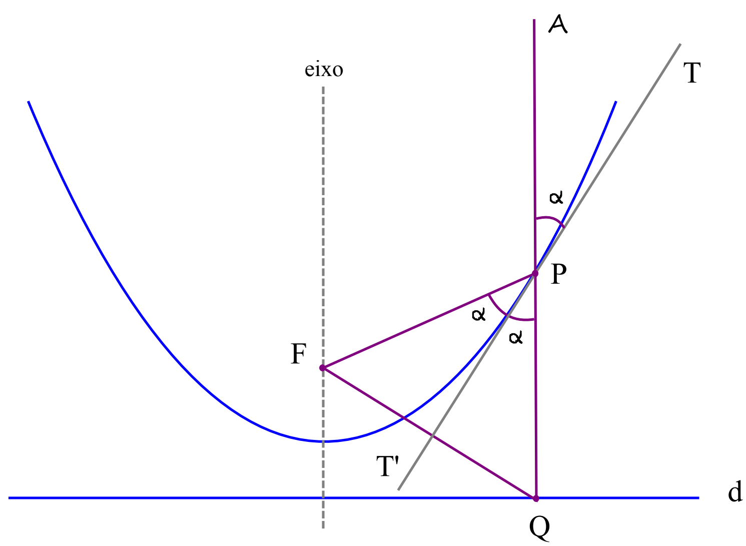


Figura 11.6: Propriedades de tangência.

Com efeito, se Q é o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz, a definição da parábola nos diz que $\overline{FP} = \overline{PQ}$, logo o triângulo FPQ é isósceles. Além disso, acabamos de ver que FQ é perpendicular à tangente, ou seja, a tangente é altura desse triângulo isósceles, logo é também bissetriz. Portanto, os ângulos $F\widehat{P}T'$ e $T'\widehat{P}Q$ são iguais. Logo $A\widehat{P}T = F\widehat{P}T' = \alpha$.

Se a antena parabólica estiver voltada para a posição (estacionária) do satélite, a grande distância faz com que os sinais emitidos por este sigam trajetórias praticamente paralelas ao eixo da superfície da antena, logo eles se refletem na superfície e convergem para o foco, de acordo com o princípio que acabamos de demonstrar.

11.3 O Movimento Uniformemente Variado

A função quadrática é o modelo matemático que descreve o movimento uniformemente variado.

Neste tipo de movimento, que tem como um exemplo importante a queda dos corpos no vácuo, sujeitos apenas à ação da gravidade, tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo. Sua posição no instante t é dada pela abscissa $f(t)$. O que caracteriza o movimento uniformemente variado é o fato de f ser uma função quadrática

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c. \tag{10.1}$$

Nesta expressão a constante a chama-se a *aceleração*, b é a *velocidade inicial* (no instante $t = 0$) e c é a *posição inicial* do ponto.

Em qualquer movimento, dado por uma função f, o quociente

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{\text{espaço percorrido}}{\text{tempo de percurso}}$$

chama-se a *velocidade média* do ponto no intervalo cujos extremos são t e $t+h$. No caso em que f é dada pela fórmula (10.1), a velocidade média do móvel entre os instantes t e $t+h$ é igual a $at + b + \frac{ah}{2}$. Se tomarmos h cada vez menor, este valor se aproxima de $at + b$. Por isso se diz que

$$v(t) = at + b$$

é a *velocidade* do ponto (no movimento uniformemente variado) no instante t.

Quando $t = 0$ temos $v(0) = b$, por isso b se chama a velocidade inicial. Além disso, vê-se que $a = [v(t+h) - v(t)]/h$ para quaisquer t, h, logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade. Por isso o movimento se chama uniformemente variado. [Uniformemente acelerado ou retardado, conforme v tenha o mesmo sinal de a (isto é, $t > -b/a$) ou v tenha sinal oposto ao de a (ou seja, $t < -b/a$).]

No caso da queda livre de um corpo, a aceleração a é a da gravidade, normalmente indicada pela letra g.

Nosso conhecimento da função quadrática permite obter uma descrição completa do movimento uniformemente variado.

Por exemplo, se uma partícula é posta em movimento sobre um eixo a partir do ponto de abscissa -6, com velocidade inicial de $5m/s$ e aceleração constante de $-2m/s^2$, quanto tempo se passa até que sua trajetória mude de sentido e ela comece a voltar para o ponto de partida? Resposta: temos $f(t) = -t^2+5t-6$. Logo o valor máximo de f é obtido quando $t = -5/(-2) = 2,5s$. Podemos ainda dizer que o ponto começa a voltar quando $v(t) = 0$. Como $v(t) = -2t+5$ isto nos dá novamente $t = 2,5s$.

O movimento uniformemente variado pode ocorrer também no plano. Um exemplo disso é o movimento de um projétil (uma bala, uma bola, uma pedra, etc.) lançado por uma força instantânea e, a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar (movimento no vácuo). Embora o processo ocorra no espaço tridimensional, a trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Quando se tem um movimento retilíneo (sobre um eixo), a velocidade do móvel é expressa por um número. Mas quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama a *velocidade escalar* do móvel (tantos metros por segundo). A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

No plano em que se dá o movimento, tomemos um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo OY é a vertical que passa por esse ponto.

A velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1, v_2)$ cuja primeira coordenada v_1 fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX).

Como a única força atuando sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre este movimento horizontal, que é portanto um movimento uniforme. Assim, se $P = (x, y)$ é a posição do projétil no instante t, tem-se $x = v_1 t$.

Por sua vez, a aceleração (= força) da gravidade é constante, vertical, igual a $-g$. (O sinal menos se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical OY.) Portanto, a componente vertical do movimento de P é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo OY, com aceleração igual a $-g$ e velocidade inicial v_2.

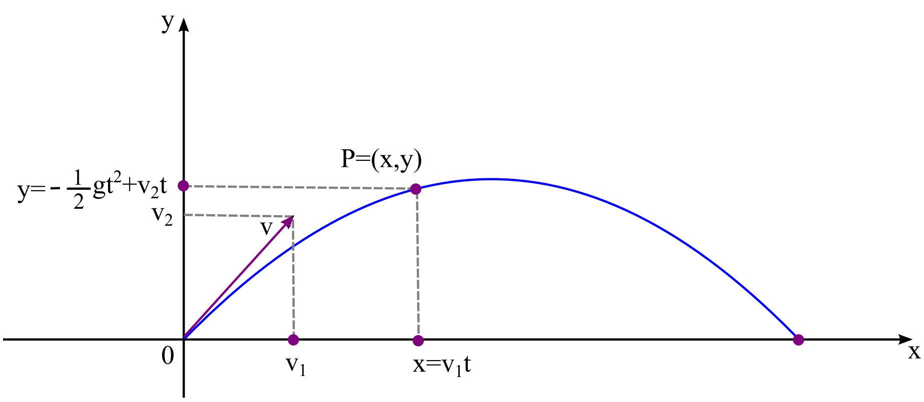


Figura 11.7: Movimento uniformemente variado.

Logo, em cada instante t, a ordenada y do ponto $P = (x, y)$ é dada por $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$. (Não há termo constante porque $y = 0$ quando $t = 0$.)

Se $v_1 = 0$ então, para todo t, tem-se $x = v_1 t = 0$, logo $P = (0, y)$, com

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t.$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical.

Suponhamos agora $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1 t$ vem $t = x/v_1$. Substituindo t por este valor na expressão de y, obtemos

$$y = ax^2 + bx, \text{ onde } a = -g/2v_1^2 \quad \text{e} \quad b = v_2/v_1.$$

Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

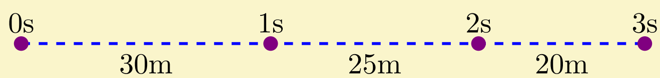
11.4 Exercícios Recomendados

1. Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo:

Instante (s)	Posição (metros)
0	17
10	45
20	81

Calcule a posição do móvel nos instantes $5s$, $15s$ e $25s$.

2. O motorista de um automóvel aplica os freios de modo suave e constante, de modo a imprimir uma força de frenagem constante a seu veículo, até o repouso. O diagrama a seguir mostra a posição do veículo a cada segundo a partir do instante em que os freios foram aplicados.



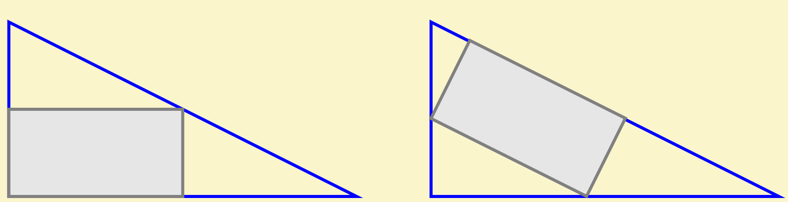
   a) Os dados acima são compatíveis com o fato de a força de frenagem ser constante?

   b) Qual a posição do veículo $5s$ após o início da frenagem?

   c) Quanto tempo o veículo demora para chegar ao repouso?

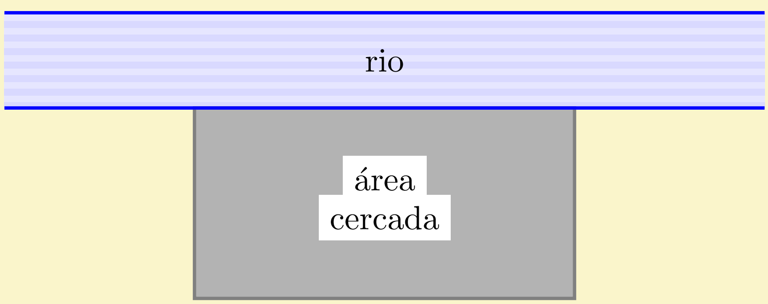
   d) Qual era a velocidade do veículo no instante em que o motorista começou a aplicar os freios?

3. Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60cm, 80cm e 1m. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.



As posições sugeridas são as da figura acima. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados. Discuta se a restrição de um lado estar sobre o contorno do triângulo é realmente necessária para efeito de maximizar a área.

4. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.



Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?

11.5 Exercícios Suplementares

1. Um grupo de alunos, ao realizar um experimento no laboratório de Física, fez diversas medidas de um certo comprimento. O instrutor os orientou no sentido de tomar a média aritmética dos valores encontrados como o valor a ser adotado. Este procedimento pode ser justificado do modo abaixo.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ os valores encontrados. É razoável que o valor adotado x seja escolhido de modo que o erro incorrido pelas diversas medições seja o menor possível. Em geral, este erro é medido através do chamado desvio quadrático total, definido por

$$d(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2.$$

a) Mostre que $d(x)$ é minimizado quando x é a mediana de $x_1, x_2, \ldots,$ x_n, ou seja,

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

b) Suponha agora que se deseje utilizar o desvio absoluto total $e(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \cdots + |x - x_n|$ como medida do erro cometido. Mostre que $e(x)$ é minimizado quando x é a mediana de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2. No instante $t = 0$ o ponto P está em $(-2, 0)$ e o ponto Q em $(0, 0)$. A partir desse instante, Q move-se para cima com velocidade de 1 unidade por segundo e P move-se para a direita com velocidade de 2 unidades por segundo. Qual é o valor da distância mínima entre P e Q ?

3. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

4. João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés, por R$ 20,00 cada caixa. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

5. Uma loja está fazendo uma promoção na venda de balas: "Compre x balas e ganhe x% de desconto". A promoção é válida para compras de até 60 balas, caso em que é concedido o desconto máximo de 60%. Alfredo, Beatriz, Carlos e Daniel compraram 10, 15, 30 e 45 balas, respectivamente. Qual deles poderia ter comprado mais balas e gasto a mesma quantia, se empregasse melhor seus conhecimentos de Matemática?

6. O diretor de uma orquestra percebeu que, com o ingresso a R$ 9,00, em média 300 pessoas assistem aos concertos e que, para cada redução de R$ 1,00 no preço dos ingressos, o público aumenta de 100 espectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a receita seja máxima?

7. Determine explicitamente os coeficientes a, b, c do trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ em função dos valores $f(0)$, $f(1)$ e $f(2)$.

8. Um restaurante a quilo vende 100 kg de comida por dia, a 12 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 10 clientes, com um consumo médio de 500g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

9. Um prédio de 1 andar, de forma retangular, com lados proporcionais a 3 e 4, vai ser construído. O imposto predial é de 7 reais por metro quadrado, mais uma taxa fixa de 2.500 reais. A prefeitura concede um desconto de 60 reais por metro linear do perímetro, como recompensa pela iluminação externa e pela calçada em volta do prédio. Quais devem ser as medidas dos lados para que o imposto seja o mínimo possível? Qual o valor desse imposto mínimo? Esboce o gráfico do valor do imposto como função do lado maior do retângulo.

10. Determine entre os retângulos de mesma área a, aquele que tem o menor perímetro. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior do que os de todos os demais com mesma área?

11. Que forma tem o gráfico da função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$?

12. Mostre que a equação $\sqrt{x} + m = x$ possui uma raiz se $m > 0$, duas raízes quando $-\frac{1}{4} < m \leqslant 0$, uma raiz para $m = -1/4$ e nenhuma raiz caso $m < -1/4$.

13. Numa concorrência pública para a construção de uma pista circular de patinação apresentam-se as firmas A e B. A firma A cobra 20 reais por metro quadrado de pavimentação, 15 reais por metro linear do cercado, mais uma taxa fixa de 200 reais para administração. Por sua vez, a firma B cobra 18 reais por metro quadrado de pavimentação, 20 reais por metro linear do cercado e taxa de administração de 600 reais. Para quais valores do diâmetro da pista a firma A é mais vantajosa? Esboce um gráfico que ilustre a situação. Resolva um problema análogo com os números 18, 20 e 400 para A e 20, 10, 150 para B.

14. Dados a, b, c positivos, determinar x e y tais que $xy = c$ e que $ax + by$ seja o menor possível.

15. Cavar um buraco retangular de $1m$ de largura de modo que o volume cavado seja $300m^3$. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar as dimensões do buraco de modo que o seu custo seja mínimo.

16. Dois empresários formam uma sociedade cujo capital é de 100 mil reais. Um deles trabalha na empresa três dias por semana e o outro 2. Após um certo tempo, vendem o negócio e cada um recebe 99 mil reais. Qual foi a contribuição de cada um para formar a sociedade?

17. Nas águas paradas de um lago, Marcelo rema seu barco a $12km$ por hora. Num certo rio, com o mesmo barco e as mesmas remadas, ele percorreu $12km$ a favor da corrente e $8km$ contra a corrente, num tempo total de 2 horas. Qual era a velocidade do rio, quanto tempo ele levou para ir e quanto tempo para voltar?

18. Os alunos de uma turma fizeram uma coleta para juntar 405 reais, custo de uma excursão. Todos contribuíram igualmente. Na última hora, dois alunos desistiram. Com isso, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos. Quantos alunos tem a turma?

19. Prove que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante.

20. Olhando o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$, vê-se que ele parece uma parábola. Se for, quais serão o foco e a diretriz? Por simetria, o foco deve ser $F = (0, t)$ e a diretriz deve ser a reta $y = -t$. Use a definição de parábola para mostrar que $t = 1/4$.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974. 4

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

12

Funções Polinomiais

Sumário

12.1 Introdução 2
12.2 Funções Polinomiais vs Polinômios 4
12.3 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores 6
12.4 Gráficos de Polinômios 8
12.5 Exercícios Recomendados 12

12.1 Introdução

Dando prosseguimento às últimas unidades, daremos continuidade ao estudo de algumas ideias sobre funções afins e quadráticas, enfocando agora funções polinomiais em geral.

Um primeiro resultado importante, apresentado na Seção 2, é o fato de que *um número real* α *é raiz de uma função polinomial* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $x - \alpha$ *é fator de* $p(x)$. Este resultado, que relaciona raízes com fatoração, fornece uma ferramenta importante – e muito utilizada – para determinar raízes: se conseguimos determinar, de alguma maneira (seja por algum método algébrico ou por inspeção) uma raiz de um polinômio p, podemos fatorar p em polinômios de grau menor, o que pode facilitar a tarefa de encontrar outras raízes. Decorre também deste resultado o fato de que um polinômio de grau n com coeficientes reais tem, no máximo, n raízes. Do ponto de vista do ensino, essas propriedades têm grande importância. De forma geral, na abordagem de polinômios no ensino básico, certas técnicas particulares têm recebido muito mais ênfase do que aspectos mais conceituais e qualitativos, como a aplicação da fatoração para a determinação de raízes e a análise de sinais, o que possibilita o estudo de gráficos em casos simples.

Ainda na Seção 2, observe o comentário sobre a relação entre funções polinomiais e polinômios, já discutida na Unidade 9. Para entender a necessidade desse comentário, é importante lembrar que, a princípio, funções polinomiais e polinômios são objetos matemáticos de naturezas diferentes. Funções polinomiais são, antes de mais nada, *funções*, portanto a igualdade entre funções polinomiais (com mesmos domínio e contradomínio) é determinada pela *igualdade de seus valores em cada elemento do domínio*. Por outro lado, polinômios são *expressões formais* e, portanto, sua igualdade é determinada pela *igualdade de seus coeficientes*. É claro que um polinômio não pode gerar duas funções polinomiais diferentes. No caso de $\mathbb{R}$, vale a recíproca: uma função polinomial não pode ser gerada por polinômios diferentes (fato que pode não ser verdadeiro em outros corpos distintos do corpo dos números reais) Assim, há uma correspondência biunívoca entre funções polinomiais reais e polinômios reais e não há necessidade de fazer distinção entre eles.

A Seção 3, também trata de um fato já abordado na Unidade 9 para o caso particular de funções quadráticas, a saber,

dados $n+1$ *números reais* $x_0, \ldots, x_n$*, dois a dois distintos, e* $n+1$ *números reais* $y_0, \ldots, y_n$*, quaisquer, existe um único polinômio* p*, de grau* $\leq n$*, tal que* $p(x_k) = y_k$*, para todo* $k = 0, \ldots, n$.

A unicidade de tal polinômio decorre do fato de que um polinômio de grau n só pode ter no máximo n raízes. Para a existência, são apresentados dois argumentos. O primeiro deles se baseia na análise das soluções de um sistema linear. Nesse sistema, observe que os números $x_0, \ldots, x_n$ e $y_0, \ldots, y_n$ são conhecidos e os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são as incógnitas.

Na Seção 4, são apresentados alguns fatos importantes envolvendo o comportamento assintótico de funções polinomiais, isto é, seu comportamento quando x tende a $\pm\infty$. Essencialmente, podemos dizer que o comportamento assintótico de uma função polinomial é determinado pelo seu termo de maior grau, pois para $|x|$ suficientemente grande os demais termos tornam-se desprezíveis

Ainda na Seção 4, é apresentado o *método de Newton*, que é um método numérico para o cálculo de raízes, isto é, um método de cálculo de valores aproximados de raízes. Para o ensino médio, o método de Newton pode não ser adequado, pois envolve o conceito de derivada. Entretanto, o cálculo aproximado de raízes de polinômios pode ser desenvolvido por meio de métodos mais simples. Por exemplo, o método da bisseção é acessível ao ensino médio, com a ajuda de uma calculadora de bolso simples, como descrevemos a seguir. Se encontramos dois números x_1 e x_2 tais que $p(x_1)$ e $p(x_2)$ possuem sinais distintos, digamos $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, podemos ter certeza de que existe (pelo menos) uma raiz de p no intervalo $]x_1, x_2[$ (isto é um resultado que decorre da continuidade das funções polinomiais, conceito que será estudado na disciplina *Fundamentos do Cálculo*). Tomamos então um número qualquer x_3 nesse intervalo. Se $p(x_3) = 0$, temos a sorte de ter encontrado nossa raiz. Se $p(x_3) > 0$, existe (pelo menos) uma raiz no intervalo $]x_1, x_3[$. Se $p(x_3) < 0$, existe (pelo menos) uma raiz no intervalo $]x_3, x_2[$. Podemos assim continuar o processo indefinidamente. O cálculo aproximado de raízes é importante e acessível para aprofundar a ideia de raiz no ensino médio, bem como a de aproximação, complementando e ampliando os métodos convencionais, que muitas vezes são memorizados sem compreensão adequada.

12.2 Funções Polinomiais vs Polinômios

Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma *função polinomial* quando existem números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{11.1}$$

Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem $grau\ n$.

A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais. Um exemplo interessante de produto é

$$(x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}) = x^n - \alpha^n.$$

Dizemos então que $x^n - \alpha^n$ é *divisível* por $x - \alpha$.

Seja p a função polinomial apresentada em (11.1). Para quaisquer x, α reais, temos

$$p(x) - p(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x-\alpha).$$

Como cada parcela do segundo membro é divisível por $x-\alpha$, podemos escrever, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) - p(\alpha) = (x-\alpha)q(x),$$

onde q é uma função polinomial. Note que se p tem grau n, então q tem grau $n-1$. Em particular, se α é uma *raiz* de p, isto é, $p(\alpha) = 0$, então $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A recíproca é óbvia.

Portanto, α é uma raiz de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$. Mais geralmente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são raízes de p se, e somente, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)q(x),$$

onde q é uma função polinomial de grau $n-k$ se p tem grau n.

Daí resulta que *uma função polinomial de grau n não pode ter mais do que n raízes.*

Uma função polinomial p chama-se *identicamente nula* quando se tem $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, p tem uma infinidade de raízes, já que todo número real é raiz de p. Então nenhum número natural n é grau de p, a fim de não contradizer o resultado acima. Isto significa que, na expressão

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

todos os coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são iguais a zero. Concluímos então que a única função polinomial identicamente nula é do tipo

$$0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0.$$

Se nos ativermos à letra da definição, a função polinomial identicamente nula não tem grau, pois nenhum dos seus coeficientes é $\neq 0$.

Dadas as funções polinomiais p e q, completando com zeros (se necessário) os coeficientes que faltam, podemos escrevê-las sob as formas

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0,$$

sem que isto signifique que ambas têm grau n, pois não estamos dizendo que $a_n \neq 0$ nem que $b_n \neq 0$.

Suponhamos que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, que p e q sejam funções iguais. Então a diferença $d = p - q$ é a função identicamente nula, pois $d(x) = p(x) - q(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$d(x) = (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Pelo que acabamos de ver sobre funções polinomiais identicamente nulas, segue-se que $a_n - b_n = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0, a_0 - b_0 = 0$, ou seja,

$$a_n = b_n,\ \ldots,\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0.$$

Portanto as funções polinomiais p e q assumem o mesmo valor $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, têm os mesmos coeficientes.

Existe uma diferença sutil entre o conceito de função polinomial e o conceito de polinômio, que apresentaremos agora.

Um *polinômio* é uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo (chamado uma *indeterminada*), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdots X$ (i fatores). Em essência, o polinômio $p(X)$ é o mesmo que a lista ordenada dos seus coeficientes. Ao escrevê-lo da maneira acima, estamos deixando explícita a intenção de somar e multiplicar polinômios como se fossem funções polinomiais, usando a regra $X^i \cdot X^j = X^{i+j}$. Por definição, os polinômios

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

e

$$q(X) = b_n X^n + \cdots + b_1 X + b_0$$

são *iguais* (ou *idênticos*) quando $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$.

A cada polinômio

$$p(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$$

faz-se corresponder a função polinomial $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\overline{p}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta correspondência (polinômio) $\mapsto$ (função polinomial) é sobrejetiva, pela própria definição destas funções. A discussão que fizemos acima sobre os coeficientes de funções polinomiais iguais significa que a polinômios distintos correspondem funções polinomiais distintas. Logo, trata-se de uma correspondência biunívoca.

Por esse motivo, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio p e a função polinomial $\overline{p}$. Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial. Além disso, diremos "a função $p(x)$" sempre que não houver perigo de confundi-la com número real que é o valor por ela assumido num certo ponto x.

12.3 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores

Um polinômio de grau n é dado quando se conhecem seus $n+1$ coeficientes. Segundo a boa prática matemática, para determinar $n+1$ números é necessário (e muitas vezes suficiente) ter $n+1$ informações. No nosso caso, vale o seguinte resultado:

Dados $n+1$ números reais distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e fixados arbitrariamente os valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe um, e somente um, polinômio p, de grau $\leqslant n$, tal que

$$p(x_0) = y_0,\ p(x_1) = y_1,\ \ldots,\ p(x_n) = y_n.$$

A parte "somente um" decorre imediatamente do que foi visto na seção anterior pois se p e q são polinômios de grau $\leqslant n$ que assumem os mesmos valores em $n+1$ pontos distintos então a diferença $p-q$ é um polinômio de grau $\leq n$ com $n+1$ raízes, logo $p-q=0$ e $p=q$.

A existência de um polinômio p de grau $\leqslant n$ que assume valores pré-fixados em $n+1$ pontos distintos dados pode ser provada de duas maneiras diferentes. A primeira delas consiste em resolver o sistema de $n+1$ equações nas $n+1$ incógnitas $a_1, \ldots, a_n$ abaixo indicado:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_n x_1^n + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ \qquad \vdots \\ a_n x_n^n + \cdots + a_1 x_n + a_0 = y_n. \end{cases}$$

Este sistema, no qual as quantidades conhecidas são as potências sucessivas de $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tem sempre solução única quando estes $n+1$ números são dois a dois diferentes. De fato, o determinante da matriz dos coeficientes do sistema é igual a $\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$, chamado determinante de Vandermonde (cf. [8]).

Outra maneira de provar que existe sempre um polinômio de grau $\leqslant n$ que assume nos $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ os valores arbitrados $y_0, y_1, \ldots, y_n$ consiste em exibir explicitamente esse polinômio, usando a chamada *fórmula de interpolação de Lagrange*.

Apresentamos a seguir os polinômios que resolvem o problema.

$n=1:$

$$p(x) = y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

$n=2:$

$$\begin{aligned} p(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} &+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2))} + \\ &+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned}$$

Caso geral:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{k \neq i} \Big(\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \Big).$$

Vê-se imediatamente que o polinômio $p(x)$ cumpre as condições

$$p(x_0) = y_0,\ p(x_1) = y_1,\ \ldots,\ p(x_n) = y_n.$$

Esse polinômio tem grau $\leqslant n$ mas seu grau pode perfeitamente ser qualquer número inteiro entre 0 e n.

Por exemplo, se pusermos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ e $x_4 = 3$ e procurarmos o polinômio de grau $\leqslant 4$ que assume nesses pontos os valores -7, 1, 5, 11 e 25 respectivamente, obteremos

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1,$$

que tem grau 3.

12.4 Gráficos de Polinômios

Quando se deseja traçar o gráfico, ao menos um esboço, de um polinômio, certas informações são de grande utilidade. Vejamos algumas delas.

1) Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$. Se n é par então, para $|x|$ suficientemente grande, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n. Este sinal é, portanto, o mesmo, não importando se $x < 0$ ou $x > 0$, desde que $|x|$ seja suficientemente grande. Se, entretanto, n é ímpar, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem o sinal oposto de a_n para valores negativos muito grandes de x (cf. Exercício 7).

Em ambos os casos (n par ou n ímpar), quando $|x|$ cresce ilimitadamente, $|p(x)|$ também cresce ilimitadamente.

Na Figura (11.1) são esboçados gráficos de polinômios do primeiro, segundo, terceiro e quarto graus. Em cada caso, pode-se dizer logo qual o sinal do coeficiente do termo de mais alto grau.

2) Sejam p e q dois polinômios. Se o grau de p é maior do que o grau de q então, para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$. Mais ainda, a diferença entre $|p(x)|$ e $|q(x)|$ pode tornar-se tão grande quanto se queira, desde que se tome $|x|$ suficientemente grande (cf. Exercício 8).

Um exemplo extremamente simples desta situação ocorre com os polinômios $p(x) = x^2$ e $q(x) = x^6$. Quando $0 < |x| < 1$, x^6 é menor do que x^2 mas, para

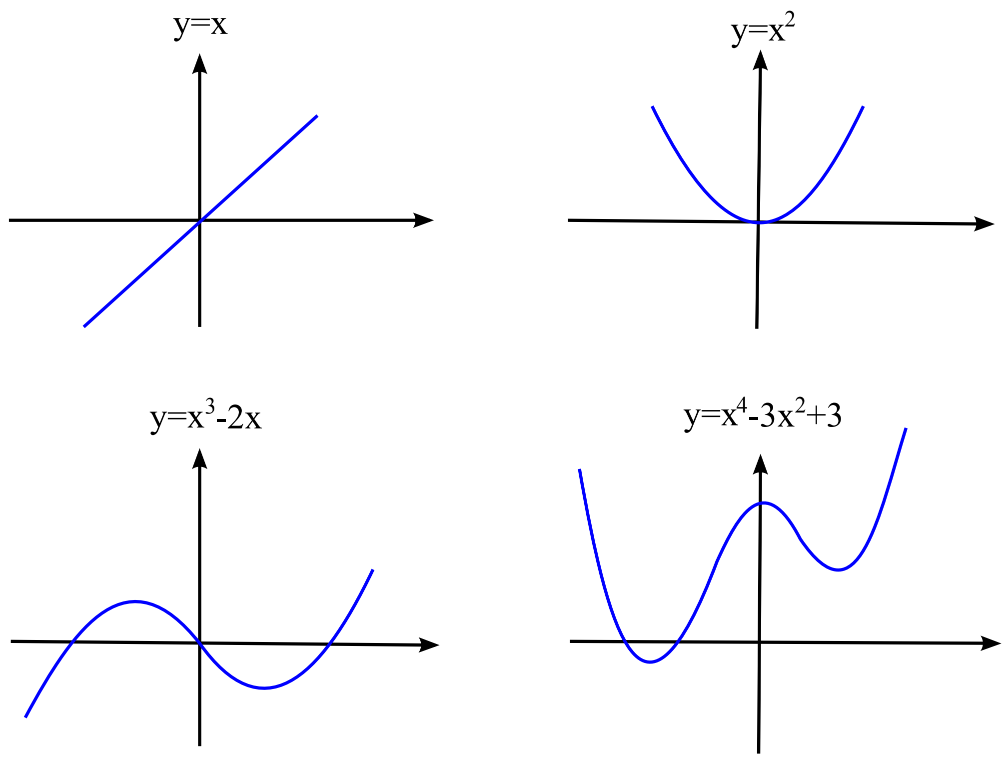


Figura 12.1: Gráficos de polinômios.

$|x| > 1$, x^6 supera x^2 e, quando $|x|$ é bastante grande, x^6 é muito, muito maior do que x^2 (ver Figura 11.2).

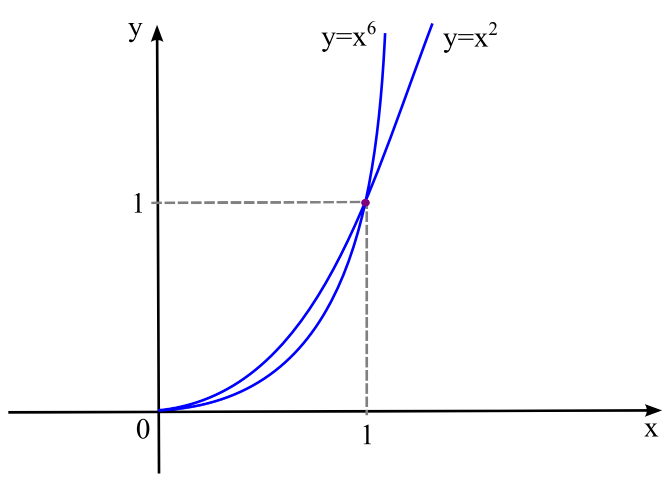


Figura 12.2: Os gráficos de $y = x^n$.

3) Seja p um polinômio e sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$. Se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então

p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2. Este fato segue do *Teorema do Valor Intermediário*, que pode ser encontrado em [?, p. 77]. Note que ele assegura que todo polinômio de grau ímpar possui ao menos uma raiz real (cf. Exercício 6). Mas como localizar alguma dessas raízes?

As raízes dos polinômios de grau 2 foram expressas em função dos coeficientes há milênios. Durante a Renascença (meados do século 16) foram obtidas fórmulas para exprimir, mediante radicais, as raízes dos polinômios de terceiro e quarto graus em função dos coeficientes. Na verdade, essas fórmulas têm pouco mais do que mero valor teórico; são demasiadamente complicadas para serem de uso computacional.

Os métodos que se usam atualmente para determinar uma raiz do polinômio p localizada no intervalo $[a, b]$, quando se sabe que $p(a)$ e $p(b)$ têm sinais opostos, não se baseiam em fórmulas fechadas, como as que foram obtidas para as equações de grau $\leqslant 4$. Em vez disso, esses métodos se baseiam em *algoritmos aproximativos*, os quais instruem, passo a passo, como proceder para obter uma sequência de números $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tais que os valores $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ estão cada vez mais próximos de zero.

Um exemplo de algoritmo grandemente eficiente para obter uma raiz da equação $p(x) = 0$ é o *método de Newton*. Segundo este método, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de números reais obtidos pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)},$$

tem como limite uma raiz de p. Os termos x_n desta sequência se aproximam bastante rapidamente do limite. Um caso particular do método de Newton já era conhecido pelos babilônios, que calculavam a raiz quadrada de um número positivo a (ou seja, uma raiz da equação $x^2 - a = 0$) tomando um valor inicial x_1 e, a partir dele, construir as aproximações $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de $\sqrt{a}$ pela fórmula iterativa

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).$$

Observação: No denominador da fórmula de Newton, $p'(x)$ representa a derivada do polinômio

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

a qual é, por definição,

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Exemplo 1

Mostraremos agora como é eficiente o método de Newton para achar raízes reais de uma equação algébrica. Para isso, consideremos a equação $p(x) = 0$ onde $p(x) = x^5 - 5x^2 + 1$. Então $p'(x) = 5x^4 - 10x$. Começamos observando que $p(1) = -3$ é negativo enquanto que $p(2) = 13$ é positivo, logo deve haver uma raiz real de p entre 1 e 2. Para achar essa raiz, tomamos $x_0 = 2$ como ponto de partida. Obtemos sucessivamente

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 2 - \frac{13}{60} = 1,783,$$
$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 1,783 - \frac{3,124}{32,703} = 1,687,$$
$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)} = 1,687 - \frac{0,434}{23,627} = 1,667.$$

Com paciência e uma calculadora, poderíamos prosseguir, mas não há necessidade. 1,668 é uma excelente aproximação para a raiz procurada, pois $p(1,668)$ é menor do que 1 milésimo. Uma aproximação melhor para a raiz procurada seria 1,667977989, tão próxima do valor que obtivemos que não compensa o esforço de prosseguir o cálculo. De um modo geral, no método de Newton, cada aproximação obtida tem o dobro de dígitos exatos da aproximação anterior. Para mais detalhes teóricos, o leitor pode consultar [13]. E para exercitar-se em contas, notando que $p(0) > 0$ e $p(1) < 0$, pode procurar a raiz de $p(x) = x^5 - 5x^2 + 1$ localizada entre 0 e 1.

12.5 Exercícios Recomendados

1. Sejam $P(x)$ e $p(x)$ polinômios não identicamente nulos tais que gr $P(x) \geqslant$ gr $p(x)$. (Onde gr significa o grau do polinômio.) Prove que existe um polinômio $q(x)$ tal que gr $[P(x) - p(x)q(x)] <$ gr $P(x)$. Usando repetidamente este fato, mostre que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = p(x)q(x) + r(x)$, com gr $r(x) <$ gr $p(x)$. Os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, tais que $P(x) = p(x)q(x)+r(x)$ com gr $r(x) <$ gr $p(x)$, chamam-se respectivamente o *quociente* e o *resto* da divisão de $P(x)$ por $p(x)$.

2. Prove a unicidade do quociente e do resto, isto é, se $P(x) = p(x)q_1(x) + r_1(x)$ e $P(x) = p(x)q_2(x)+r_2(x)$, com gr $r_1(x)$ e gr $r_2(x)$ ambos menores do que gr $p(x)$, então $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Diz-se que o número real α é uma raiz de *multiplicidade* m do polinômio $p(x)$ quando se tem $p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. (Se $m = 1$ ou $m = 2$, α chama-se respectivamente uma *raiz simples* ou uma *raiz dupla*.) Prove que α é uma raiz simples de $p(x)$ se, e somente se, tem-se $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$. Prove também que α é uma raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$. Generalize.

4. Certo ou errado? α é raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, é raiz simples de $p'(x)$.

5. Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p(3) = 4$ e $p(4) = 3$.

6. Seja $p(x)$ um polinômio cujo grau n é um número ímpar. Mostre que existem números reais x_1 e x_2 tais que $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$. Conclua daí que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

7. Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_0 \neq 0$.

   a) Prove que se n é par, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para $|x|$ suficientemente grande.

   b) Prove que se n é ímpar, $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n para valores positivos muito grandes de x e tem sinal oposto de a_n para valores negativos de x para os quais $|x|$ é muito grande.

c) Conclua de (a) e (b) que $|p(x)|$ cresce ilimitadamente, indiferentemente, n é par ou ímpar, quando $|x|$ cresce ilimitadamente.

8. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ dois polinômios. Se gr $p(x) >$ gr $q(x)$, então para todo x com valor absoluto suficientemente grande, tem-se $|p(x)| > |q(x)|$.

9. Mostre que se n é um número par então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raiz real.

10. Tomando $x_0 = 3$, use a relação de recorrência

$$x_{n-1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{5}{x_n}\Big)$$

para calcular $\sqrt{5}$ com três algarismos decimais exatos. (Por exemplo, sabemos que 1,414 é uma aproximação de $\sqrt{2}$ com três algarismos decimais exatos porque $1,414^2 < 2 < 1,415^2$.)

11. Usando o método de Newton, estabeleça um processo iterativo para calcular $\sqrt[3]{a}$ e aplique-o a fim de obter um valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 14, 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010. 2

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996. 3

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974. 4

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010. 2

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012. 7

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 12

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária. 11

13

Introdução às Funções Exponenciais

Sumário

12.1 Introdução 2

12.2 Funções Polinomiais vs Polinômios 4

12.3 Determinando um Polinômio a Partir de Seus Valores 6

12.4 Gráficos de Polinômios 8

12.5 Exercícios Recomendados 12

13.1 Introdução

Nesta unidade, daremos início ao estudo das funções exponenciais, introduzindo-as por meio de uma propriedade relativa à sua variação. Nas unidades seguintes, veremos como essa propriedade caracteriza uma família de funções que serão estudadas.

Como já foi discutido na Unidade 9, as funções afins podem ser caracterizadas como aquelas para as quais a variação da variável dependente depende somente da variação da variável independente. Assim, dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que f é afim se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+h) - f(x) = a\,h$ para qualquer variação h da variável x. Dizemos que esta é uma *caracterização* das funções afins, pois todas as funções afins, e nenhuma outra, têm essa propriedade.

Nesta unidade, começamos a discutir uma caracterização para a função exponencial com base na ideia de variação como segue:

Para cada variação da variável independente h fixada, a variação correspondente da variável dependente $f(x+h) - f(x)$ é proporcional ao valor da própria variável dependente $f(x)$, sendo a constante de proporcionalidade dependente de h.

Equivalentemente, podemos dizer que a razão $\dfrac{f(x+h)}{f(x)}$ depende apenas de h, e não de x. Uma importante consequência para o cálculo infinitesimal é que as funções exponenciais são aquelas para as quais a *taxa de variação instantânea* (isto é, a derivada) é proporcional ao valor da própria função.

Essas propriedades podem ser percebidas intuitivamente em situações em que uma grandeza varia em função do tempo de tal forma que o acréscimo sofrido a partir de um determinado instante é proporcional ao valor da própria grandeza naquele instante – este é o caso, por exemplo, dos juros compostos e do decaimento radioativo, tratados nesta unidade. As demonstrações para essas propriedades serão dadas nas próximas unidades.

Na Seção 3, discute-se a extensão da definição de exponenciação com expoente natural, que se baseia na ideia de "multiplicação de fatores repetidos", para expoentes inteiros, em primeiro lugar, e depois expoentes racionais.

Evidentemente, a definição de exponenciação com base na ideia de multiplicação de fatores repetidos não pode ser generalizada nem para expoentes inteiros negativos, nem para expoentes racionais. Em ambos os casos, as definições generalizadas são as únicas possíveis, de modo a preservar as propriedades fundamentais da exponenciação.

No final da Seção 3, é demonstrado um Lema que será importante para a extensão da exponencial para expoentes reais, que será discutida na próxima unidade.

Veremos que as extensões da exponenciação de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$ e de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$ são baseadas em propriedades algébricas. Entretanto, a extensão de $\mathbb{Q}$ para $\mathbb{R}$ envolve necessariamente alguma ideia de continuidade ou convergência, o que torna este passo conceitualmente mais delicado.

13.2 Dois Exemplos Fundamentais

Vimos na Unidade 9 que se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, então o acréscimo $f(x+h) - f(x)$, sofrido por f, quando se passa de x para $x+h$, depende apenas do acréscimo h dado a x mas não depende do próprio valor de x. Isto é óbvio, uma vez que $f(x) = ax + b$ implica $f(x+h) - f(x) = ah$. O mais importante, tendo em vista as aplicações, é que quando f é monótona crescente, ou decrescente, vale a recíproca: se $f(x+h) - f(x)$ não depende de x, então f é afim.

O Exemplo 1 da Unidade 9 dizia respeito a uma quantia x, investida durante um prazo fixo e determinado, gerando no final desse período o valor $f(x)$. Constatou-se ali que $f(x)$ é uma função linear de x.

Exemplo 1

Consideraremos agora uma situação, mais vantajosa para o investidor do que a anterior, em que uma quantia c_0 é aplicada a juros fixos, capitalizados continuamente.

Se chamarmos de $c(t)$ o capital gerado a partir daquela quantia inicial depois de decorrido o tempo t, é claro que $c(t)$ é uma função crescente de t.

Notamos ainda que se $t < t'$ então o acréscimo $c(t'+h) - c(t')$, experimentado pelo capital após o decurso de tempo h, a partir do momento t', é maior do que o rendimento $c(t+h) - c(t)$ depois de decorrido o mesmo tempo h, a partir do momento anterior t, pois o capital acumulado $c(t')$, sendo maior do que $c(t)$, deve produzir maior renda.

Assim, $c(t)$ não é uma função afim de t, já que $c(t+h)-c(t)$ depende não apenas de h mas de t também. Esta conclusão negativa indica que se deve buscar outro instrumento matemático, diferente da função afim, para modelar a presente situação.

Analisando este problema mais detidamente, vemos que podemos considerar a diferença $c(t+h)-c(t)$ como o lucro obtido quando se investiu a quantia $c(t)$ durante o prazo h. Portanto, como vimos acima, $c(t+h)-c(t)$ deve ser proporcional à quantia aplicada $c(t)$, ou seja, $c(t+h)-c(t)=\varphi\cdot c(t)$, onde o fator de proporcionalidade $\varphi=\varphi(h)$ depende evidentemente do prazo h. A afirmação de que $\varphi(h)=[c(t+h)-c(t)]/c(t)$ não depende de t é a expressão matemática do fato de que os juros são fixos. Como $[c(t+h)-c(t)]/c(t)=[c(t+h)/c(t)]-1$, esta afirmação equivale a dizer que o quociente $c(t+h)/c(t)$ não depende de t.

Portanto, quando os juros são fixos, se $c(t_1+h)/c(t_1)=2$, por exemplo, então $c(t_2+h)/c(t_2)=2$ para qualquer t_2 (e o mesmo h). Isto quer dizer que o tempo h necessário para que um capital seja dobrado é o mesmo em todas as ocasiões e para qualquer valor desse capital, pequeno ou grande.

Vemos então que o modelo matemático conveniente para descrever a variação de um capital aplicado a juros fixos, em função do tempo, deve ser uma função crescente $c(t)$ tal que o acréscimo relativo $[c(t+h)-c(t)]/c(t)$ dependa apenas de h mas não de t.

Conforme será estabelecido futuramente, as únicas funções com estas propriedades são as da forma $c(t)=c_0\cdot a^t$.

Uma situação análoga ocorre quando se estuda a desintegração radioativa, conforme veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2

Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio e o urânio, por exemplo) tendem a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se noutra substância. As partículas emitidas não alteram consideravelmente a massa total do corpo mas, com o passar do tempo, a quantidade da substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto ocorre de tal modo que, em cada instante, a quantidade de matéria que se está desintegrando naquele momento é proporcional à massa da substância original que ainda resta.

Assim sendo, se chamarmos (como fazem os cientistas) de *meia-vida* de uma substância radioativa o tempo necessário para que se desintegre a metade da massa de um corpo formado por aquela substância, constatamos que a meia-vida é um número intrinsecamente associado a cada substância radioativa: o tempo necessário para reduzir à metade a radioatividade de uma tonelada de urânio é igual ao tempo que leva um grama da mesma substância para ter sua metade desintegrada.

A propósito: os vários isótopos do urânio têm meia-vida da ordem de 10^9 anos. Enquanto isso, a meia-vida do rádio 224 é de 3 dias e 15 horas.

De um modo geral, se designarmos por $m = m(t)$ a massa da substância radioativa presente no corpo no instante t, veremos que m é uma função decrescente de t e, além disso, a perda relativa $[m(t+h) - m(t)]/m(t)$, ocorrida após o decurso do tempo h, depende apenas de h mas não do instante inicial t, ou seja, da massa $m(t)$ existente naquela ocasião.

Outra vez constatamos a necessidade de uma função real de variável real $m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que seja monótona (desta vez, decrescente) e tal que a variação relativa $[m(t+h) - m(t)]/m(t)$ dependa apenas de h. Ou, equivalentemente, que a razão $m(t+h)/m(t)$ não dependa de t, mas somente de h.

Mostraremos na próxima unidade que as únicas funções com essas propriedades são as do tipo $m(t) = b.a^t$ (com $0 < a < 1$). Os exemplos que acabamos de mencionar ilustram algumas das inúmeras situações em que ocorrem as funções do tipo exponencial, que estudaremos agora.

Começaremos nosso estudo com uma revisão das potências com expoente racional.

13.3 Potências de Expoente Racional

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, põe-se $a^1 = a$, por definição.

A definição indutiva de a^n é: $a^1 = a$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de $m + n$ fatores iguais a a. Segue-se então que, para $m_1, m_2, \ldots, m_k$ quaisquer em $\mathbb{N}$, vale

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \cdots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_k}.$$

Em particular, se $m_1 = \cdots = m_k = m$, temos $(a^m)^k = a^{mk}$.

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos $a^{n+1} > a^n$. Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots .$$

Além disso,

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots ,$$

como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto, a sequência cujo n-ésimo termo é a^n é crescente quando $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

Existem sequências crescentes que são limitadas superiormente. Um exemplo disso é a sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

onde se tem

$$\frac{n}{n+1} < 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entretanto, *se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente, isto é, nenhum número real c, por maior que seja, pode ser superior a todas as potências a^n.* Noutras palavras, dado arbitrariamente $c \in \mathbb{R}$, pode-se sempre achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n > c$.

Para provar isto, escrevemos $a = 1 + d$, $d > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli[1] temos $a^n > 1 + nd$. Logo, se tomarmos $n > (c-1)/d$, teremos $1 + nd > c$ e, com maior razão, $a^n > c$.

[1]A desigualdade diz exatamente que se $d > 0$, então $(1+d)^n > 1+nd$ para todo número natutal $n \geqslant 2$. Deixamos como exercício a demonstração por indução dessa desigualdade.

Exemplo 3

Seja $a = 1,000001$ (um inteiro e um milionésimo). As potências sucessivas $a, a^2, a^3, \ldots$, a princípio próximas de 1, podem tornar-se tão grandes quanto se deseje, desde que o expoente seja tomado suficientemente grande. Se usarmos o argumento acima para obter uma potência de a que seja superior a 1 bilhão, devemos tomar um expoente da ordem de 10^{14}. Na realidade, usando uma calculadora, vemos que para ter $(1,000001)^n >$ um bilhão, basta tomar $n > 21$ milhões. E que, ao demonstrarmos que as potências sucessivas de um número maior do que 1 crescem acima de qualquer número real pré-fixado, nos preocupamos mais em usar um raciocínio simples e claro do que obter o menor expoente possível.

Para exprimir que a sequência crescente (a^n) é ilimitada superiormente (supondo $a > 1!$), escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

e dizemos que a^n tende ao infinito quando n cresce indefinidamente.

De modo análogo, se $0 < a < 1$ então as potências sucessivas $a, a^2, a^3, \ldots$ decrescem abaixo de qualquer cota positiva: fixado arbitrariamente um número $c > 0$, por menor que seja, pode-se sempre achar um expoente $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < c$.

Com efeito, sendo $0 < a < 1$, se escrevermos $b = 1/a$, teremos $b > 1$. Logo, pelo que acabamos de ver, podemos achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > 1/c$, ou seja, $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{c}$, donde $a^n < c$.

Este resultado significa que, quando $0 < a < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$$

(A expressão $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ lê-se "o limite de a^n, quando n tende ao infinito, é igual a zero").

Procuremos agora atribuir um significado à potência a^n, quando n é um número inteiro (que pode ser negativo ou zero). Isto deve ser feito de modo que seja mantida a regra fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Em primeiro lugar, qual deve ser o valor de a^0 ? Como a igualdade $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1}$ deve ser válida, teremos $a^0 \cdot a = a$. Logo a única definição possível é $a^0 = 1$.

Em seguida, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, devemos ter $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, assim, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Portanto, se quisermos estender o conceito de potência do número real $a > 0$, para admitir expoentes inteiros quaisquer e ainda preservar a igualdade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, a única definição possível consiste em pôr $a^0 = 1$ e $a^{-n} = 1/a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in \mathbb{Z}$, além de cumprir a igualdade fundamental

$$f(m+n) = f(m) \cdot f(n),$$

é ainda crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Em particular, para $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $a^{-n} < 1 < a^n$ e, para $0 < a < 1$, tem-se $a^n < 1 < a^{-n}$, pois $-n < 0 < n$ e $a^0 = 1$.

De $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ segue-se que $(a^m)^n = a^{mn}$ ainda quando m, $n \in \mathbb{Z}$.

Prosseguindo, vejamos que sentido pode ser dado à potência a^r quando $r = m/n$ é um número racional (onde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), de modo que continue válida a regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, onde s é também um número racional. Desta igualdade resulta, que se deve ter, para $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \cdots \cdot a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Portanto a^r é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual a a^m. Por definição de raiz, este número é $\sqrt[n]{a^m}$, a raiz n-ésima de a^m. Assim, a única maneira de definir a potência a^r, com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, consiste em pôr

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Depois de dar esta definição, há alguns detalhes que devem ser examinados. Em primeiro lugar, como se tem $m/n = mp/np$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso mostrar que $\sqrt[n]{m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ a fim de que a definição não seja ambígua. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$. E finalmente, cumpre provar que a função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Esses fatos são deixados como exercícios a cargo do leitor.

Dado $a > 0$, a função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetiva. Noutras palavras, fixado $a > 0$, nem todo número real positivo é da forma a^r com r racional. Isto fica evidente se observarmos que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, o mesmo deve ocorrer com sua imagem $f(\mathbb{Q})$, porém $\mathbb{R}^+$ não é enumerável. De um modo mais elementar, este fato pode ser ilustrado mediante um exemplo. Tomemos $a = 10$ e indaguemos se existe algum número racional $r = m/n$ tal que $10^{m/n} = 11$ ou seja, tal que $10^m = 11^n$, onde m, $n \in \mathbb{N}$. É claro que, para qualquer $m \in \mathbb{N}$, 10^m se escreve como 1 seguido de m zeros enquanto 11^n não pode ter esta forma. Logo o número real positivo 11 não pertence à imagem da função $r \mapsto 10^r$, de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^+$.

As potências a^r, com expoente racional, embora não contenham todos os números reais positivos, estão espalhadas por toda parte em $\mathbb{R}^+$, desde que seja $a \neq 1$. Noutras palavras, $\{a^r;\ r \in \mathbb{Q}\}$ é denso em $\mathbb{R}^+$. Este é o conteúdo do lema abaixo. A demonstração do mesmo, embora elementar, é um tanto técnica e pode ser omitida numa primeira leitura.

Lema 1

Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

☞ Para Saber Mais - Demonstração do Lema - Clique para ler

Exercícios Recomendados

1. Como você explicaria a um aluno no Ensino Fundamental que $a^0 = 1$? E que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$?

2. Como você explicaria a um aluno no Ensino Fundamental que $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$? E que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$?

3. Mostre que para todo $p \in \mathbb{N}$, tem-se que $\sqrt[n]{m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$.

4. Mostre que a função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida por $f(r) = a^r$ é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

5. Uma alga cresce de modo que, em cada dia, ela cobre uma superfície de área igual ao dobro da coberta no dia anterior. Se esta alga cobre a superfície de um lago em 100 dias, qual é o número de dias necessários para que duas algas, da mesma espécie da anterior, cubram a superfície do mesmo lago? E se forem quatro algas? Você consegue responder a esta pergunta para 3 algas?

13.4 Textos Complementares

Para Saber Mais

Demonstração do Lema

Dados $0 < \alpha < \beta$, devemos achar $r \in \mathbb{Q}$ tal que a potência a^r pertença ao intervalo $[\alpha, \beta]$, isto é, $\alpha \leqslant a^r \leqslant \beta$. Por simplicidade, suporemos a e α maiores do que 1. Os demais casos podem ser tratados de modo análogo. Como as potências de expoente natural de números maiores do que 1 crescem acima de qualquer cota pré-fixada, podemos obter números naturais M e n tais que

$$\alpha < \beta < a^M \quad \text{e} \quad 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n.$$

Da última relação decorrem sucessivamente

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \quad \text{e} \quad 0 < a^M(a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha.$$

Logo, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\frac{m}{n} \leqslant M$, então

$$0 < a^{\frac{m}{n}}(a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha.$$

Assim, as potências

$$a^0 = 1,\ a^{1/n},\ a^{2/n},\ \ldots,\ a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que o comprimento $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. Como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos, digamos $a^{\frac{m}{n}}$, está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$.

14

Função Exponencial

Sumário

13.1 Introdução 2

13.2 Dois Exemplos Fundamentais 3

13.3 Potências de Expoente Racional 5

13.4 Textos Complementares 11

14.1 Introdução

Nesta unidade, continuaremos o estudo de funções exponenciais que iniciamos na unidade anterior, onde foi apresentada a definição da exponenciação apenas para expoentes racionais.

Na Seção 2, é discutida a sua extensão para expoentes reais, necessária para que possamos definir a função exponencial com domínio em $\mathbb{R}$. Fazer essa extensão significa que, para $a > 0$ fixado, devemos definir uma função f, com domínio em $\mathbb{R}$, que satisfaça para quaisquer x e y em $\mathbb{R}$ as propriedades fundamentais:

(1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$;

(3) $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando} \;\; a > 1 \\ a^y < a^x, & \text{quando} \;\; 0 < a < 1. \end{cases}$

Em primeiro lugar, observaremos que tal função é estritamente positiva. Portanto, poderemos definir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Além disso, para $r \in \mathbb{Q}$, a função coincidirá com a exponenciação a^r, já definida.

Por outro lado, fixado $a > 1$ (o caso $0 < a < 1$ é análogo), graças à monotonicidade da exponencial em $\mathbb{Q}$, mostraremos que, dado x irracional, existe um único número real y com a seguinte propriedade:

$$\forall r, s \in \mathbb{Q}, \quad r < x < s \quad \Rightarrow \quad a^r < y < a^s.$$

Poderemos então definir $a^x = y$. Assim, ficará bem definida uma função f que satisfaz as propriedades (1), (2) e (3). A partir daí, poderemos estabelecer as outras propriedades importantes da função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, como continuidade, injetividade, sobrejetividade e limites em $\pm\infty$.

Com relação ao gráfico da função exponencial, recomendamos particular atenção à comparação entre funções exponenciais e polinomiais:

O crescimento exponencial, quando $a > 1$, supera o de qualquer polinômio.

No Ensino Médio, gráficos de funções exponenciais são muitas vezes traçados de forma displicente, como se fossem arcos de parábola. Entretanto, é importante observar que o crescimento exponencial é *qualitativamente bastante diferente do crescimento polinomial*. Para entender bem esta diferença qualitativa, releia a discussão sobre variação da função exponencial na unidade anterior, caracterizada pela propriedade:

O crescimento exponencial se caracteriza pelo fato de que a variação da variável dependente é proporcional ao seu próprio valor.

Na Seção 3, são demonstradas duas formas de caracterizar este tipo de função. A primeira diz respeito a suas propriedades algébricas, e a segunda envolve a ideia de variação. Ao ler essas demonstrações, preste atenção na importância da hipótese de monotonicidade (que pode ser substituída por continuidade) e do lema de densidade provado na unidade anterior.

14.2 A Função Exponencial

Seja a um número real positivo diferente de 1. A *função exponencial* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de base a, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades fundamentais. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $a^x . a^y = a^{x+y}$;

(2) $a^1 = a$;

(3) $x < y \Rightarrow \begin{cases} a^x < a^y, & \text{quando } a > 1 \\ a^y < a^x, & \text{quando } 0 < a < 1. \end{cases}$

É interessante observar que se uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) acima, isto é, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, então f não pode assumir o valor 0, a menos que seja identicamente nula. Com efeito, se existir algum $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0,$$

logo f será identicamente nula.

Mais ainda, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade (1) e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Assim, diante da propriedade (1), tanto faz dizer que o contradomínio de f é $\mathbb{R}$ como dizer que é $\mathbb{R}^+$. A vantagem de tomar $\mathbb{R}^+$ como contradomínio é que se terá f sobrejetiva, como veremos.

Se uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades (1) e (2), então para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdots f(1) = a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Usando a propriedade (1), resulta daí, como mostramos na unidade anterior, que para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, deve-se ter

$$f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Portanto, $f(r) = a^r$ é a única função $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer r, $s \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = a$.

A propriedade (3), válida em $\mathbb{Q}$, diz que a função exponencial dada por $f(r) = a^r$ para $r \in \mathbb{Q}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resulta que existe uma única maneira de definir o valor $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Para fixar as ideias, suporemos $a > 1$. Então $y = a^x$ tem a seguinte propriedade:

$$\forall r, s \in \mathbb{Q}, \quad r < x < s \quad \Rightarrow \quad a^r < y < a^s.$$

Ou seja, a^x é um número real cujas aproximações por falta são a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$ (admitiremos a existência de tal número como consequência da completeza do conjunto $\mathbb{R}$).

Não podem existir dois números reais diferentes, digamos $A < B$, com a propriedade acima. Se existissem tais A e B teríamos

$$\forall r, s \in \mathbb{Q}, \quad r < s, \quad \Rightarrow \quad a^r < A < B < a^s.$$

Então, o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, contrariando o lema da Unidade 13.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor do que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior do que x.

Definindo a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, deixamos como exercício verificar que, de fato, são válidas as propriedades (1), (2) e (3) acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda

(4) *A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.*

Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o lema da Unidade 13. Mais precisamente, se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absoluto grande.

(5) *A função exponencial é contínua.*

Isto significa que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0. Dito de outro modo: o limite de a^x quando x tende a x_0 é igual a a^{x_0}. Em símbolos: $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Esta afirmação pode ser provada assim: escrevemos $x = x_0 + h$, logo $x - x_0 = h$ e então $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$. Ora, pode-se mostrar que a^h pode ser tornado tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que tomemos h suficientemente pequeno (veja Exercício 3). Como a^{x_0} é constante, podemos fazer o produto $a^{x_0}|a^h - 1|$ tão pequeno quanto o queiramos. Isto implica que $\lim_{x \to x_0} |a^x - a^{x_0}| = 0$, ou seja, $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

(6) *A função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.*

Esta afirmação quer dizer que para todo número real $b > 0$ existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = b$. (Todo número real positivo é uma potência de a.) Para prová-la, usamos o lema da unidade anterior e escolhemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^{r_n}| < 1/n$. Portanto $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$. Para fixar as ideias, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \cdots < a^{r_n} < \cdots < b.$$

Certamente, podemos fixar $s \in \mathbb{Q}$ tal que $b < a^s$. Então a monotonicidade da função a^x nos assegura que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < s$.

Assim, (r_n) é uma sequência monótona, limitada superiormente por s. A completeza de $\mathbb{R}$ garante então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n \to \infty} r_n = x$. A função exponencial sendo contínua garante que $a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = b$ como queríamos demonstrar.

Portanto, provamos o resultado a seguir:

Para todo número real positivo a, diferente de 1, a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional de transformar somas em produtos, isto é, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Observamos que a injetividade da função $x \mapsto a^x$ decorre da sua monotonicidade. De fato, se $a > 1$, por exemplo, então $x > y \Rightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Rightarrow a^x < a^y$. Portanto, $x \neq y \Rightarrow a^x \neq a^y$.

Tem-se ainda

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1,\\
&\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad 0 < a < 1,\\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{se} \quad a > 1 \quad \text{e}\\
&\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad \text{se} \quad 0 < a < 1.
\end{aligned}$$

A figura exibe o gráfico de $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

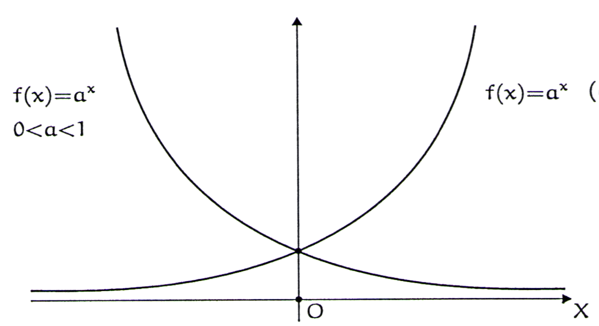


Figura 14.1: Gráfico da função exponencial

Quando $a > 1$, nota-se que, quando x varia da esquerda para a direita, a curva exponencial $y = a^x$ apresenta um crescimento bastante lento enquanto x é negativo. A medida que x cresce, o crescimento de y se torna cada vez mais acelerado. Isto se reflete na inclinação da tangente ao gráfico; para valores positivos muito grandes de x, a tangente é quase vertical. O crescimento exponencial supera o de qualquer polinômio. Se compararmos o gráfico de

$y = 2^x$ (por exemplo) com o de $y = x^{10}$, veremos que, para $0 < x < 1,077$ temos $x^{10} < 2^x$. Para $1,077 < x < 58,77$ tem-se $x^{10} > 2^x$ e, para todo $x > 58,77$ tem-se sempre $2^x > x^{10}$.

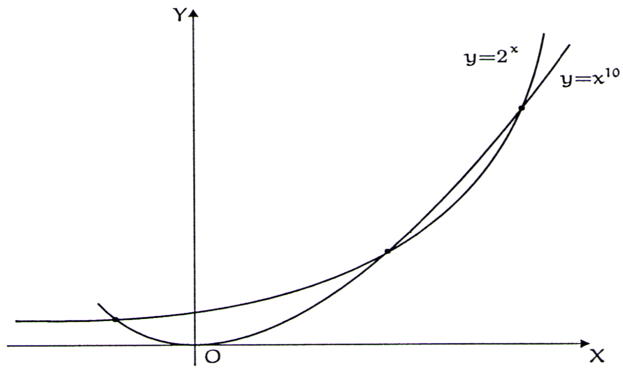


Figura 14.2: Comparando gráficos de polinômios e exponenciais

14.3 Caracterização da Função Exponencial

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares. As funções afins ocorrem em praticamente todos os problemas durante os nove primeiros anos da escola e, com menos exclusividade, porém ainda com grande destaque, nos três anos finais. Por sua vez, as funções quadráticas e exponenciais aparecem nesses três últimos anos, embora tenham, principalmente as últimas, importância considerável na universidade, bem como nas aplicações de Matemática em atividades científicas ou profissionais.

Uma vez decidido que o modelo adequado para um determinado problema é uma função afim, quadrática ou exponencial, a partir daí o tratamento matemático da questão não oferece maiores dificuldades. As dúvidas que possam surgir acontecem geralmente, antes, na escolha do instrumento matemático apropriado para o problema que se estuda. Para que essa escolha possa ser feita corretamente, é preciso saber quais são as propriedades características de cada tipo de função. Nas Unidades 9 e 10, vimos propriedades que caracterizam as funções afins e quadráticas. Vamos agora fazer o mesmo com as funções exponenciais.

Teorema 1
Caracterização da Função Exponencial

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;

(3) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. A fim de mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos inicialmente que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), tem-se $f(rx) = f(x)^r$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $(1) \Rightarrow (2)$ suponhamos, a fim de fixar as ideias, que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ seria tratado analogamente). Então, pelo lema da Unidade 13, existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As implicações restantes, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são óbvias.

☞ Para Saber Mais - Caracterização pela Continuidade - Clique para ler

Dizemos que uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de tipo exponencial então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, os quocientes

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)} = a^h - 1 \quad \text{e} \quad \frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

dependem apenas de h, mas não de x. Mostraremos agora que vale a recíproca.

Teorema 2
Caracterização das funções de tipo exponencial

Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). Suponhamos que, para quaisquer x e h em $\mathbb{R}$, o acréscimo relativo $[g(x+h)-g(x)]/g(x)$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

☞ Para Saber Mais - Demontração do Teorema - Clique para ler

14.4 Funções Exponenciais e Progressões

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, uma função de tipo exponencial. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1},\ f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^h, pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h.$$

Como o $(n+1)$-ésimo termo da progressão aritmética dada é $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue-se que $f(x_{n+1}) = f(x_1) \cdot A^n$, onde $A = a^h$. Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, logo $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$.

Esta simples observação é usada na prática para "discretizar" a análise das situações, como aquelas apresentadas na Seção 2 da Unidade 13, em que se tem crescimento ou decrescimento exponencial.

Por exemplo, se um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital existente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tirarmos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, \ldots$ teremos $c(0) = c_0$, $c(h) = c_0 A$,

$c(2h) = c_0 \cdot A^2$, $c(3h) = c_0 \cdot A^3, \ldots$ onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica:

$$c_0,\ c_0 \cdot A,\ c_0 \cdot A^2,\ c_0 \cdot A^3, \ldots.$$

Esta propriedade é característica das funções de tipo exponencial, conforme o resultado a seguir.

Teorema 3 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, onde $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

☞ Para Saber Mais - Prova do Teorema - Clique para ler

Exercícios Recomendados

1. Como vimos nesta unidade, a definição da função exponencial real envolve uma noção de *convergência*, ou de *continuidade*. Evidentemente, estes conceitos não são adequados para o Ensino Médio. Entretanto, podemos introduzir uma ideia intuitiva do significado de a^x, com x irracional, com base em uma noção de *aproximação*, com o apoio da calculadora ou do computador. Elabore uma atividade para explicar aos seus alunos no Ensino Médio o significado de 2^π(por exemplo).

2. Esboce os gráficos das funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo (sem usar técnicas de cálculo diferencial).

(a) $f(x) = 2^{x^2}$;

(b) $f(x) = 2^{-x^2}$;

(c) $f(x) = 2^{1-x^2}$;

(d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$;

(e) $f(x) = 2^x - 3$;

(f) $f(x) = 3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

3. Sabendo-se que os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ se intersectam em um ponto de abscissa 3, determine o número a.

4. Resolva as seguintes inequações exponenciais:

(a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$;

(b) $2^x - 1 > 2^{1-x}$;

(c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5 \cdot 2^x + 2 > 0$.

5. Mostre que $\lim_{h\to 0} a^h = 1$.

14.5 Textos Complementares

Para Saber Mais

Caracterização pela Continuidade

O Teorema de Caracterização pode ser enunciado de um modo ligeiramente diferente, substituindo a hipótese de monotonicidade pela suposição de que f seja contínua. A demonstração do passo $(1) \Rightarrow (2)$ muda apenas no caso x irracional. Então tem-se $x = \lim_{n\to\infty} r_n, \quad r_n \in \mathbb{Q}$. Logo, pela continuidade de f, deve ser

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x.$$

Para Saber Mais

Demonstração do Teorema

Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que a função $\varphi(h) = g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x) = g(x)/b$, onde $b = g(0)$, f é contínua monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0) = 1$. Então, pondo $x = 0$ na relação $\varphi(h) = f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.

Para Saber Mais

Prova do Teorema

Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x)/b$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = 1/g(x)$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, \ldots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \ldots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n+1)$-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = 1/g(nx) = 1/g(x)^n = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = f(1)/f(0)$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

15

Função Logarítmica

Sumário

14.1 Introdução 2
14.2 A Função Exponencial 3
14.3 Caracterização da Função Exponencial 7
14.4 Funções Exponenciais e Progressões 9
14.5 Textos Complementares 12

15.1 Introdução

Nesta unidade, começamos a estudar as funções logarítmicas, definidas como inversas das funções exponenciais. No começo da Seção 2, são apresentadas as relações algébricas que decorrem diretamente da definição como inversa da função exponencial:

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a \left(a^x\right) = x.$$

É apresentada também a ideia fundamental para o conceito de logaritmo: $\log_a x$ *é o expoente ao qual se deve elevar a base* a *para obter o resultado* x.

Os logaritmos talvez correspondam a um dos tópicos mais artificialmente mistificados no Ensino Médio, devido à ênfase excessiva em procedimentos repetitivos apresentados de forma mecanizada (tais como a resolução de equações logarítmicas por meio de truques algébricos particulares) – em detrimento do enfoque no próprio conceito.

Sendo assim, na abordagem de logaritmos no Ensino Médio, é fortemente recomendada a ênfase na ideia fundamental de que *o logaritmo é o expoente em uma exponenciação*. Esta ideia pode facilitar consideravelmente a compreensão das propriedades e características básicas das funções logarítmicas: propriedades algébricas fundamentais, variação de sinal, limites no infinito e em 0, comportamento gráfico (também estudadas na Seção 2 desta unidade).

É interessante ainda chamar a atenção para o fato de que a propriedade algébrica fundamental dos logaritmos – transformar produtos em soma – está no centro de sua origem histórica. Observe que, sem o auxílio de calculadoras e computadores, com os quais estamos cada vez mais acostumados, efetuar uma multiplicação é muito mais trabalhoso que efetuar uma adição, principalmente no caso de números com muitos algarismos decimais. Por isso, uma ferramenta matemática que permitisse reduzir o trabalho de fazer uma multiplicação ao de uma adição era muito importante no passado.

Outra observação importante, feita na Seção 2, diz respeito ao crescimento da função logarítmica. Ao contrário do caso da função exponencial, o crescimento da função logarítmica é extremamente lento. Por exemplo, no caso da função logarítmica decimal, cada vez que multiplicamos a variável independente por 10, somamos apenas 1 unidade ao valor da variável dependente. De forma mais geral, passos multiplicativos na variável independente de uma função logarítmica correspondem a passos aditivos na variável dependente.

Na Seção 3, é apresentada uma caracterização com base nas propriedades algébricas da função. Observe a importância da hipótese de monotonicidade e da densidade dos racionais na demonstração deste fato.

15.2 Funções Logarítmicas

Vimos na Unidade 14 que, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$, com a propriedade adicional $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se que f possui uma função inversa.

A inversa da função exponencial de base a é a função

$$\log_a \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o *logaritmo* de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{e} \quad \log_a(a^x) = x.$$

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja,

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Segue-se imediatamente da relação $a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ que

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

para x e y positivos quaisquer. Com efeito, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$ então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo

$$xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v},$$

ou seja,

$$\log_a(xy) = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo.

O uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse o sentido. Entretanto, a função logaritmo continua extremamente importante na Matemática e em suas aplicações.

Essa importância é permanente; jamais desaparecerá porque, sendo a inversa da função exponencial (portanto equivalente a ela), a função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado.

A função $\log_a \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$. É importante ressaltar que somente números positivos possuem logaritmo real, pois a função $x \mapsto a^x$ somente assume valores positivos.

As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos *decimais*), base 2 (logaritmos *binários*) e base e (logaritmos *naturais*, às vezes chamados *neperianos*). Estes últimos são os mais adequados cientificamente, e voltaremos a eles logo mais.

Como $\log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$, e como $\log_a 1 = 0$, segue-se que, para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se $0 < a < 1$ então $\log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A Figura 15.1 mostra os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

Se tivéssemos traçado os gráficos das funções $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, as figuras obtidas teriam mesmo aspecto. Mais precisamente, existiriam constantes positivas c, d tais que $\log_a x = c \cdot \log_2 x$ e $\log_b x = d \cdot \log_{1/2} x$ para todo $x > 0$.

Com efeito se $u = \log_a x$ e $v = \log_2 x$ então $a^u = x$ e $2^v = x$. Portanto, se escrevermos $c = \log_a 2$ teremos $a^c = 2$, logo

$$x = a^u = 2^v = (a^c)^v = a^{cv}$$

portanto $u = cv$, isto é, $\log_a x = c \cdot \log_2 x$ para todo $x > 0$, onde a constante

c é igual a $\log_a 2$. A igualdade

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

é válida em geral (mesmo raciocínio) e se chama a *fórmula de mudança de base* para logaritmos. Quando a e b são ambos maiores ou ambos menores do que 1 então $\log_a b > 0$. Se um dos números a, b é maior e o outro é menor do que 1 então $\log_a b < 0$. A fórmula acima diz que duas funções logarítmicas quaisquer diferem por um fator constante.

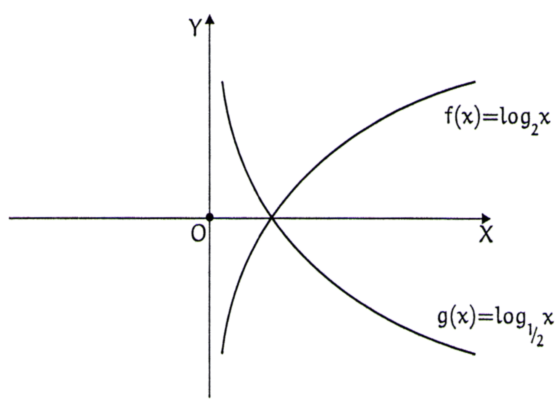


Figura 15.1: Gráficos das funções logarítmicas

Como $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetiva, segue-se que $y = \log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. Mais precisamente, tem-se, para $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty.$$

A primeira destas igualdades significa que se pode dar a $\log_a x$ um valor tão grande quanto se queira, desde que x seja tomado suficientemente grande. A segunda quer dizer que, dado arbitrariamente $A > 0$, tem-se $\log_a x < -A$ desde que x seja um número positivo suficientemente pequeno.

Ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente, $\log_a x$ tende a $+\infty$ muito lentamente quando $x \to +\infty$. Com efeito, dado um número $M > 0$, tem-se $\log_a x > M \Leftrightarrow x > a^M$. Assim, por exemplo, se quisermos que $\log_{10} x$ seja maior do que mil, será preciso tomar um número x cuja expressão decimal tenha pelo menos mil e um algarismos.

Esse crescimento lento do logaritmo, que contrasta com o crescimento rápido da exponencial, é bem ilustrado pelos gráficos das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$, que, como sabemos, são simétricos em relação à diagonal de $\mathbb{R}^2$, pois uma função é a inversa da outra.

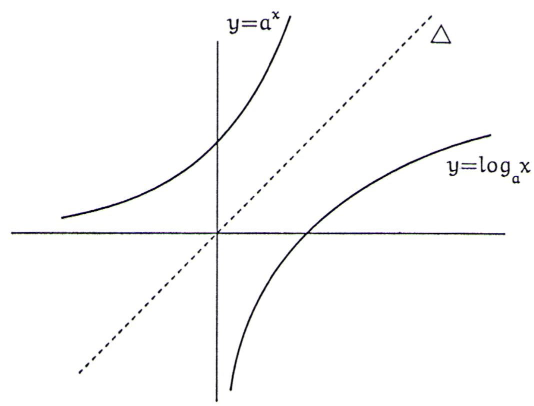


Figura 15.2: Crescimento do logaritmo

15.3 Caracterização das Funções Logarítmicas

Provaremos a seguir que, entre as funções monótonas injetivas de $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produtos em somas. Antes observemos que se $f\colon X \to Y$ é sobrejetiva e $g\colon Y \to X$ é tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então tem-se necessariamente $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$ e $g = f^{-1}$, já que dado qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e, consequentemente,

$$f(g(y)) = f(g(f(x)) = f(x) = y.$$

Assim, se $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é tal que $g(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $g(y) = \log_a y$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$, já que $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in \mathbb{R}^+$ é sobrejetiva (estamos supondo $a > 0$ diferente de 1).

Teorema 1 Caracterização das Funções Logarítmicas

Seja $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Demonstração

Para fixar as ideias, admitamos f crescente. O outro caso é tratado igualmente. Temos $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdots a) \\ &= f(a) + f(a) + \cdots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 = m. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = f(1) &= f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \end{aligned}$$

donde $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

e daí $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$.

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r e s racionais tem-se

$$r < x < s \;\Rightarrow\; a^r < a^x < a^s \;\Rightarrow\; f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior do que x é também maior do que $f(a^x)$. Com isto, $f(a^x) = x$. Caso contrário, $f(a^x) < x$ ou $x < f(a^x)$. Se $f(a^x) < x$, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, existiria $s \in \mathbb{Q}$ com $f(a^x) < r < x$. Como todo racional menor do que x é também menor do que $f(a^x)$, isto não pode ocorrer. De modo análogo, não pode ocorrer $x < f(a^x)$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando $\log_a$ de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente, $g(x) = \log_a x$.

Exercícios Recomendados

1. Use as aproximações $\log_{10} 2 \cong 0,301$, $\log_{10} 3 \cong 0,477$ e $\log_{10} 5 \cong 0,699$ para obter valores aproximados para:

   (a) $\log_{10} 9$

   (b) $\log_{10} 40$

   (c) $\log_{10} 200$

   (d) $\log_{10} 3000$

   (e) $\log_{10} 0,003$

   (f) $\log_{10} 0,81$

2. Uma interpretação do logaritmo decimal é a sua relação com a *ordem de grandeza*, isto é, com o número de algarismos na representação decimal. As questões a seguir exploram esta relação.

   (a) Considere o número $x = 58.932,1503$. Qual é a parte inteira de $\log_{10} x$?

   (b) Considere $x > 1$ um número real cuja parte inteira tem k algarismos. Mostre que a parte inteira de $\log_{10} x$ é igual a $k - 1$.

   (c) Generalizando o item anterior, considere o sistema de numeração posicional de base $b \geq 2$. Mostre que, se a representação de um número real $x > 1$ nesse sistema tem k algarismos, então, a parte inteira de $\log_b x$ é igual a $k - 1$.

3. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual é a relação entre $\log_{10} x$ e $\log_{10} y$?

4. (a) Mostre que uma função logarítmica transforma toda progressão geométrica em uma progressão aritmética.

   (b) Interprete a propriedade acima com base no crescimento da função logarítmica.

   (c) A propriedade demonstrada no item (a) pode ser considerada uma *caracterização* para as funções logarítmicas, isto é, é verdade que uma função é logarítmica *se, e somente se,* transforma toda progressão geométrica em uma progressão aritmética?

5. (UNIRIO/1994) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40\,(1,1)^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log_{10} 2 \cong 0,30$ e $\log_{10} 11 \cong 1,04$, determine:

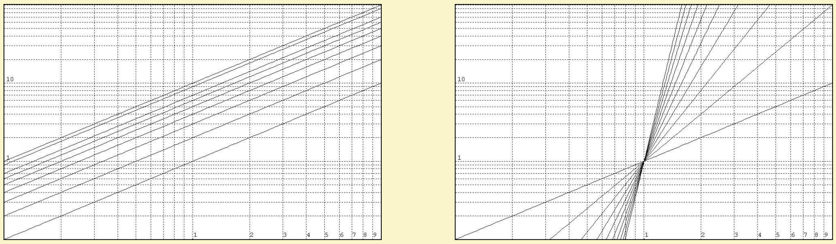
   (a) a altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

   (b) a idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1,6m$.

6. (UERJ/2008) Admita que, em um determinado lago, a cada $40cm$ de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0\, 0,8^{k/40}$, onde I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. Determine um valor aproximado para a profundidade do ponto P.

7. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida é de vinte e oito anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

8. Os gráficos a seguir foram desenhados por um programa de computador, em eixos $x'y'$ com escalas logarítmicas decimais. Isto é, se xy é o sistema de coordenadas cartesianas convencional, então $x' = \log_{10} x$ e $y' = \log_{10} y$. A janela gráfica é $0,1 \leq x' \leq 10$ e $0,1 \leq y' \leq 10$.



(a) O gráfico acima, à esquerda, representa a família de curvas $y = k\,x$, em que $k \in \mathbb{N}$ varia de 1 a 10. Explique por que as curvas têm este aspecto.

(b) O gráfico acima, à direita, representa a família de curvas $y = x^k$, em que $k \in \mathbb{N}$ varia de 1 a 10. Explique por que as curvas têm este aspecto.

(c) Observe que os intervalos escolhidos para ambos os eixos nessa escala começam em $0,1$. Como você justificaria essa escolha? Faria sentido começar os eixos em 0?

(d) Nesses eixos, cada unidade linear corresponde a uma multiplicação por 10. Explique esta afirmação.

9. Em algumas situações, para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas *escalas logarítmicas* do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da escala Richter de terremotos. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Em que E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh, e $E_0 = 10^{-3}kWh$.

(a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

(b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau $k+1$ na escala Richter?

(c) Por que você acha que o uso de uma escala logarítmica é conveniente, no caso da medição de intensidade de terremotos?

(d) Pesquise outros exemplos de situações em que o uso de escalas logarítmicas é mais conveniente.

16

Logaritmos Naturais

Sumário

16.1 Introdução 2
16.2 Logaritmos Naturais 3

16.1 Introdução

Nos cursos superiores, principalmente nas disciplinas de Cálculo, lidamos bastante com o número e e com as funções logaritmo e exponencial com esta base. Entretanto, esses conceitos são pouco explorados no Ensino Médio. Mesmo assim, devido ao seu papel central na teoria de exponenciais e logaritmos, o conhecimento desses conceitos é importante para o professor de Matemática. Por isso, nesta unidade e na próxima, vamos rever algumas das principais ideias sobre logaritmos e exponenciais de base e.

Nesta unidade, construiremos a função logaritmo natural com base na área determinada por uma hipérbole. Em seguida, mostraremos que o número e, base desse logaritmo, coincide com o limite de certa sequência.

Em primeiro lugar, consideramos a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) =$ ÁREA H_1^x, isto é, a função que a cada $x > 0$ associa a área (orientada) determinada entre a hipérbole $x\,y = 1$ e o eixo horizontal, entre 1 e x. Mostramos que esta função satisfaz a propriedade algébrica:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Portanto, graças à caracterização demonstrada na unidade anterior, temos certeza de que esta é uma função logarítmica, que chamaremos de *logaritmo natural* e denotaremos por $\ln$. Isto é, existe algum número real, que chamaremos de e, tal que:

$$f(x) = \log_{\mathrm{e}} x = \ln x.$$

Esta será para nós a *definição* do número e. Em particular, decorre daí que $f(\mathrm{e}) = 1$; portanto e é o número tal que a área da região limitada entre a hipérbole $x\,y = 1$ e o eixo horizontal, para $1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e}$, é igual a 1.

Resta entender melhor que número é este. Pode-se mostrar que e é um número irracional e, além disso, transcendente. Isto significa que e não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros – em particular, o número e não admite representação por meio de radicais. No entanto, essas demonstrações fogem ao escopo deste curso (para saber mais, veja [5]).

Nesta unidade, mostramos que o número e, definido como a base do logaritmo natural, coincide com o limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Em particular, esta sequência nos fornece aproximações racionais para o número e. A demonstração deste fato baseia-se na observações de propriedades geométricas da área sob a hipérbole. A partir daí, obtemos ainda outros limites importantes:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n=\mathrm{e}^\alpha, \qquad \forall\,\alpha\in\mathbb{R}.$$

16.2 Logaritmos Naturais

Nesta unidade, mostraremos como os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o Teorema de Caracterização demonstrado na unidade anterior.

Começamos pelo estudo de uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para os nossos propósitos.

Para cada número real $k>0$, definimos a transformação (= função) $T=T_k\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ o ponto $T(x,y)=(kx,y/k)$, obtido de (x,y) multiplicando a abscissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X'=T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base kb e altura a/k. Portanto X e seu transformado $X'=T(X)$ têm áreas iguais. Mais geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F'=T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

O leitor interessado numa análise mais detida do fato de que F e F' têm a mesma área observará que todo polígono retangular contido em F é transformado por T num polígono retangular de mesma área contido em F' enquanto T^{-1} faz o mesmo com os polígonos retangulares contidos em F'.

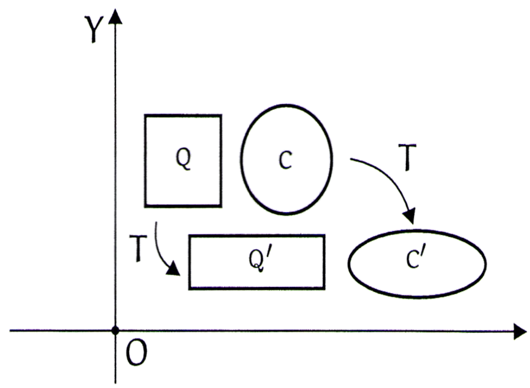


Figura 16.1: Um quadrado, um círculo e suas imagens por $T(x, y) = (2x, y/2)$

Interessa-nos em particular o efeito da transformação T nas faixas de hipérbole.

Seja

$$H = \{(x, 1/x); x > 0\}$$

o ramo positivo da hipérbole equilátera $xy = 1$. Note que H é o gráfico da função $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano tais que $a \leqslant x \leqslant b$ e $0 \leqslant y \leqslant 1/x$ chama-se uma *faixa de hipérbole*. Observe que H_a^b é o conjunto do plano limitado pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, pelo eixo das abscissas e por H.

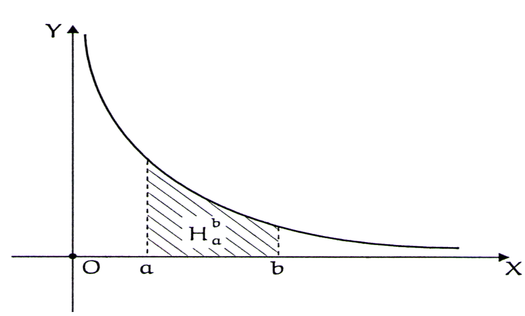


Figura 16.2: A região H_a^b

A transformação $T = T_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ak}^{bk}.

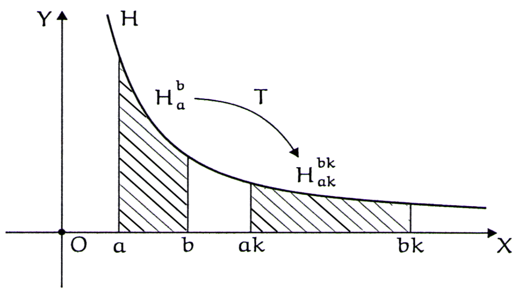


Figura 16.3: Imagem por T_k da faixa H_a^b

Como T preserva áreas, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

A área de uma figura não é um número negativo. Mas às vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, providas de sinal + ou −. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Para deixar mais clara esta convenção, escreveremos

$$\text{ÁREA}H_a^b,$$

com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores $\geqslant 0$, será escrita como área H_a^b. Assim, temos:

$$\text{ÁREA } H_a^b = \text{área } H_a^b > 0 \text{ se } a < b;$$
$$\text{ÁREA } H_a^b = -\text{área } H_a^b < 0 \text{ se } b < a;$$
$$\text{ÁREA } H_a^a = 0.$$

É óbvio que, quando $a < b < c$, tem-se

$$\text{área } H_a^b + \text{área } H_b^c = \text{área } H_a^c.$$

Uma consequência da adoção de áreas orientadas é que se tem

$$\text{ÁREA } H_a^b = -\text{ÁREA } H_b^a.$$

Daí segue que vale a igualdade

$$\text{ÁREA } H_a^b + \text{ÁREA } H_b^c = \text{ÁREA } H_a^c$$

em qualquer dos seis casos $a \leqslant b \leqslant c, a \leqslant c \leqslant b, b \leqslant a \leqslant c, b \leqslant c \leqslant a, c \leqslant a \leqslant b$ e $c \leqslant b \leqslant a$. A igualdade acima é fácil de provar. Basta ter a paciência de considerar separadamente cada uma destas seis possibilidades.

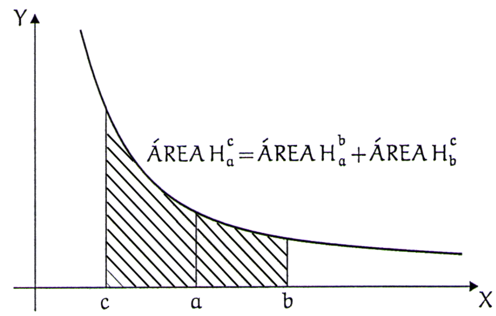


Figura 16.4: Aditividade das áreas orientadas

Definamos uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$,

$$f(x) = \text{ÁREA } H_1^x.$$

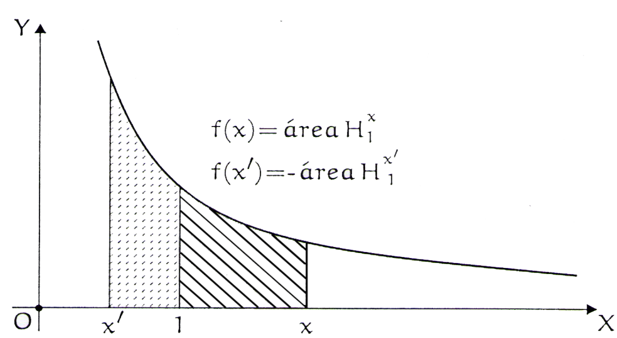


Figura 16.5: $f(x') = -$área da região pontilhada

Resultam imediatamente da definição as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x > 1; \\ f(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 1; \\ f(1) = 0 \ \ &\text{e } f \text{ é crescente.} \end{aligned}$$

Além disso, observamos que, para $x, y \in \mathbb{R}^+$ quaisquer,

$$f(xy) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_x^{xy}.$$

Como a transformação T_x preserva áreas, segue que ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y. Logo $f(xy)$ = ÁREA H_1^x + ÁREA H_1^y, ou seja,

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Pelo Teorema de Caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x) = \log_{\mathrm{e}} x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Escreveremos $\ln x$ em vez de $\log_{\mathrm{e}} x$ e chamaremos o número $\ln x$ de *logaritmo natural* de x.

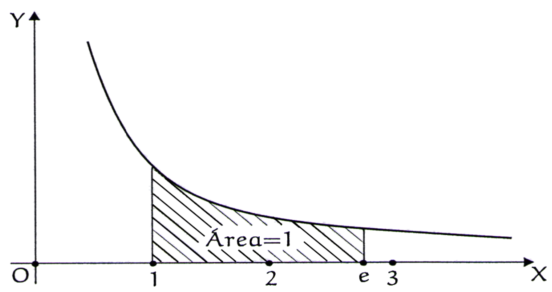


Figura 16.6: Definição do número e

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja ÁREA $H_1^{\mathrm{e}} = 1$.

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $\mathrm{e} = 2,718281828459$.

Os logaritmos naturais, de base e, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal.

Alguns autores chamam o logaritmo natural de "logaritmo neperiano", em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural.

Usualmente, o número e é apresentado como o limite da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Noutras palavras, costuma-se introduzir e como o número real cujos valores aproximados por falta são os números racionais da forma $(1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Essas aproximações são tanto melhores quanto maior for o número n. Mostraremos agora que o número e, que acabamos de caracterizar pela propriedade ÁREA $H_1^{\mathrm{e}} = 1$, é mesmo o valor daquele limite.

O argumento que usaremos para dar essa prova se baseia na figura abaixo.

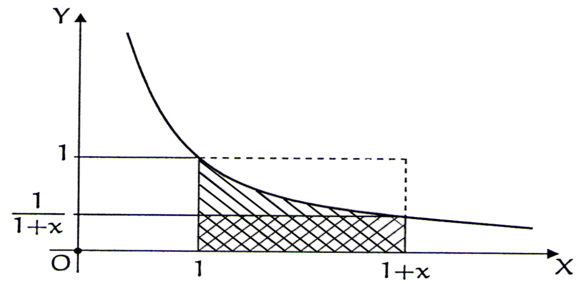


Figura 16.7: Estimando $\ln(1+x)$

Nela temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contido na faixa H_1^{1+x} e esta faixa, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1.$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1,$$

Portanto:

$$\mathrm{e}^{\frac{n}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando n cresce indefinidamente, $\frac{n}{n+1}$ se aproxima de 1, logo $\mathrm{e}^{\frac{n}{n+1}}$ tende a e. Segue-se então destas últimas desigualdades que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

Este argumento ilustra bem claramente a vantagem que advém de se interpretar o logaritmo natural geometricamente: a noção de área é visualmente intuitiva, permitindo que se obtenham desigualdades como a que foi usada aqui.

A igualdade $\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ foi obtida a partir da desigualdade

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1, \qquad (1)$$

válida para todo $x > 0$. Se considerarmos $-1 < x < 0$, teremos $-x > 0$ e $1 + x > 0$. Portanto é válido ainda falar de $\ln(1 + x)$. Observamos que o retângulo cuja base mede $-x$ e cuja altura mede 1 está contido na faixa H_{1+x}^1 e esta, por sua vez, está contida no retângulo de mesma base e altura $1/(1+x)$. Comparando as áreas destas figuras, vem

$$-x < -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Dividindo os 3 membros pelo número positivo $-x$ obtemos

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x}. \qquad (2)$$

As desigualdades (1) e (2) nos dão

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+x},$$

ou seja

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \mathrm{e} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}},$$

conforme seja $x > 0$ ou $-1 < x < 0$. Em qualquer hipótese, daí se segue que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}. \qquad (3)$$

Isto significa que é possível tornar o valor da expressão $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tão próximo de e quanto se deseje, desde que se torne o número não-nulo x suficientemente pequeno em valor absoluto. (O próprio x pode ser > 0 ou < 0.)

A igualdade (3) se exprime dizendo que $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tende a e quando x tende a zero.

Tomando, por exemplo, $x = \frac{\alpha}{n}$, vemos que $\frac{1}{x} = \frac{n}{\alpha}$ e que $x \to 0$ se, e somente se $n \to \infty$. Logo (3) nos dá

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^\alpha = \mathrm{e}^\alpha.$$

Como caso particular da igualdade

$$\mathrm{e}^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n,$$

válida para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercícios Recomendados

1. Use o limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ para obter aproximações sucessivas para o número e.

2. As aproximações para o número e sugeridas no exercício anterior podem ser feitas com ajuda de uma planilha eletrônica.

   (a) Preencha a coluna **A** da planilha com a sequência crescente dos números naturais até 10. Em seguida, escreva nas primeiras células das colunas **B** e **C**, respectivamente, **=1+1/A1** e **=B1∧A1**. Arraste essas células ao longo das colunas, até o final das células preenchidas na coluna **A**. De que número os valores encontrados na coluna **C** estão se aproximando? Justifique sua resposta.

   (b) Podemos repetir a experiência do item anterior, aumentando a velocidade de convergência. Para isto, repita a numeração da coluna **A**, e escreva nas primeiras células das colunas **B**, **C** e **D**, respectivamente: **=10∧A1**, **=1+1/B1** e **=C1∧B1**. Arraste essas células ao longo das colunas, até o final das células preenchidas na coluna **A**. De que número os valores encontrados na coluna **C** estão se aproximando? Agora, estenda a numeração da coluna **A** até 20 e arraste as demais coluna até essa posição. O comportamento dos números que aparecem na coluna **D** é o esperado? Explique o ocorrido.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010.

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica. 2

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010.

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

17

Função Exponencial na Base e

Sumário

17.1 Introdução 2
17.2 A Função Exponencial de Base e 2

17.1 Introdução

Na unidade anterior, iniciamos os estudos sobre o número e e as funções logaritmo e exponencial com esta base, definindo o número e como a base do logaritmo natural, e provando que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nesta unidade, damos continuidade a estes estudos. Começamos observando um exemplo em que o número e (ou as exponenciais de base e) aparece em um problema de juros. Considere uma aplicação financeira que rende juros α em certo período de tempo (por exemplo, um ano). Suponha que esta aplicação seja de tal forma que, cada vez que o investidor faz uma retirada antes do final do período, ele recebe uma fração da quantia que receberia ao final do período, proporcional ao tempo de aplicação (como se a aplicação rendesse juros simples dentro do período). Neste caso, quanto mais o investidor resgata e reaplica imediatamente a quantia retirada, maior será o total acumulado ao final do período (pois juros simples rendem mais que juros compostos para períodos da aplicação menores que 1, como mostra o Exercício 1). Entretanto, o valor acumulado não aumenta indefinidamente – a razão entre este valor e o investimento inicial se aproxima e é limitado superiormente por e^{α}. Podemos dizer que e^{α} corresponde à taxa de juros compostos continuamente acumulados, em uma situação limite (se fosse possível resgatar e reaplicar a cada instante).

Na segunda parte da unidade, mostramos que a derivada de uma função exponencial é proporcional à própria função. Esta propriedade é responsável pela grande importância da função exponencial para a modelagem de fenômenos em que a taxa de crescimento de uma grandeza é proporcional ao seu próprio valor. Há muitos exemplos de fenômenos com esta propriedade, na Física e em outras ciências.

17.2 A Função Exponencial de Base e

O número e, base dos logaritmos naturais, foi definido na unidade anterior como o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^{e} é igual a 1. Em seguida, mostramos que esse número é também o limite de

$(1+\frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Nesta unidade, daremos exemplo de uma situação da vida real que leva à consideração do limite acima.

Por sua vez, a função exponencial $x \mapsto \mathrm{e}^x$, de base e, pode ser definida por meio do limite $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ ou então, geometricamente, pelo fato de que $y = \mathrm{e}^x$ é o único número real positivo tal que a área da faixa de hipérbole H_1^y é igual a x. Mostraremos que as funções de tipo exponencial, $f(x) = b\mathrm{e}^{\alpha x}$, com base e, surgem em questões naturais e calcularemos a taxa de variação instantânea dessas funções.

Exemplo 1

Um investidor aplica um capital c_0 a uma taxa de k por cento ao ano. Se escrevermos, por simplicidade, $\alpha = k/100$, por cada real aplicado, o investidor receberá, no final de um ano, $1+\alpha$ reais, de modo que o total a ser resgatado será $c_0(1+\alpha)$ reais. O acréscimo $c_0 \cdot \alpha$ (juro) é uma espécie de aluguel do dinheiro.

Sendo assim, raciocina o investidor: se eu resgatar meu capital depois de um semestre, terei direito a metade do juro (aluguel) anual, logo receberei $c_0(1+\frac{\alpha}{2})$ reais. Então reinvestirei esta soma por mais um semestre e, no final do ano, em vez de $c_0(1+\alpha)$, vou receber $c_0(1+\frac{\alpha}{2})^2$, que é uma quantia maior. (Nosso investidor sabe que $(1+\frac{\alpha}{2})^2 > 1+\alpha$, pela desigualdade de Bernoulli.) Pensando melhor, diz o investidor, posso resgatar e reinvestir meu capital mensalmente recebendo, no final de um ano, o total de $(1+\frac{\alpha}{12})^{12}$.

Como o número $\alpha = k/100$ lhe é conhecido, o investidor, com auxílio da calculadora, verifica imediatamente que $(1+\frac{\alpha}{2})^2 < (1+\frac{\alpha}{12})^{12}$. Animado com o resultado, nosso ambicioso investidor imagina que, resgatando e reaplicando seu dinheiro num número n cada vez maior de intervalos de tempo iguais, poderá aumentar ilimitadamente seu capital.

Na verdade, fazendo o que imagina, no final do ano o investidor receberá o total acumulado igual a

$$c_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = c_0 \cdot \mathrm{e}^\alpha.$$

Nosso personagem estava certo ao pensar que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\alpha > 0$, se tem

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n < \left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}$$

Mas, infelizmente, se enganou ao acreditar que a sequência de termo geral $(1+\frac{\alpha}{n})^n$ é ilimitada. Com efeito, todos esses termos são menores do que e^α.

Seja como for, ao conceber esse processo imaginário de resgatar e reinvestir a cada instante seu capital, nosso investidor foi conduzido à noção de juros compostos, acumulados continuamente.

O mesmo raciocínio é válido se considerarmos, para um número real arbitrário $t > 0$, o capital c_0 aplicado durante t anos, à mesma taxa α. Se tivéssemos juros simples, no final desses t anos o capital resultante seria $c_0(1 + \alpha t)$. Dividindo o intervalo $[0, t]$ em n partes iguais, resgatando e reinvestindo n vezes, no final de t anos obteríamos $c_0(1 + \frac{\alpha t}{n})^n$, fazendo n crescer indefinidamente, chegamos a

$$c(t) = c_0 \mathrm{e}^{\alpha t} = c_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n$$

como o resultado da aplicação do capital c_0, durante t anos, a uma taxa de $\alpha = k/100$ ao ano, de juros compostos, acumulados continuamente.

Em particular, o capital de 1 real aplicado a uma taxa de 100% ao ano, com juros acumulados continuamente, gera no final de um ano um total de e reais.

Evidentemente, a expressão $f(t) = c \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}$ pode também ser escrita sob a forma $f(t) = c \cdot a^t$, onde $a = \mathrm{e}^{\alpha}$, portanto $\alpha = \ln a$. Ou, se houver preferência por uma determinada base b, pode-se sempre escrever $f(t) = c \cdot b^{\beta t}$, com $\beta = \frac{\alpha}{\ln b}$. As vezes é conveniente tomar a base 2, de modo que se tem $f(t) = c \cdot 2^{\beta t}$, onde $\beta = \alpha/\ln 2$.

Matemáticos e cientistas que se utilizam da Matemática preferem geralmente escrever as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$, com a base e, porque esta expressão exibe explicitamente não apenas o valor inicial $b = f(0)$ como também o coeficiente α, que está intimamente ligado à taxa de crescimento de f, conforme mostraremos agora.

A *taxa de crescimento* de uma função f no intervalo de extremidades $x, x+h$ é, por definição, o quociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Este quociente pode também ser interpretado como a inclinação da secante que liga os pontos $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$ do gráfico de f.

No caso particular da função $f(x) = b\mathrm{e}^{\alpha x}$, temos

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{h} = f(x) \cdot \frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{n}.$$

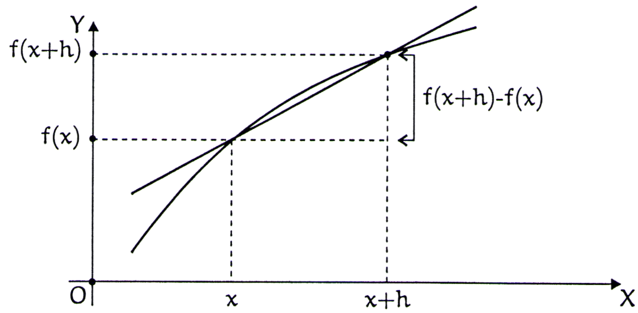


Figura 17.1: Acréscimo de uma função

Lembremos que chama-se *derivada* da função f no ponto x ao limite da taxa $[f(x+h)-f(x)]/h$ quando h tende para zero. Este número, cujo significado é o de taxa instantânea de crescimento de f no ponto x, é representado por $f'(x)$. Ele é o número real cujos valores aproximados são obtidos pelos quocientes $[f(x+h)-f(x)]/h$ para valores muito pequenos de h. Geometricamente, a derivada $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto x.

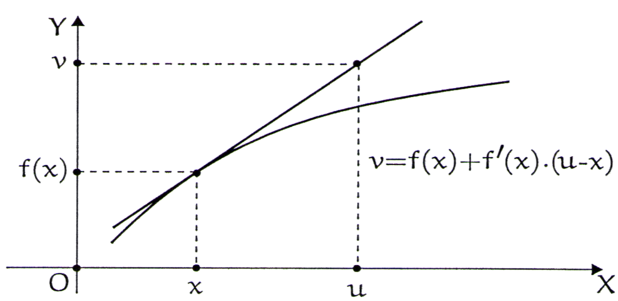


Figura 17.2: Reta tangente ao gráfico de f em um ponto

O sinal e o valor da derivada $f'(x)$ indicam a tendência da variação de f a partir do ponto x. Se $f'(x) > 0$ então $f(x+h) > f(x)$ para pequenos valores positivos de h. Se $f(x) < 0$, tem-se, ao contrário, $f(x+h) < f(x)$ para h pequeno e positivo. Se $f'(x)$ é um número positivo grande, então f cresce rapidamente a partir de x. E assim por diante. A derivada é a noção fundamental do Cálculo Infinitesimal. Sua descoberta, há três séculos e meio, teve uma grande repercussão e provocou um progresso extraordinário na Ciência e em toda a civilização a partir daquela época.

Mostraremos agora que a derivada da função $f(x) = b\mathrm{e}^{\alpha x}$ é igual a $\alpha \cdot f(x)$. Noutras palavras, a taxa instantânea de crescimento de uma função do tipo exponencial é, em cada ponto x, proporcional ao valor da função naquele ponto. E o coeficiente α é precisamente o fator de proporcionalidade.

Assim, por exemplo, no caso do investimento, em que $c(t) = c_0 \cdot \mathrm{e}^{\alpha t}$, se, a partir de um dado instante t_0, considerarmos um intervalo de tempo h muito pequeno, teremos aproximadamente $[c(t_0 + h) - c(t_0)]/h \cong \alpha \cdot c(t_0)$, logo $c(t_0 + h) - c(t_0) = c(t_0) \cdot \alpha h$.

Usando a interpretação geométrica do logaritmo natural, é fácil calcular a derivada da função $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$.

O ponto de partida consiste em mostrar que se tem

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

Para vermos isto, lembramos que a faixa de hipérbole $H_1^{\mathrm{e}^h}$ tem área igual a h. Esta faixa está compreendida entre um retângulo de área $(\mathrm{e}^h - 1)/\mathrm{e}^h$ e outro de área $\mathrm{e}^h - 1$. Portanto

$$\frac{\mathrm{e}^h - 1}{\mathrm{e}^h} < h < \mathrm{e}^h - 1.$$

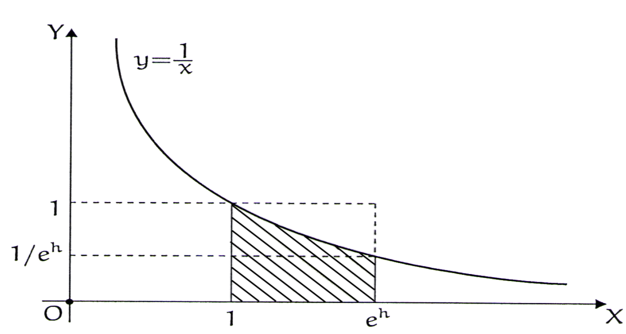


Figura 17.3:

Aqui estamos supondo $h > 0$. Dividindo as duas desigualdades por $\mathrm{e}^h - 1$, obtemos

$$\frac{1}{\mathrm{e}^h} < \frac{h}{\mathrm{e}^h - 1} < 1, \text{para todo } h > 0.$$

Quando $h \to 0$, a potência e^h tende a 1. Segue-se das desigualdades acima que $\lim_{h\to 0}[h/(\mathrm{e}^h - 1)] = 1$, logo

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1.$$

O caso em que $h \to 0$ por valores negativos se trata de modo análogo.

Agora é imediato ver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$$

e, mais geralmente,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(x+h)} - \mathrm{e}^{\alpha x}}{h} = \mathrm{e}^{\alpha x} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{h} = \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{\alpha h}.$$

Escrevendo $k = \alpha h$, vemos que $h \to 0 \Leftrightarrow k \to 0$. Portanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(x+h)} - \mathrm{e}^{x}}{h} = \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{k} - 1}{k} = \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Isto conclui a demonstração de que a derivada da função $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ é $f'(x) = \alpha \cdot f(x)$, logo é proporcional ao valor $f(x)$ da função f, sendo α o fator de proporcionalidade.

É óbvio que o mesmo vale para uma função do tipo $f(x) = b \cdot \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Exercícios Recomendados

1. Considere uma aplicação que rende juros $\alpha > 0$ em uma unidade tempo $T = 1$ (por exemplo, um mês, um ano, etc.). Isto é, se uma quantia c_0 é investida nesta aplicação pelo período T, então o valor resgatado será $c = c_0(1 + \alpha)$. Suponha que um investidor resgate a quantia c_0 em um tempo $t < T$.

   (a) Qual será o valor resgatado se a aplicação rende juros simples para $t < T$?

   (b) Qual será o valor resgatado se a aplicação rende juros compostos para $t < T$?

   (c) Em qual das duas opções acima o investidor resgatará um valor maior?

   (d) A conclusão do item anterior também é válida para $t > T$?

2. A lei de desintegração do elemento Rádio no tempo $t \geqslant 0$ é dada por $M(t) = C\mathrm{e}^{-kt}$, onde $M(t)$ é a quantidade de Rádio no tempo t, C e k são constantes positivas. Se a metade da quantidade inicial $M(0)$ se desintegra em 1600 anos, qual é a quantidade desintegrada em 100 anos?

3. O crescimento de uma certa cultura de bactérias obedece à função $X(t) = C\mathrm{e}^{kt}$, onde $X(t)$ é o número de bactérias no tempo $t \geqslant$, C e k são constantes positivas. Verificando-se que o número inicial de bactérias $X(0)$ duplica em 4 horas, quantas bactérias se pode esperar no fim de 6 horas?

4. Nesta seção, provamos que a derivada de uma função exponencial é proporcional ao valor da própria função. Você acha que a recíproca desta afirmação é verdadeira? Isto é, é verdade que se a derivada de uma função é proporcional ao próprio valor da função, então esta é uma função exponencial? Que ferramentas matemáticas são necessárias para responder esta pergunta?

18

Introdução às Funções Trigonométricas

Sumário

18.1 Introdução 2
18.2 Introdução às funções trigonométricas 4
18.3 A Função de Euler e a Medida de Ângulos 8

18.1 Introdução

Nesta unidade, começamos a preparar o estudo das funções trigonométricas que será desenvolvido nas unidades seguintes. De forma similar ao que ocorre no caso dos logaritmos, trigonometria é certamente um dos tópicos cuja abordagem no Ensino Médio é mais artificialmente mistificada.

Em primeiro lugar, observamos que em geral a abordagem de trigonometria em livros didáticos é fortemente calcada por uma quantidade excessiva de fórmulas (em muitos casos redundantes) e procedimentos memorizados, apresentados com interpretação geométrica insuficiente.

Um segundo problema está relacionado com os dois contextos matemáticos fundamentais em que a trigonometria é desenvolvida: a *trigonometria no triângulo retângulo* e a *trigonometria no círculo trigonométrico*. No triângulo retângulo, o seno e o cosseno de um ângulo agudo são definidos como razões entre comprimentos de lados. Portanto, neste contexto, falamos de *seno e cosseno de ângulos*, definidos como razões trigonométricas. No contexto do círculo trigonométrico, tomamos como referência um círculo unitário C, com centro na origem de um sistema de eixos cartesianos, e consideramos os ângulos centrais que possuem um dos lados no eixo horizontal e o outro definido por um segmento OB, em que B é um ponto sobre a circunferência. Se B está no primeiro quadrante, os ângulos determinados são agudos e tudo ocorre como no contexto das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Como as hipotenusas dos triângulos medem uma unidade, o seno e o cosseno corresponderão às medidas das suas projeções sobre os eixos cartesianos. Existe uma correspondência entre os ângulos centrais e os arcos correspondentes determinados por estes ângulos. Portanto, podemos pensar que o seno e o cosseno dependem apenas do comprimento desses arcos – por isso, o *radiano* aparece como uma unidade natural no contexto das funções trigonométrica. Agora, podemos mover livremente o ponto B sobre a circunferência, obtendo ângulos obtusos, dando mais de uma volta completa no círculo e andando no sentido negativo (horário). Desta forma, os conceitos inicialmente construídos, tendo o triângulo retângulo como referência, são estendidos e, assim, passamos a tratar de *seno e cosseno de números reais*. Isto nos possibilita definir as *funções trigonométricas*, com domínio em $\mathbb{R}$. O problema é que esses dois contextos são tratados de forma completamente estanque, sem que as relações entre eles sejam explicitadas e devidamente esclarecidas. Isto pode até mesmo causar nos alunos a impressão de que, quando falamos de seno e cosseno no triângulo retângulo, ou no círculo trigonométrico, ou nas funções trigonométricas, estamos nos referindo a conceitos matemáticos inteiramente desconectados, que talvez "por acaso" tenham o mesmo nome.

Na segunda seção da unidade, tratamos da construção das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Antes de mais nada, é imperativo observar a importância do conceito de semelhança para a boa definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo. De fato, se dois triângulos retângulos possuem um ângulo agudo em comum, então estes serão necessariamente triângulos semelhantes. Portanto, as razões entre seus lados correspondentes serão iguais. Isto nos garante que o seno e o cosseno fiquem *bem definidos*, isto é, que *seus valores dependam apenas do ângulo*, e não do triângulo retângulo escolhido. De forma geral, ao ler esta seção, procure atentar para o fato de que todas as relações entre razões trigonométricas são na verdade expressões algébricas de propriedades geométricas envolvendo os triângulos retângulos, seus lados e ângulos. Por exemplo, o fato de que o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar é uma consequência direta da Lei Angular de Tales e das próprias definições das razões trigonométricas. Chamar atenção para essas interpretações geométricas, dando significado às relações algébricas, deve ser uma atitude permanente no ensino de trigonometria na Educação Básica. Ainda nesta seção, são brevemente discutidos alguns aspectos das origens históricas da trigonometria. Para saber mais, veja [1] e [2].

Na Seção 3, discutimos a construção do círculo trigonométrico, por meio da função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que "enrola" a reta no círculo a partir do ponto $(1, 0) = E(0)$. Observe como o *radiano* surge naturalmente neste contexto como uma unidade de medida linear de comprimento de arco. Como já observamos, o seno e o cosseno são representados geometricamente pelas projeções do raio do círculo nos eixos coordenados. A partir daí, suas principais propriedades apresentam representações geométricas simples no círculo trigonométrico. O círculo trigonométrico será a base para a construção das funções trigonométricas, que será feita na próxima unidade.

18.2 Introdução às funções trigonométricas

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise.

A Trigonometria teve seu início na Antiguidade, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se c é o comprimento da corda, α é o ângulo e r o raio da circunferência então $c = 2r \operatorname{sen}(\alpha/2)$. Esta é a origem da palavra *seno*, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra, cavidade, *sinus* em latim).

O objeto inicial da Trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cosecante, o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de $\cos\widehat{A}$, o cosseno do ângulo $\widehat{A}$, tem-se também $\cos x$, o cosseno do número real x, isto é, a função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Analogamente, têm-se as funções sen, tg, cotg, sec e cossec, completando as *funções trigonométricas*.

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo $a\cos nx + b\operatorname{sen} nx$. Para que se tenha uma ideia da relevância deste fato, que deu origem à chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista "Mathematical Reviews", o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

Como se sabe desde o ensino fundamental, num triângulo retângulo de hipotenusa a e ângulos agudos $\widehat{B}, \widehat{C}$, opostos respectivamente aos catetos b e c, têm-se as definições

$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a} = (\text{cateto adjacente}) \div (\text{hipotenusa}),$$

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a} = (\text{cateto oposto}) \div (\text{hipotenusa}),$$

e, analogamente, $\cos \widehat{C} = \dfrac{b}{a}$ e $\operatorname{sen} \widehat{C} = \dfrac{c}{a}$.

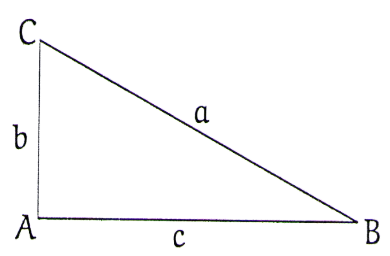


Figura 18.1: Triângulo retângulo

Estas relações definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer, pois todo ângulo agudo é um dos ângulos de um triângulo retângulo. É fundamental observar que $\cos \widehat{B}$ e $\operatorname{sen} \widehat{B}$ dependem apenas do ângulo $\widehat{B}$ mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\widehat{B}$ é um dos ângulos agudos. Com efeito, dois quaisquer triângulos retângulos que tenham um ângulo agudo igual a $\widehat{B}$ são semelhantes.

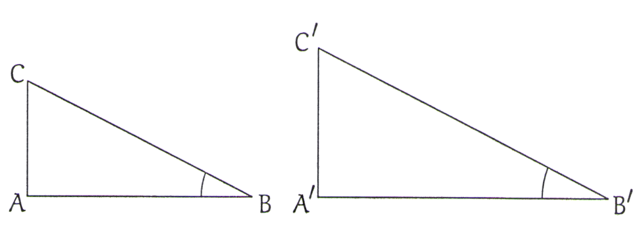


Figura 18.2: Triângulos retângulos semelhantes

Se esses triângulos são ABC e $A'B'C'$, com $\widehat{B'} = \widehat{B}$. então a semelhança nos dá

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a}$$

e

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a},$$

logo

$$\operatorname{sen} \widehat{B'} = \operatorname{sen} \widehat{B} \quad \text{e} \quad \cos \widehat{B'} = \cos \widehat{B}.$$

Portanto, *o seno e o cosseno pertencem ao ângulo, e não ao eventual triângulo que o contém*.

Assim, a semelhança de triângulos é a base de sustentação da Trigonometria. Se organizarmos uma tabela com os valores de $\cos \widehat{B}$ para todos os ângulos agudos $\widehat{B}$, a relação $c = a \cdot \cos \widehat{B}$ e o Teorema de Pitágoras

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

nos permitirão determinar os catetos b e c de um triângulo retângulo, uma vez conhecida a hipotenusa a e um dos ângulos agudos.

Mais geralmente, num triângulo ABC qualquer, a altura h, baixada do vértice C sobre o lado AB, tem a expressão $h = \overline{BC} \cdot \operatorname{sen} \widehat{B}$. Esta simples fórmula exibe a eficiência da Trigonometria como instrumento de cálculo na Geometria, permitindo relacionar ângulos com comprimentos de segmentos.

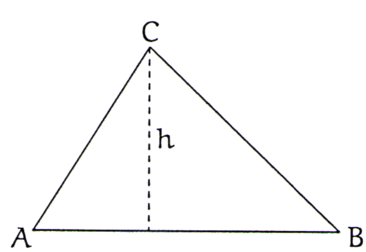


Figura 18.3: Um triângulo qualquer

O Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

aplicado ao triângulo retângulo ABC, com $AB = c, AC = b$ e $BC = a$, nos mostra imediatamente que

$$(\cos \widehat{B})^2 + (\operatorname{sen} \widehat{B})^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

É um costume tradicional, que convém adotar, escrever $\cos^2 \widehat{B}$ e $\operatorname{sen}^2 \widehat{B}$ em vez de $(\cos \widehat{B})^2$ e $(\operatorname{sen} \widehat{B})^2$. A relação fundamental

$$\cos^2 \widehat{B} + \operatorname{sen}^2 \widehat{B} = 1$$

mostra que, a rigor, basta construir uma tabela de senos para ter a de cossenos, ou vice-versa.

É evidente, a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra "cosseno" (seno do complemento).

É claro que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são números compreendidos entre 0 e 1.

Finalmente observamos que se A_1B_1 é a projeção ortogonal de um segmento de reta AB sobre um eixo então os comprimentos de AB e A_1B_1 são relacionados pela fórmula $\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cdot \cos \alpha$, onde α é o ângulo de AB com o referido eixo.

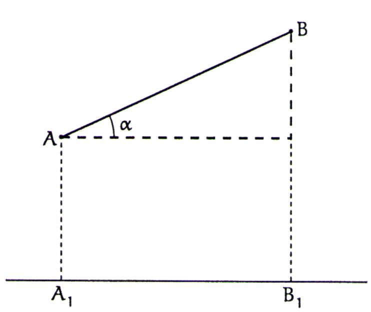


Figura 18.4: Projeção ortogonal de um segmento

18.3 A Função de Euler e a Medida de Ângulos

A relação fundamental

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$$

sugere que, para todo ângulo α, os números $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$ são as coordenadas de um ponto da circunferência de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

Indicaremos com a notação C essa circunferência, que chamaremos de *circunferência unitária*, ou *círculo unitário*. Temos, portanto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

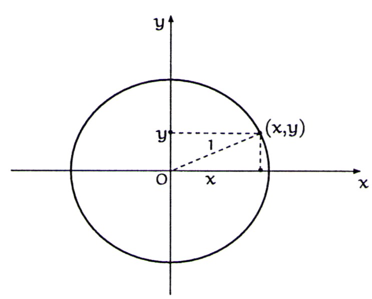


Figura 18.5: Círculo unitário

Observa-se que, para todo ponto $(x, y) \in C$, tem-se $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

A fim de definir as funções $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, devemos associar a cada número real t um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número t desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo. Evidentemente, há diversas maneiras de se medir um ângulo, dependendo da unidade que se adota. Há duas unidades que se destacam: uma (o radiano) por ser, como veremos, a mais natural; outra (o grau) por ser tradicional há milênios, além de que muitos ângulos comumente encontrados têm por medida um número inteiro de graus.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$;
- se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1, 0)$, um caminho de *comprimento* t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$;
- se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificada a um fio inextensível, sobre a circunferência C (pensada como um carretel) de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1, 0) \in C$.

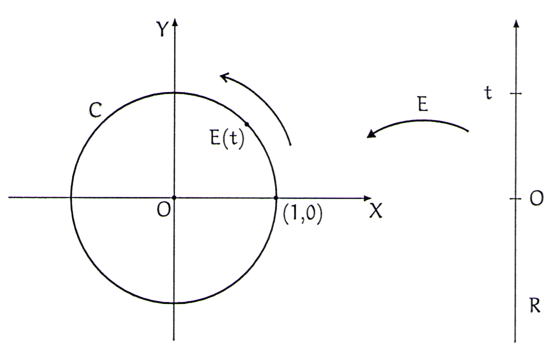


Figura 18.6: A função de Euler

Cada vez que o ponto t descreve na reta um intervalo de comprimento ℓ, sua imagem $E(t)$ percorre sobre a circunferência C um arco de igual comprimento ℓ. Em particular, como a circunferência unitária C tem comprimento igual a 2π, quando o ponto t descreve um intervalo de comprimento 2π, sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C, retornando ao ponto de partida. Assim sendo, para todo $t \in \mathbb{R}$, tem-se $E(t + 2\pi) = E(t)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(t + 2k\pi) = E(t)$, seja qual for $t \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $t < t'$ em $\mathbb{R}$ são tais que $E(t) = E(t')$ isto significa que, quando um ponto s da reta varia de t a t' sua imagem $E(s)$ se desloca sobre

C, no sentido positivo, partindo de $E(t)$, dando um número inteiro k de voltas e retornando ao ponto de partida $E(t') = E(t)$. A distância total percorrida é igual a $2k\pi$, logo $t' = t + 2k\pi$, pois o comprimento do caminho percorrido por $E(s)$ é, por definição, igual à distância percorrida por s sobre a reta $\mathbb{R}$.

Resumindo: tem-se $E(t') = E(t)$ se, e somente se, $t' = t + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. (Quando $t' > t$, vale $k \in \mathbb{N}$; quando $t' < t$ tem-se $k < 0$.)

Escrevamos $A = (1, 0)$ e $O = (0, 0)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, ponhamos $B = E(t)$. Diz-se neste caso que o ângulo $A\widehat{O}B$ *mede* t *radianos*.

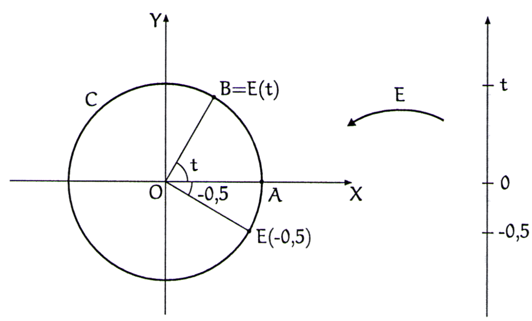


Figura 18.7: Medição de ângulos em radianos

Esta definição sugere uma série de observações.

- Pode-se ter $B = E(t)$ com $t < 0$. Portanto esta forma de medida é *orientada*: é permitido a um ângulo ter medida negativa.

- A medida do ângulo $A\widehat{O}B$ é determinada apenas a menos de um múltiplo inteiro de 2π, pois $B = E(t)$ implica $B = E(t + 2k\pi)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, por exemplo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $1 - 2\pi$ radianos. De um modo mais geral, se $B = E(t)$ então $B = E(t - 2\pi)$, pois há dois arcos que vão de $A = (1, 0)$ até B; um de comprimento $|t|$ e outro de comprimento $|t - 2\pi|$.

- De acordo com esta definição, o ângulo $A\widehat{O}B$ mede 1 radiano se, e somente se, o arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência C, por ele subtendido, tem comprimento igual a 1, isto é, igual ao raio da circunferência. Mais geralmente, numa circunferência de raio r, a medida de um ângulo central em radianos é igual a ℓ/r, onde ℓ é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo.

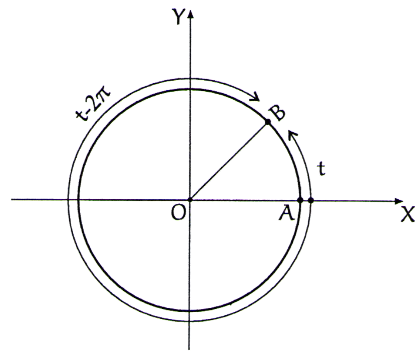


Figura 18.8: Congruência de arcos

- A medida do ângulo $A\widehat{O}B$ em radianos também pode ser expressa como $2a/r^2$, em termos da área a do setor circular AOB e do raio r.

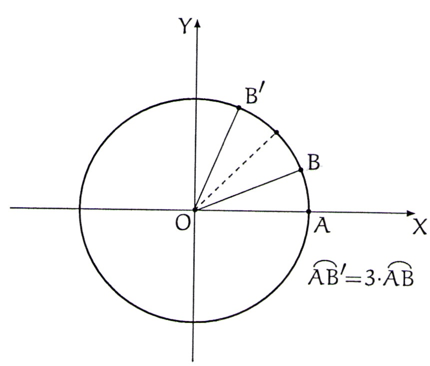


Figura 18.9: Arcos e áreas de setores circulares

Com efeito, a área a do setor circular AOB é uma função crescente do comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$. Como se vê facilmente, se o arco $\widehat{AB'}$ tem comprimento n vezes maior do que o arco $\widehat{AB}$ (onde $n \in \mathbb{N}$) então a área do setor AOB' é igual a n vezes a área de AOB. Segue-se então do Teorema Fundamental da Proporcionalidade que a área a é uma função linear do comprimento, ou seja, $\ell : a = c \cdot \ell$, onde c é uma constante. Para determinar o valor de c, basta observar que, quando o setor é todo o círculo (de raio r), o arco correspondente é toda a circunferência. Tem-se então $a = \pi r^2$ e $\ell = 2\pi r$. Logo $\pi r^2 = c \cdot 2\pi r$, donde $c = \frac{r}{2}$.

Portanto a área a do setor AOB se relaciona com o comprimento ℓ do arco $\overset{\frown}{AB}$ pela igualdade $a = \ell r/2$.

Segue-se que

$$\frac{\ell}{r} = \frac{2a}{r^2}.$$

Como ℓ/r é a medida do ângulo $A\widehat{O}B$ em radianos, concluímos daí que esta medida também vale $2a/r^2$, onde a é a área do setor AOB e r é o raio do círculo.

Podíamos também ter definido uma função $G : \mathbb{R} \to C$ pondo ainda $G(0) = (1, 0)$ e estipulando que, para $s > 0$, $G(s)$ fosse o ponto da circunferência unitária obtido a partir do ponto $(1, 0)$ quando se percorre, ao longo de C, no sentido positivo, um caminho de comprimento $\frac{2\pi}{360}s$. E, para $s < 0$, $G(s)$ seria definido de forma análoga, com o percurso no sentido negativo de C.

A função $G : \mathbb{R} \to C$ tem propriedades semelhantes às de E, pois

$$G(t) = E\left(\frac{2\pi}{360}t\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, $G(t') = G(t)$ se, e somente se, $t' = t + 360k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Se $A = (1, 0)$, $O = (0, 0)$ e $B = G(s)$, diz-se que o ângulo $A\widehat{O}B$ mede s $graus$. O ângulo $A\widehat{O}B$ mede 1 grau quando $B = G(1)$, ou seja, quando o arco $\overset{\frown}{AB}$ tem comprimento igual a $2\pi/360$. Noutras palavras, o ângulo de 1 grau é aquele que subtende um arco igual a $1/360$ da circunferência.

Escreve-se 1 grau $= 1^\circ$ e 1 radiano $= 1$ rad.

Como a circunferência inteira tem 2π radianos e 360 graus, segue-se que 2π rad $= 360^\circ$, ou seja,

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \cong 57,3 \text{ graus}.$$

É bom ter em mente relações como $180^\circ = \pi$ rad, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad, etc.

As figuras a seguir deixam claro que se $E(t) = (x, y)$ então $E(t + \pi) = (-x, -y)$, $E(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x)$, $E(-t) = (x, -y)$, $E(\frac{\pi}{2} - t) = (y, x)$ e $E(\pi - t) = (-x, y)$.

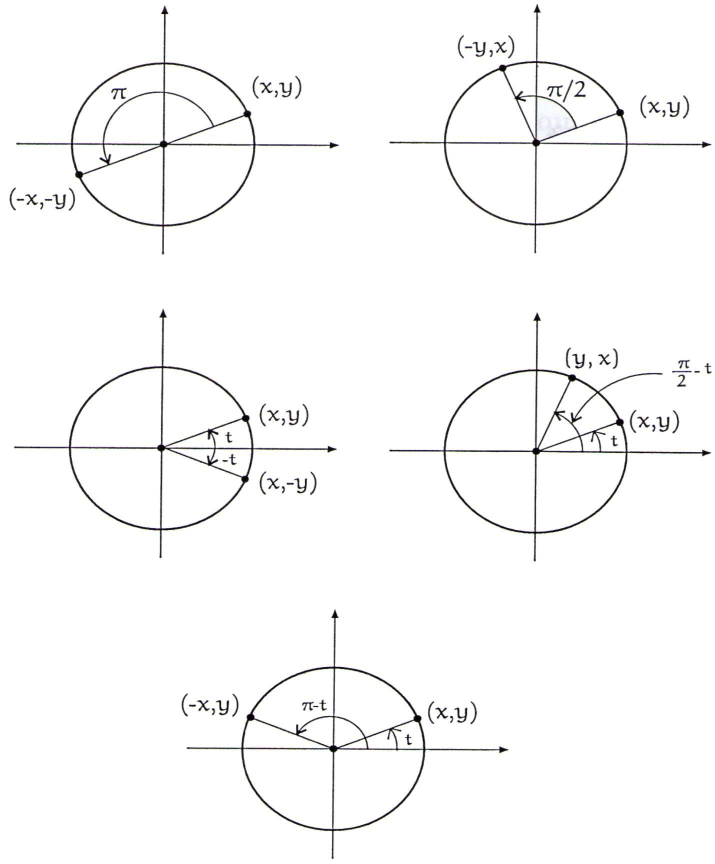


Figura 18.10: Relações entre arcos e pontos no círculo

Estas relações exprimem certas simetrias da função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que se traduzem em propriedades das funções seno e cosseno, como veremos na próxima unidade.

Referências Bibliográficas

[1] Carmo, Manfredo P.; Morgado, Augusto C., Wagner, Eduardo & Pitombeira, João Bosco. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática. 3

[2] Eves, Howard. *An Introduction to the History of Mathematics*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964. 3

[3] Ferreira, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Textos Universitários, 2010.

[4] Figueiredo, Djairo G. *Análise I* Rio de Janeiro: LTC, 1996.

[5] Figueiredo, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes* Rio de Janeiro: SBM, Coleção Iniciação Científica.

[6] Halmos, Paul. *Naive Set Theory*. New York: Springer, 1974.

[7] Hefez, A. *Curso de Álgebra Volume 1*. 4^a Edição. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária, 2010.

[8] Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 2012.

[9] Lima, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[10] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise*, Vol. 1. Rio de Janeiro: SBM, Projeto Euclides, 1976.

[11] Lima, Elon Lages. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[12] Lima, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, Coleção Professor de Matemática.

[13] Lima, Elon Lages. *Análise Real*, Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, Coleção Matemática Universitária.

19

Funções Trigonométricas

Sumário

19.1 Introdução 2

19.2 As Funções Trigonométricas 2

19.1 Introdução

Dando continuidade ao estudo da trigonometria no círculo, iniciado na unidade anterior, discutiremos agora as definições das funções trigonométricas. Logo no início da Seção 2, $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$, para $t \in \mathbb{R}$ qualquer, são definidas como a abscissa e a ordenada de $E(t)$, o ponto imagem de t pela função de Euler (que "enrola" a reta real ao longo do círculo). Portanto, seno e cosseno ficam definidas como funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Daí decorrem diretamente as principais propriedades destas funções, tais como: a relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, a periodicidade, o fato de que seno é uma função ímpar e cosseno é uma função par, bem como as relações alí enunciadas. Os aspectos dos gráficos de seno e cosseno também podem ser entendidos com base na análise do círculo trigonométrico.

Nunca é demais lembrar que é de fundamental importância *enfatizar as interpretações geométricas dessas relações e propriedades no círculo trigonométrico*, bem como *construí-las como generalização de propriedades previamente estabelecidas no contexto da trigonometria do triângulo retângulo*.

O exemplo da Seção 2 mostra que ser periódica e ser par ou ímpar são propriedades que não são apenas associadas às funções trigonométricas, embora sejam por elas compartilhadas. Isto é, uma função pode ser periódica sem ser par ou ímpar, assim como pode ser par ou ímpar sem ser periódica.

É de se ressaltar ainda que, como será observado, a função arco tangente estabelece uma correspondência biunívoca entre um intervalo aberto e limitado e o conjunto dos reais. Decorre daí o fato (que pode ser anti-intuitivo) de que qualquer intervalo limitado possui a mesma cardinalidade da reta.

19.2 As Funções Trigonométricas

As funções $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chamadas *função cosseno* e *função seno* respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Noutras palavras, $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $E(t)$ da circunferência unitária.

Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $t \in \mathbb{R}$, a relação fundamental

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *periódica* quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ chama-se o *período* da função f. As funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π.

Diz-se ainda que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *par* quando se tem $f(-t) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se se tem $f(-t) = -f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, a função f chama-se *ímpar*.

Exemplo. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função *dente-de-serra*, assim definida: $f(k) = 0$ se $k \in \mathbb{Z}$ e $f(k+\alpha) = \alpha$ quando $0 \leqslant \alpha < 1$ e $k \in \mathbb{Z}$. A função f é periódica, com período 1, mas não é par nem ímpar. Por outro lado, a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(t) = t^n$ (com $n \in \mathbb{N}$) é par se n é um número par e é uma função ímpar quando n é um número ímpar.

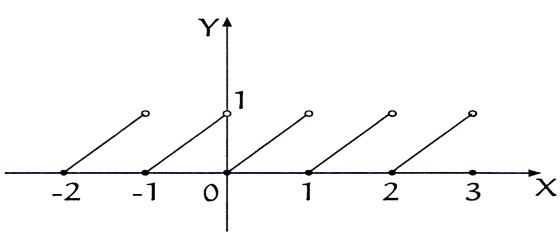


Figura 19.1: Função dente de serra

Para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$E(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

e

$$E(-t) = E(\cos(-t), \operatorname{sen}(-t)).$$

Mas, como vimos no fim da seção anterior, quando $E(t) = (x, y)$ tem-se $E(-t) = (x, -y)$. Isto significa que $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, cosseno é uma função par e seno é uma função ímpar.

De modo análogo, as outras quatro relações estabelecidas no final da seção anterior mostram que, para todo $t \in \mathbb{R}$, valem

$$\begin{aligned}
\cos(t+\pi) &= -\cos t, \quad \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t,\\
\cos(t+\frac{\pi}{2}) &= -\operatorname{sen} t, \quad \operatorname{sen}(t+\frac{\pi}{2}) = \cos t,\\
\cos(\frac{\pi}{2}-t) &= \operatorname{sen} t, \quad \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-t) = \cos t,\\
\cos(\pi - t) &= -\cos t, \quad \operatorname{sen}(t+\pi) = \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

As figuras abaixo mostram os gráficos de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$.

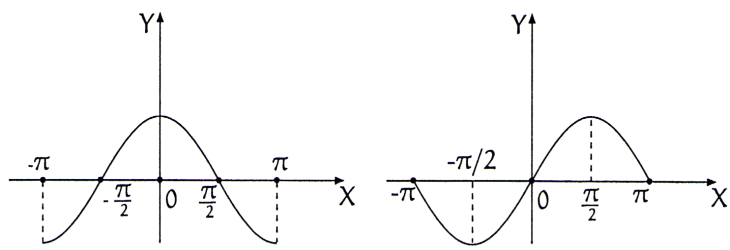


Figura 19.2: Gráficos das funções seno e cosseno

Alguns valores particulares das funções seno e cosseno podem ser obtidos mediante argumentos geométricos, alguns dos quais são interessantes exercícios, especialmente quando se usam as fórmulas de adição, que estabeleceremos na próxima unidade. Do ponto de vista numérico, entretanto, é claro que o modo mais eficiente de obter os valores dessas funções é usar uma calculadora, principalmente uma que opere com radianos e com graus.

Independentemente de calculadoras, é muito conveniente que se saiba, sem pensar muito, quais os valores de t que satisfazem as equações

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen} t = 0,\ \cos t = 0,\\
&\operatorname{sen} t = 1,\ \cos t = 1,\\
&\operatorname{sen} t = -1,\ \cos t = -1,\\
&\operatorname{sen} t = \cos t,\\
&\operatorname{sen} t = \frac{1}{2},\ \cos t = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e outras semelhantes.

Para interessantes exemplos, exercícios e um tratamento bastante completo dos assuntos aqui abordados, veja-se o livro "Trigonometria e Números Complexos", da Coleção do Professor de Matemática (SBM).

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber, tg $x = \operatorname{sen} x/\cos x$, cotg $x = \cos x/\operatorname{sen} x$, $\sec x = 1/\cos x$ e cossec $x = 1/\operatorname{sen} x$. Destas funções (chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante), a mais importante é a primeira. Cumpre observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

Assim, por exemplo, a função tangente, dada pela expressão tg $x = \operatorname{sen} x/\cos x$, tem como domínio o conjunto dos números reais que não são múltiplos ímpares de $\pi/2$ pois $\cos x = 0$ se, e somente se, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2} = k + \frac{\pi}{2}$ onde $k \in \mathbb{Z}$.

Assim, o domínio da função $x \mapsto$ tg x é formado pela reunião dos intervalos abertos $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Em cada um desses intervalos, por exemplo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a função tangente é crescente e, na realidade, $x \mapsto$ tg x é uma correspondência biunívoca entre um intervalo aberto de comprimento π e a reta inteira $\mathbb{R}$.

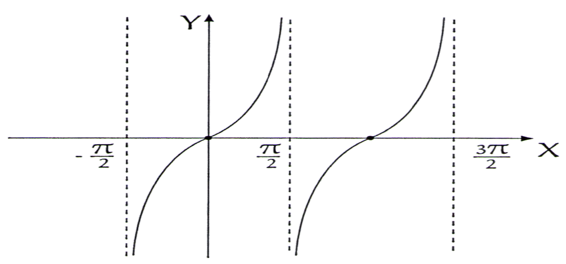


Figura 19.3: Gráfico da função tangente

A função tangente, embora não esteja definida para todo número real $\mathbb{R}$, pode ser considerada como uma função periódica, de período π, pois π é o menor número real positivo tal que tg $(x + \pi) =$ tg x para todo x no domínio da função.

A restrição da função tangente ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, sendo uma correspondência biunívoca, possui uma função inversa, chamada *arco tangente*, indicada com a notação arctg: $\mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a qual é uma correspondência biunívoca de domínio $\mathbb{R}$ e imagem igual ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

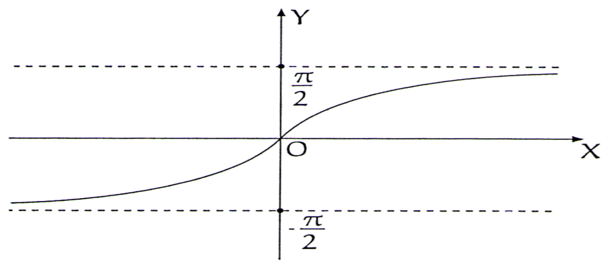


Figura 19.4: Gráfico da função arco tangente

Para todo ponto $P = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, com $x \neq 0$, se α é o ângulo do semi-eixo positivo $\overrightarrow{OX}$ com a semi-reta OP então

$$\frac{y}{x} = \text{tg } \alpha.$$

Isto é verdadeiro, por definição, quando P está sobre a circunferência unitária e vale também no caso geral por semelhança de triângulos.

Segue-se daí que se $y = ax + b$ é uma reta não-vertical, o coeficiente a é a tangente do ângulo α que o semi-eixo positivo $\overrightarrow{OX}$ faz com essa reta. Com efeito, se tomarmos $x_1 \neq x_2$ e pusermos

$$y_1 = ax_1 + b, \;\; y_2 = ax_2 + b,$$

teremos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg } \alpha.$$

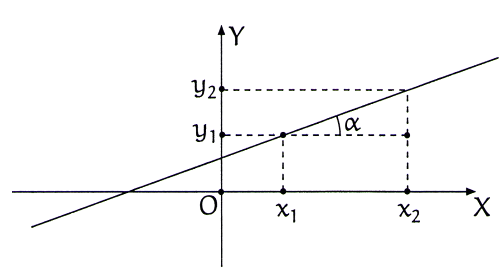


Figura 19.5: O coeficiente angular de uma reta

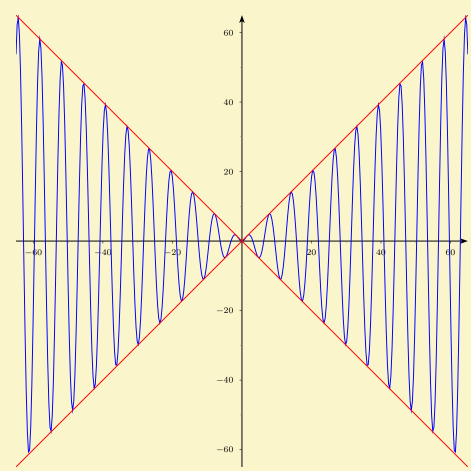
Exercícios Recomendados

1. Calcule:

   a) $\operatorname{sen} 345^o$; b) $\cos 210^o$; c) tg 135^o.

2. Determine os valores máximo e mínimo da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{2 + \operatorname{sen} x}$.

3. A figura abaixo representa o gráfico da função $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x \operatorname{sen} x$, traçado no intervalo $[-20\,\pi, 20\,\pi]$, juntamente com as retas $y = x$ e $y = -x$.

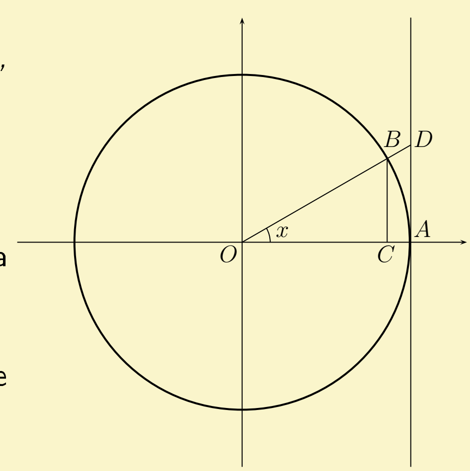


   (a) Explique por que o gráfico de f_1 fica limitado entre essas retas e indique todos os pontos em que o gráfico toca as retas.

   (b) Considere a seguinte afirmação: *Os máximos e mínimos locais da função f_1 ocorrem nos mesmos valores de x que os da função seno.* Esta afirmação é verdadeira? Justifique sua resposta.

   (c) Como você esperaria visualizar o gráfico da função $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f_2(x) = x^2 \operatorname{sen} x$? Justifique sua resposta.

4. *Na figura ao lado, os segmentos AD e OD representam, respectivamente,* tg x *e* $\sec x$.



   (a) Justifique a afirmação acima.

   (b) Qual é a interpretação dos sinais de tg x e $\sec x$ na figura ao lado?

   (c) Faça uma figura análoga para representar cotg x e cossec x, justificando a sua construção.

5. Encontre as três menores soluções positivas da equação

$$\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

6. Mostre que o perímetro do pentágono regular inscrito em um círculo unitário é dado por $10 \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$.

7. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1-\mathsf{tg}^2 x}{1+\mathsf{tg}^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$;

b) $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\mathsf{tg}\ x}{1+\mathsf{tg}\ x}$;

c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\mathsf{cossec}\ x - \mathsf{cotg}\ x} = 1 + \cos x$.

8. Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = m$, calcule $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(a\,x) + \operatorname{sen}(b\,x)$, em que a e b são constantes reais.

(a) Mostre que, se a e b são racionais, então f é periódica.

Sugestão: mostre que o período de $\operatorname{sen}(a\,x)$ é $\dfrac{2\pi}{a}$.

(b) A recíproca da afirmação do item anterior é verdadeira? Justifique sua resposta.

20

Funções Trigonométricas Continuação

Sumário

20.1 Introdução 2

20.2 As Fórmulas de Adição 2

20.3 A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos 8

20.4 Exercícios Recomendados 13

20.1 Introdução

Nesta Unidade, finalizamos o nosso estudo das funções trigonométricas. Na Seção 2, estabelecemos as conhecidas fórmulas para seno e cosseno da soma de dois arcos. Uma aplicação importante dessas fórmulas é a fórmula para a transformação de rotação no plano.

Outra aplicação apresentada é a parametrização racional do círculo unitário, para a qual é fornecida uma interpretação geométrica.

Na Seção 3, estabelecemos a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos, as quais correspondem a relações envolvendo lados e ângulos de um triângulo qualquer. A Lei dos Cossenos pode ser considerada como uma generalização do Teorema de Pitágoras para triângulos não necessariamente retângulos. A Lei dos Senos estabelece uma proporcionalidade entre os lados de um triângulo e os senos de seus ângulos opostos. Essas leis nos permitem determinar todos os elementos (lados e ângulos de um triângulo) em situações em que são conhecidos alguns destes.

20.2 As Fórmulas de Adição

As fórmulas clássicas que exprimem $\cos(\alpha+\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ em termos de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{sen}\beta$ podem ser demonstradas de vários modos. Daremos aqui a prova que nos parece a mais direta. Outras duas provas serão propostas nos Exercícios 3 e 4.

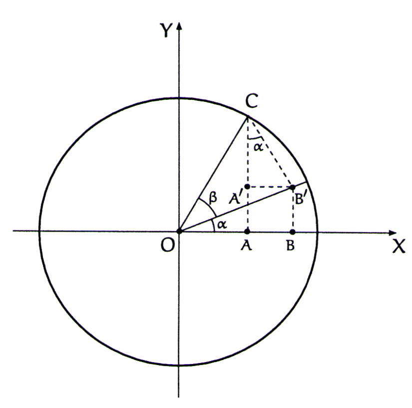


Figura 20.1: Adição de arcos

Na figura, onde $CB' \perp OB'$, temos $\overline{OA} = \cos(\alpha+\beta)$, $\overline{OB'} = \cos\beta$, $\overline{B'C} = \operatorname{sen}\beta$, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$ e $\overline{OB} = \cos\alpha\cdot\cos\beta$.

Logo

$$\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Noutras palavras,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Tomando $-\beta$ em vez de β na fórmula acima, como $\cos(-\beta) = \cos\beta$ e $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$, obtemos

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

Além disso, como

$$\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+t) = \cos t \quad \text{e} \quad \cos(\frac{\pi}{2}+t) = -\operatorname{sen} t,$$

a fórmula de $\cos(\alpha+\beta)$ nos dá também

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= -\cos\Big(\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta\Big)\\ &= -\cos\Big(\frac{\pi}{2}+\alpha\Big)\cos\beta + \operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}+\alpha\Big)\operatorname{sen}\beta,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

Daí resulta imediatamente que

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha.$$

As fórmulas para o seno e o cosseno do arco duplo são consequências diretas:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Como aplicação das fórmulas de adição, mostraremos como determinar as coordenadas do ponto $A' = (x', y')$, obtido do ponto $A = (x, y)$ por meio da rotação de ângulo θ em torno da origem de $\mathbb{R}^2$.

Chamemos de α o ângulo do eixo OX com o segmento OA e escrevamos $r = \overline{OA}$. Então $r = \overline{OA'}$ e se tem

$$x = r\cdot\cos\alpha, \quad y = r\cdot\operatorname{sen}\alpha, \quad x' = r\cdot\cos(\alpha+\theta), \quad y' = r\cdot\operatorname{sen}(\alpha+\theta).$$

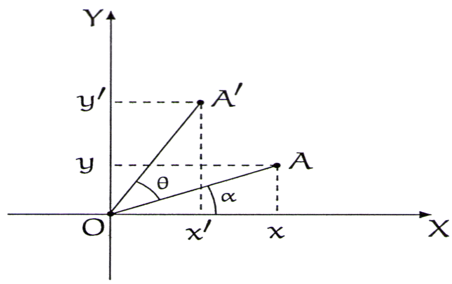


Figura 20.2: Rotação de um ângulo θ

As fórmulas de adição fornecem

$$x' = r\cos\alpha\cdot\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\,\mathrm{sen}\,\theta = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,$$
$$y' = r\cos\alpha\cdot\,\mathrm{sen}\,\theta + r\,\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\theta = x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

Portanto a rotação de ângulo θ em torno da origem é a função $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta).$$

Outra aplicação interessante das fórmulas de adição consiste em mostrar que $\cos\alpha$ e $\mathrm{sen}\,\alpha$ se exprimem como funções racionais de tg $\frac{\alpha}{2}$, fato que está intimamente ligado com a parametrização racional da circunferência unitária C, conforme veremos agora.

É um fato bastante conhecido, e muito fácil de constatar, que para todo número real x vale a igualdade

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 = 1.$$

Isto significa que, para todo $x \in \mathbb{R}$, os números dentro dos parênteses acima são respectivamente a abscissa e a ordenada de um ponto da circunferência unitária C, isto é, são o cosseno e o seno de um ângulo β. Além disso, todo número real x é a tangente de um (único) ângulo $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Logo a igualdade acima significa que, para cada um desses valores de α, existe um β tal que

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \cos\beta \quad \text{e} \quad \frac{2\ \mathrm{tg}\ \alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \mathrm{sen}\,\beta.$$

É fácil mostrar que $\beta = 2\alpha$ usando as fórmulas de $\cos 2\alpha$ e $\operatorname{sen} 2\alpha$. Basta substituir tg$\alpha$ por $\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$ no primeiro membro destas igualdades e fazer as simplificações óbvias para ver que

$$\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha \quad \text{e} \quad \frac{2\text{tg }\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Equivalentemente,

$$\cos\alpha = \frac{1-\ \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

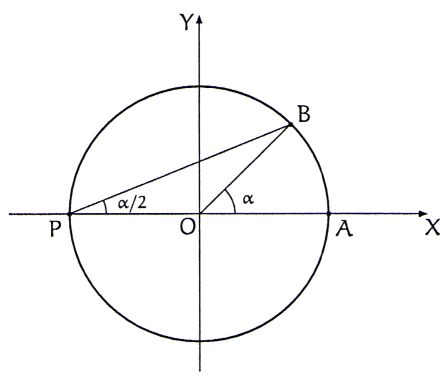


Figura 20.3: Parametrização racional do círculo

Dado o ponto arbitrário $B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ da circunferência unitária, como o ângulo inscrito $A\widehat{P}B$ é a metade do ângulo central $\alpha = A\widehat{O}B$ que subtende o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, vemos que tg $\frac{\alpha}{2}$ é a inclinação da reta PB, onde $P = (-1, 0)$. Mantendo o ponto P fixo e fazendo $\frac{\alpha}{2}$ variar em $(-\pi/2, +\pi/2)$, cada semirreta de inclinação igual a tg $\frac{\pi}{2}$ corta a circunferência unitária num único ponto $B = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Todos os pontos da circunferência podem ser obtidos assim, menos o próprio ponto P.

A correspondência

$$x \mapsto \Big(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\Big)$$

é uma parametrização racional de C. Para todo $x \in \mathbb{Q}$, o ponto que lhe corresponde tem ambas as coordenadas racionais.

Exercícios Recomendados

1. Use as fórmulas de seno e cosseno da soma para determinar os senos e cossenos dos seguintes ângulos (medidos em radianos): $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{3\pi}{8}$ e $\dfrac{5\pi}{12}$.

2. Obtenha fórmulas para tg$(\alpha+\beta)$ e para $\sec(\alpha+\beta)$, em função de tg α e tg β.

3. Nesta Unidade, foi apresentada uma demonstração para as fórmulas de cosseno e seno da soma de dois arcos. Nessa demonstração, são dados os ângulos α e β os pontos A' são B' determinados por *construção*: primeiro, determinamos B' como o (único) ponto tal que $CB' \perp OB'$; em seguida, determinamos A' como o ponto tal que $A'B'C$ é um triângulo retângulo em A'. Diretamente das definições de cosseno e seno, segue que: $\overline{OA} = \cos(\alpha+\beta)$; $\overline{OB'} = \cos\beta$; $\overline{B'C} = \operatorname{sen}\beta$. Neste exercício, propomos que você complete os detalhes dos demais passos que levam à prova das duas fórmulas.

   (a) Justifique por que podemos afirmar que $\widehat{C} = \alpha$.

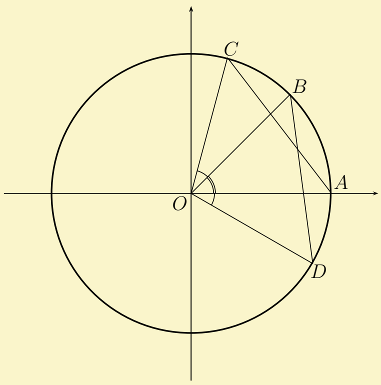
   (b) Qual é a razão entre as medidas de $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C}$? Justifique sua resposta.

   (c) Conclua que $\overline{A'B'} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$.

   (d) Qual é a razão entre as medidas de $\overline{A'C}$ e $\overline{B'C}$? Justifique sua resposta.

   (e) Use o item anterior e a semelhança dos triângulos $A'B'C$ e OBB' para concluir que $\overline{OB} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.

4. Considere dois ângulos α e β, $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Na figura a seguir, vemos o círculo unitário. Os pontos A, B, C e D são tais que $\alpha = \widehat{AOB}$, $\beta = \widehat{BOC} = \widehat{AOD}$.



(a) Escreva as coordenadas de A, B, C e D.

(b) Qual é a relação entre os triângulos AOC e BOD?

(c) Determine $\overline{AC}$, em função das coordenadas de A e C.

(d) Determine $\overline{BD}$, em função das coordenadas de B e D.

(e) Use os ítens anteriores para obter a fórmula para $\cos(\alpha + \beta)$.

5. (a) Mostre que:

$$\frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \qquad \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

(b) Explique por que, a partir daí, podemos concluir que, se α e β são tais que:

$$\frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \cos\beta \qquad \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \operatorname{sen}\beta$$

então $\beta = 2\,\alpha$ (como afirmado no decorrer desta Unidade).

20.3 A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos

Dado o triângulo ABC, sejam a, b, c as medidas dos lados BC, AC e AB respectivamente. Seja ainda $h = \overline{AP}$ a altura baixada de A sobre o lado BC. Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto P pertença ao segmento BC ou esteja sobre seu prolongamento.

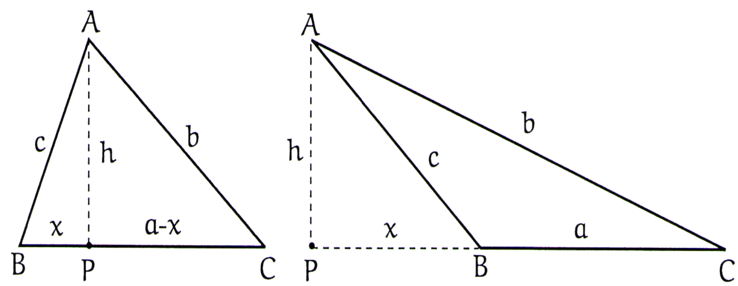


Figura 20.4: Lei dos cossenos

No primeiro caso, seja $x = \overline{BP} = c \cdot \cos \widehat{B}$. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos ABP e APC fornece as igualdades

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2 \text{ e} \\ b^2 &= h^2 + (a-x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax \\ &= h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}. \end{aligned}$$

Comparando estas igualdades obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

No segundo caso, $x = \overline{BP} = c \cdot \cos(\pi - \widehat{B}) = -c \cdot \cos \widehat{B}$. (Note que $\cos \widehat{B} < 0$, logo $-c \cdot \cos \widehat{B}$ é positivo.) Novamente Pitágoras, aplicado aos triângulos APB e APC, nos dá

$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + x^2, \quad \text{e} \\ b^2 &= h^2 + (a+x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax \\ &= h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}. \end{aligned}$$

Daí resulta, como antes, que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}.$$

Portanto a igualdade vale em qualquer caso. Ela é a *lei dos cossenos*, da qual o Teorema de Pitágoras é um caso particular, que se tem quando $\widehat{B}$ é um ângulo reto.

Evidentemente, tem-se também

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A}$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}.$$

As mesmas figuras nos dão, no primeiro caso,

$$h = c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B} = b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C},$$

logo

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

No segundo caso temos

$$h = b \cdot \operatorname{sen} \widehat{C}$$

e

$$h = c \cdot \operatorname{sen} (\pi - \widehat{B}) = c \cdot \operatorname{sen} \widehat{B},$$

logo, novamente:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}},$$

como antes.

Se tomarmos a altura baixada do vértice B sobre o lado AC, obteremos, com o mesmo argumento, a relação

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

Podemos então concluir que, em qualquer triângulo, tem-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \widehat{C}}.$$

Esta é a *lei dos senos*. Ela diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, isto é, é a mesma seja qual for o lado escolhido. Há uma interpretação geométrica para a razão $a/\operatorname{sen} \widehat{A}$. Ela é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

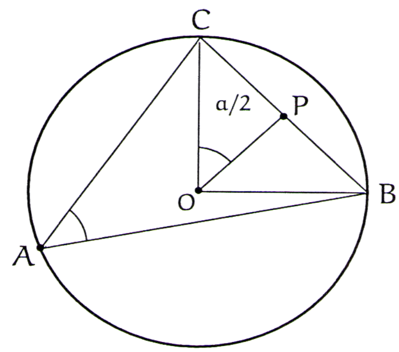


Figura 20.5: Interpretação geométrica da Lei dos Senos

Com efeito, a perpendicular OP, baixada do centro do círculo circunscrito sobre o lado BC é também mediana do triângulo isósceles OBC e bissetriz do ângulo $C\widehat{O}B$, que é igual a $2\widehat{A}$. Logo $C\widehat{O}P = \widehat{A}$ e daí resulta que $\frac{a}{2} = r \operatorname{sen} \widehat{A}$, ou seja, $\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = 2r =$ diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme os casos clássicos de congruência de triângulos.

Problema. Determinar, no triângulo ABC, os lados a, b, c e os ângulos A, B, C nos seguintes casos:

1. *São dados os lados* a, b, c.

Então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A},$$

logo

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

e isto nos permite determinar $\widehat{A}$.

Analogamente, obtém-se o ângulo $\widehat{B}$. O ângulo $\widehat{C}$ pode ser mais facilmente obtido a partir da relação $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2$ retos.

Observação 1

Para que exista um triângulo com lados $a \leqslant b \leqslant c$ é necessário e suficiente que se tenha $c < a + b$.

2. *São dados os lados a, b e o ângulo $\widehat{C}$.*

Neste caso, o lado c se obtém pela lei dos cossenos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}},$$

recaindo-se assim no caso anterior.

3. *São dados os ângulos $\widehat{A}, \widehat{B}$ e o lado c.*

Determina-se o ângulo $\widehat{C}$ pela igualdade $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 2$ retos e o lado a pela lei dos senos, segundo a qual $a/\operatorname{sen}\widehat{A} = c/\operatorname{sen}\widehat{C}$, logo $a = c \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}/\operatorname{sen}\widehat{C}$. Agora tem-se os lados a, c e o ângulo $\widehat{B}$ formado por eles. Recai-se assim no caso anterior.

Para que $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ sejam ângulos de um triângulo, é necessário e suficiente que $\widehat{A} + \widehat{B} < 2$ retos.

Observação 2

4. *São dados os lados a, b, com $a > b$, e o ângulo $\widehat{A}$.*

Este é o pouco conhecido quarto caso de congruência de triângulos, segundo o qual dois triângulos são congruentes quando têm dois lados iguais e um ângulo igual oposto ao maior desses dois lados. Note-se que $\widehat{A} > \widehat{B}$, logo o ângulo $\widehat{B}$ é agudo.

Aqui se usa novamente a lei dos senos. A partir da proporção

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} \quad \text{obtém-se} \quad \operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}.$$

Como $b < a$, vemos que $\frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}$ é um número positivo menor do que 1, logo existe um único ângulo $\widehat{B}$, menor do que dois retos, cujo seno é igual a $\frac{b}{a}\operatorname{sen}\widehat{A}$. Em seguida, determina-se o ângulo $\widehat{C}$ pela igualdade $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 2$ retos. Agora, conhecendo a, b e $\widehat{C}$, recai-se no caso 2.

Do ponto de vista em que nos colocamos, o triângulo ABC é dado, tratando-se apenas de calcular 3 dos seus elementos quando são dados outros 3. Por isso não cabia acima indagar se $\widehat{A} + \widehat{B} < 2$ retos, antes de calcular $\widehat{C}$. Entretanto, é verdade que, dados $a > b$ e $\widehat{A} < 2$ retos, existe um triângulo ABC tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{A}$ é o ângulo dado. Para ver isto, tome um

Observação 3

segmento AC de comprimento b e uma semirreta AX tal que o ângulo $C\widehat{A}X$ seja igual ao ângulo $\widehat{A}$ dado. Com centro no ponto C, trace uma circunferência de raio a. Como $b < a$, o ponto A pertence ao interior dessa circunferência, logo a semirreta AX corta a circunferência num único ponto B, que é o terceiro vértice do triângulo procurado.

A figura abaixo ilustra esta última situação.

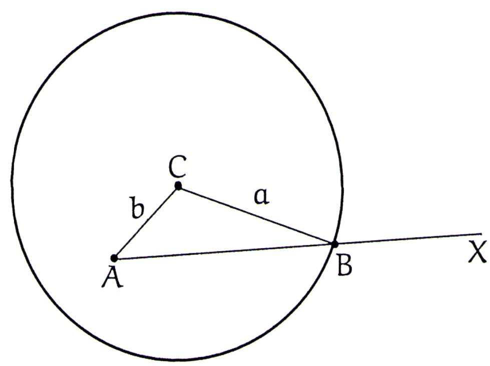


Figura 20.6: Quarto caso de congruência de triângulos

20.4 Exercícios Recomendados

1. No problema proposto no texto, são apresentadas algumas situações em que o fato de serem conhecidos alguns elementos de um triângulo dado permite-nos determinar todos os demais por meio da aplicação da Lei dos Cossenos ou da Lei dos Senos. Você observa alguma analogia entre essas situações e os assim chamados "casos de congruência de triângulos"? Essa analogia não é casual. Cada um dos casos de congruência de triângulos estabelece um conjunto de condições mínimas suficientes para um triângulo fique determinado, isto é, condições que garantam que não possa existir outro triângulo satisfazendo essas mesmas condições que não seja congruente ao triângulo dado. De forma análoga, em cada uma das situações do problema do texto são dadas condições suficientes para o que o triângulo dado fique (unicamente) determinado.

   Na mesma linha desse problema, considere um triângulo ABC, com lados a, b e c e vértices respectivamente opostos A, B e C.

   (a) Se são dados o lado a e o ângulo A, você espera ser capaz de determinar os demais elementos do triângulo por meio da Lei dos Cossenos e/ou da Lei dos Senos? Justifique sua resposta.

   (b) Se são dados os lados a, b e c (satisfazendo as condições de existência de triângulos) e o ângulo A (com uma medida qualquer), você espera ser capaz de determinar os demais elementos do triângulo por meio da Lei dos Cossenos e/ou da Lei dos Senos? Justifique sua resposta.

Exercícios Resolvidos de MA 11

Unidades 1 e 2

A seguir, apresentamos alguns exercícios resolvidos de forma completa. Cabe observar, que existem outras maneiras de se resolver um mesmo exercício e, assim, as soluções apresentadas não são únicas.

Exercícios Recomendados

3. Para provarmos as equivalências propostas, basta provarmos que

$$A \cup B = B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B.$$

Antes, observemos que se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, então as implicações acima são verdadeiras. Suponhamos, então, ambos A e B não vazios.

$A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$: Tome $x \in A$. Então, $x \in A \cup B$. Como $A \cup B = B$, segue que $x \in B$. Isto mostra que $A \subset B$.

$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$: Para provarmos que $A \cap B = A$, temos que mostrar $A \cap B \subset A$ e $A \subset A \cap B$. Sendo a primeira implicação clara, provemos a segunda. De fato, tome $x \in A$. Por hipótese, $A \subset B$. Assim, $x \in B$. Portanto, $x \in A$ e $x \in B$, ou seja, $x \in A \cap B$, provando o desejado.

$A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$: Para provarmos que $A \cup B = B$, temos que provar $A \cup B \subset B$ e $B \subset A \cup B$. Como a segunda implicação é clara, vamos provar a primeira. De fato, tome $x \in A \cup B$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in B$, já temos o desejado. Se $x \in A$, então $x \in A \cap B$, por hipótese. Daí, $x \in B$.

4. Claramente, ambos os itens (a) e (b) se verificam para $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$. Suponhamos, então, ambos A e B não vazios.

(a) Como

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\iff x \notin (A \cup B) \iff x \notin A \text{ e } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ e } x \in B^c \iff x \in A^c \cap B^c, \end{aligned}$$

segue que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(b) Como

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\iff x \notin (A \cap B) \iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \iff x \in A^c \cup B^c, \end{aligned}$$

segue que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

7. Um exemplo de:

- implicação verdadeira, com recíproca verdadeira: Se x é um número real tal que que $x^2 = 0$, então x é o número real 0;

- implicação verdadeira, com recíproca falsa: Se Q é um quadrado, então Q é um polígono regular.

- implicação falsa, com recíproca verdadeira: Se x é um número complexo, então x é um número real.

- implicação falsa, com recíproca falsa: Se R é um retângulo, então R é um polígono regular.

8. Inicialmente, observemos que para a equação $\sqrt{x} + 2 = x$ ter sentido em $\mathbb{R}$, devemos assumir $x \geq 0$. Assim, $(\sqrt{x})^2 = |x| = x$. Então:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2 = x \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \\ &\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Uma verificação fácil mostra que $x = 1$ é a *raiz estranha* a que o enunciado do exercício se refere. De fato, a equação $\sqrt{x} + 2 = x$ não é satisfeita para $x = 1$. Isto se explica, pois a implicação $\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-2)^2$ não é reversível, já que

$$\sqrt{(\sqrt{x})^2} = \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \sqrt{x} = |x - 2|$$

e não igual $x - 2$.

Exercícios Suplementares

2.

(a) 1: $A = U$. (a) 2: $A \neq \varnothing$.

(b) Negação de 1: Existe algum x que não satisfaz a condição P(x). Equivalentemente, $A^c \neq \varnothing$.

(b) Negação de 2: Para todo x, x não satisfaz a condição P(x). Equivalentemente, $A = \varnothing$.

(c) 1: Falso (Pois, $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$);

2: Falso (Tome $n = 1$);

3: Falso (Tome $x = 1$);

4: Verdadeiro (De fato, $\mathbb{N}$ é ilimitado);

5: Falso (Pois, $\mathbb{R}$ é ilimitado).

Negação de

1: Para todo número real x, $x^2 \neq -1$;

2: Existe um número inteiro n tal que $n \geq n^2$;

3: Existe um número real x tal que $x \leq 1$ e $x^2 \geq 1$,

4: Existe um número real x tal que para todo número natural n temos $n \leq x$.

5: Para todo número natural n, existe um número real x tal que $n \leq x$.

6. Suponhamos que exista uma tal função, ou seja, que exista uma função $f : A \longrightarrow \wp(A)$ sobrejetiva. Considere $B = \{x \in A; x \notin f(x)\}$. Como $B \in \wp(A)$ e f é sobrejetiva, existe $b \in A$ tal que $f(b) = B$. Pode b pertencer a B? Se $b \in B$, então $b \notin f(b) = B$, o que é um absurdo. Então, deve ser o caso de $b \notin B$. Mas, neste caso, $b \in f(B) = B$, um absurdo novamente. Portanto, devemos admitir que uma tal função não existe.

Exercícios Resolvidos de MA 11

Unidades 7 e 8

A seguir, apresentamos alguns exercícios resolvidos de forma completa. Cabe observar, que existem outras maneiras de se resolver um mesmo exercício e, assim, as soluções apresentadas não são únicas.

Unidade 7

Exercícios Recomendados

2. (a) A primeira implicação está incorreta. De fato, $\frac{5x+3}{2x+1} > 2$ implica $5x + 3 > 2(2x + 1)$ se, e somente se $2x + 1 > 0$.

(b) Todas as implicações estão corretas. Observemos que a primeira implicação está correta, pois $x^2 + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. (a) Temos que

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + ab < bc + ab\\ &\Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\Rightarrow ad < bc \Rightarrow ad + cd < bc + cd\\ &\Rightarrow d(a+c) < c(b+d) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},\end{aligned}$$

provando o desejado.

(b) Se somarmos os numeradores e os denominadores dos números racionais positivos $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, o item anterior mostra que obtemos um número racional entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. De fato, utilizando o item (a), podemos provar que existe uma infinidade de números racionais entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.

7. A primeira pergunta do exercício equivale a perguntar se $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$ é não vazia. Vejamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n] = \{0\}$.

Ora, claramente, $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$.

Para provarmos a outra inclusão, tome $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$. Então, $x > 0$ ou $x = 0$. Suponhamos $x > 0$. Como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n_0$, ou seja, $x > \frac{1}{n_0}$. Mas, isto equivale a $x \notin [0, 1/n_0]$, contradizendo o fato de $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0, 1/n]$. Consequentemente, x só pode ser o número real 0.

A segunda pergunta equivale a perguntar se

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n) \neq \varnothing.$$

Vejamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n) = \varnothing$.

Suponhamos que exista $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0, 1/n)$, ou seja, que exista $x \in (0, 1/n)$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Como $x > 0$, pelo que vimos anteriormente, existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin (0, 1/n_0)$, o que é uma contradição.

Portanto, no caso de considerarmos os intervalos abertos, não existe um número comum a todos eles.

Exercícios Suplementares

2. (a) Falso. Para vermos que a afirmativa é falsa, tome $x = -8$. Temos que $-8 < 7$, mas $|-8| > 7$.

(b) Falso. Para verificarmos que a afirmativa é falsa, tome $x = 3,5$. Temos que $0,5 = |3,5 - 3| = |3,5 - 4|$.

(c) Falso. Note que $|2(5/2) + y| = 5 \Leftrightarrow |5 + y| = 5 \Leftrightarrow y = 0$ ou $y = -10$, mostrando que para $x = \frac{5}{2}$ não existe $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

Unidade 8

Exercícios Recomendados

5. Temos que o custo da corrida é dado pela função $y = ax+b$, onde a denota o preço da corrida, x denota os quilômetros rodados e b denota a bandeirada. Se o percurso de uma corrida dobra, temos $a(2x) + b$, que é menor do que $2(ax + b)$.

8. Seja $f\colon x \in \mathbb{R} \to ax+b \in \mathbb{R}$ uma função afim. Como

$$\mathrm{graf} f = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\},$$

devemos mostrar que toda reta não vertical r é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ da forma $\{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\}$ para certos a e b em $\mathbb{R}$. Ora, seja r uma reta não vertical em $\mathbb{R}^2$. Sabemos, da Geometria Analítica, que $P = P_0 + tv, t \in \mathbb{R}$, com v não nulo, é uma equação paramétrica de r. Colocando $P = (x, y)$, $P_0 = (x_0, y_0)$ e $v = (x_1, y_1)$, obtemos

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(x_1, y_1), t \in \mathbb{R}$$

ou, equivalentemente, $x = x_0 + tx_1$ e $y = y_0 + ty_1$ para $t \in \mathbb{R}$.

Como r é uma reta não vertical, o vetor diretor v é da forma (x_1, y_1), com x_1 diferente de zero. Assim, podemos escrever $y = y_0 + \frac{x-x_0}{x_1} y_1 = \frac{y_1}{x_1} x + (y_0 - \frac{x_0 y_1}{x_1})$. Ou seja, $r = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\}$, com $a = \frac{y_1}{x_1}$ e $b = (y_0 - \frac{x_0 y_1}{x_1})$.

11. Seja h a razão da PA dada por a_1, a_2, ..., a_i,... . Temos que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$a_i = f(i) = a_1 + (i-1)h.$$

(a) Denotemos por $Trap$ um trapézio com altura de medida a e com lados paralelos de medida b e c. Sabemos que a área de $Trap$ é dada por $\frac{ab+ac}{2}$. Denote por $ATrap_i$ a área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações $x = i - 1/2$ e $x = i + 1/2$. Então, $ATrap_i = \frac{ab+ac}{2}$, sendo $a = 1 = (i+1/2) - (i-1/2)$, $b = f(i-1/2) = a_1 + (i-3/2)h$ (pela definição de f) e $c = f(i+1/2) = a_1 + (i-1/2)h$ (pela definição de f). Assim,

$$ATrap_i = \frac{a_1 + (i-3/2)h + a_1 + (i-1/2)h}{2} = a_1 + (i-1)h = a_i.$$

(b) Pelo item (a), $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = ATrap_1 + ATrap_2 + \cdots + ATrap_n$. Denote por $ATrap$ a área do trapézio delimitado pelo eixo OX, o gráfico de f e as retas verticais $x = 1 - 1/2$ e $x = n + 1/2$. Como $ATrap_1 + ATrap_2 + \cdots + ATrap_n = ATrap$, segue que $S = ATrap$.

(c) Segue do item (b) que $S = ATrap$. Pela fórmula da área de um trapézio,

$$ATrap = \frac{n[f(1/2) + f(n+1/2)]}{2}.$$

Como $f(1/2) = a_1+(1/2-1)h = a_1-h/2$ e $f(n+1/2) = a_1+(n+1/2-1)h = a_1 + (n-1)h + h/2 = a_n + h/2$, temos que

$$S = ATrap = n/2[a_1 - h/2 + a_n + h/2] = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Exercícios Resolvidos de MA 11

Unidades 9 e 10

A seguir, apresentamos alguns exercícios resolvidos de forma completa. Cabe observar, que existem outras maneiras de se resolver um mesmo exercício e, assim, as soluções apresentadas não são únicas.

Unidade 9

Exercícios Recomendados

1. Como estamos supondo que a escada tem velocidade constante, seja $y = ax + b$ a função que modela a situação proposta no problema, onde x denota o número de degraus que uma pessoa sobe e y denota o tempo, em segundos, gasto para esta pessoa subir a escada. Pelos dados do problema, os pontos $(5, 30)$ e $(10, 20)$ pertencem ao gráfico da função $y = ax+b$. Assim, temos $a = -2$ e $b = 40$. Observe que a função $y = -2x + 40$ é decrescente, pois quanto mais degraus a pessoa sobe, menos tempo ela leva para subir a escada. Para $x = 0$, temos que a pessoa não subiu degrau algum. Neste caso, $y = 40$, ou seja, o tempo normalmente gasto para subir a escada é de 40 segundos. O número de degraus que a escada tem é dado por $y = 0$. Para este valor de y temos $x = 20$, mostrando que a escada tem 20 degraus.

2. Vamos supor que Augusto pagou um só estacionamento para todas as lojas. Seja x a quantia, em reais, que Augusto tinha inicialmente. Na loja 1, ele gastou $\frac{x}{2}$ reais. Então, na loja 2, ele gastou $\frac{x}{4}$ reais. De um modo geral, na loja n, ele gastou $\frac{x}{2^n}$ reais. Como ele fez compras em cinco lojas, $n = 5$. Ou seja, na loja 5, ele gastou $\frac{x}{32}$ reais. Como, na saída, ele pagou dois reais de estacionamento, a quantia y com a qual Augusto ficou no final é dada por $y = \frac{x}{32} - 2$. Como $y = 20$, temos $20 = \frac{x}{32} - 2$, ou seja, $x = 704$, mostrando que Augusto tinha inicialmente 704 reais.

5. Sejam x_1 e x_2 as notas de um aluno na primeira prova e na segunda prova, respectivamente. Seja M_p a média parcial do aluno. Como a primeira prova tem peso 2 e a segunda prova tem peso 3, $M_p = \frac{2x_1+3x_2}{5}$. Se $M_p < 7.0$, o aluno faz prova final. João obteve $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$. Logo, a média parcial de João é 5.2 e, portanto, João fez prova final. Sejam x_3 a nota que João precisa tirar na prova final e M_f a média final de João. Sabendo-se que, para aprovação, M_f deve ser maior do que 5, devemos ter $M_f = \frac{3M_p+2x_3}{5} \geq 5$. Como João obteve $M_p = 5.2$, substituindo na desigualdade acima obtemos $x_3 \geq 4.7$. Portanto, João deve obter 4.7 na prova final para ser aprovado.

Exercícios Suplementares

4. Este problema é um problema de existência e unicidade. Vamos, inicialmente, provar que existe uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_i) = f(b_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para isto, seja h a razão da PA $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ e seja k a razão da PA $(b_1, b_2, ...b_n, ...)$. Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_i = a_1 + ih$ e $b_i = b_1 + ik$. Já aprendemos que uma função afim fica determinada por dois pontos. Assim, procuramos uma função afim tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_1 + ih) = b_1 + ik$ para algum i fixado diferente de 1. Uma tal função é dada, então, por $f(x) = \frac{kx+(b_1h-a_1k)}{h}$, onde $x \in \mathbb{R}$.

A unicidade segue do fato de existir uma única função afim tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_1 + ih) = b_1 + ik$ para algum i fixado diferente de 1.

5. Vamos mostrar que se tem $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$. Ora, fixe $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então, x é racional ou x é irracional. Se x é racional, então nx é racional. Portanto, $f(nx) = 2(nx) = n(2x) = nf(x)$. Se x é irracional, então nx é irracional. Portanto, $f(nx) = 3(nx) = n(3x) = nf(x)$.

Se f fosse linear, então f seria da forma $f(x) = cx$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde c é um número real fixado. Dessa forma, teríamos $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer x e $t \in \mathbb{R}$. Tome $t = \sqrt{2}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Temos $f(tx) = f(1) = 2$ e $tf(x) = \sqrt{2}f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3$. Mas, isto contradiz o fato de termos $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer x e $t \in \mathbb{R}$. Portanto, f não é linear.

6. Para todo $x \in \mathbb{R}$, como $\text{sen}[2\pi(x + 1)] = \text{sen}(2\pi x)$, segue-se que $f(x+1)-f(x) = 7$, portanto a sequência $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n), \ldots$ é uma progressão aritmética de razão 7. A maneira mais rápida de ver que f é crescente é usar Cálculo Diferencial. A derivada de f é $f'(x) = 7 + 2\pi\cos(2\pi x)$.

Como $|2\pi\cos(2\pi x)| \leq 2\pi < 7$, temos que $f'(x) > 0$ para todo x, logo f é crescente.

Unidade 10

Exercícios Recomendados

2. Temos que o sinal de a indica se a concavidade da parábola está para baixo ou para cima. Se a concavidade da parábola está para baixo, o sinal de a é negativo e se a concavidade da parábola está para cima, o sinal de a é positivo. Como $c = f(0)$, o sinal de c é dado pelo sinal do valor onde a parábola corta o eixo vertical. E como a abscissa do vértice é $\frac{-b}{2a}$, a e b têm sinais iguais quando a abscissa do vértice é negativa e têm sinais contrários quando a abscissa do vértice é positiva. Assim:

- na primeira parábola: $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$;
- na segunda parábola: $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$;
- na terceira parábola: $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$.

3. (a) Note que $f(x) = x^2 - 8x + 23 = x^2 - 8x + 16 + 7 = (x-4)^2 + 7$. Não há raízes reais, o eixo de simetria é a reta $x = 4$ e o valor mínimo é 7.
(b) Note que $f(x) = 8x - 2x^2 = -2(x^2 - 4x) = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) = -2[(x-2)^2 - 4] = -2(x-2)^2 + 8$. O eixo de simetria é a reta $x = 2$, o valor máximo é 8 e as raízes são os valores para os quais $(x-2)^2 = 4$, ou seja, $x - 2 = 2$ ou $x - 2 = -2$. As raízes são $x_1 = 4$ e $x_2 = 0$.

Exercícios Suplementares

1. Se b é ímpar, podemos escrevê-lo como sendo $2y + 1$, onde $y \in \mathbb{Z}$. Daí, $\Delta = (2y+1)^2 - 4ac = 4[y(y+1) - ac] + 1$. Observemos que $y(y+1)$ é um número par, já que temos o produto de dois números consecutivos. Observamos também que ac é ímpar, já que o produto de dois fatores ímpares sempre é ímpar. Coloquemos $p = y(y+1) - ac$. Como p é a soma de um número ímpar e um número par, p é ímpar. Assim, $\Delta = 4p+1$ é um número ímpar.

Suponhamos, por absurdo, que Δ seja um quadrado perfeito. Logo, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s^2 = \Delta$. Como Δ é ímpar, segue que s é ímpar, digamos $s = 2m+1$, com $m \in \mathbb{Z}$. Consequentemente,

$$s^2 = 4p+1 \Leftrightarrow (2m+1)^2 = 4p+1 \Leftrightarrow m^2+m = p \Leftrightarrow m(m+1) = p.$$

Mas, $m(m+1) = p$ é um absurdo, pois $m(m+1)$ é par e p é ímpar. Assim, concluímos que Δ não é um quadrado perfeito e, consequentemente, as raízes de $ax^2+bx+c=0$ não são números racionais.

Exercícios Resolvidos de MA 11

Unidades 11 e 12

A seguir, apresentamos alguns exercícios resolvidos de forma completa. Cabe observar, que existem outras maneiras de se resolver um mesmo exercício e, assim, as soluções apresentadas não são únicas.

Unidade 11

Exercícios Recomendados

2. Seja $s(t)$ a posição do veículo no instante t. Pelos dados do problema, temos $s(0) = 0$, $s(1) = 30$, $s(2) = 55$ e $s(3) = 75$. Como $s(t) = at^2 + bt + c$, temos $c = 0$, $a + b + c = 30$, $4a + 2b + c = 55$ e $9a + 3b + c = 75$, que são as equações lineares de um sistema linear nas variáveis a, b e c. Resolvendo este sistema, obtemos $a = -2,5$, $b = 32,5$ e $c = 0$.

a) Como o sistema tem solução, os dados são compatíveis com a hipótese da força constante.

b) Como $s(t) = -2,5t^2 + 32,5t$, segue que $s(5) = -2,5.25 + 32,5.5 = 100$, mostrando que o veículo está a 100m após $5s$ do ínicio da frenagem.

c) A velocidade $v(t)$ é dada por $s'(t)$ e $s(t) = -2,5t^2 + 32,5t$. Assim, $v(t) = -5t + 32,5$. A velocidade é nula quando $t = 6,5$. Portanto, o veículo demora $6,5$ segundos para chegar ao repouso.

d) A velocidade do veículo no instante em que o motorista começou a aplicar os freios é dada por $v(0)$, ou seja, $32,5m/s$.

Exercícios Suplementares

2. No instante t, P está em $(2t-2,0)$ e Q está em $(0,t)$. Se d denota a distância entre P e Q, então

$$d = \sqrt{(2t-2)^2 + t^2} = \sqrt{5t^2 - 8t + 4}.$$

Como d será mínima quando d^2 o for, devemos encontrar o valor de t para o qual a parábola

$$y = 5t^2 - 8t + 4$$

assume valor mínimo. Mas, isto se dá no vértice da parábola. Portanto, $t = -\frac{-8}{2(5)} = 0,8$ e, consequentemente, $d = \sqrt{0,8} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. Sejam x o número de passageiros que ocupam os lugares no avião e r a receita da companhia. Pelos dados do problema,

$$r = x[800 + 10(100 - x)].$$

Portanto, $r = -10x^2 + 1800x$. Observe que o valor máximo é dado pelo vértice da parábola, gráfico da função r. Portanto, $x = -\frac{1800}{2(-10)} = 90$.

6. Seja x o preço de redução do valor do ingresso. Pelos dados do problema, a receita r é dada por

$$r = (90 - x)(300 + 100x),$$

ou, equivalentemente,

$$r = -100x^2 + 600x + 2700.$$

A receita r será máxima para o valor de x que corresponde a abscissa do vértice da parábola determinada pela função r. Assim, $x = \frac{-600}{2(-100)} = 3$ e, portanto, o preço do ingresso deve ser 6 reais.

7. Temos $f(0) = c$, $f(1) = a+b+c$ e $f(2) = 4a+2b+c$. Equivalentemente, $c = f(0)$, $a+b = f(1) - f(0)$ e $4a+2b = f(2) - f(0)$. O valor de c já está determinado e das últimas igualdades anteriores, obtemos $a = \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2}$ e $b = \frac{-3f(0)+4f(1)-f(2)}{2}$.

18. Seja x o número de alunos da turma. Então, a parte de cada um seria $\frac{405}{x}$ reais. Como dois alunos desistiram na última hora, o custo da excursão, para cada aluno, ficaria em $\frac{405}{x-2}$ reais. Como, com a desistência dos dois alunos, a parte de cada um sofreu um aumento de um real e vinte centavos, temos que

$$\frac{405}{x-2} = \frac{405}{x} + 1,2,$$

donde $x^2 - 2x - 675 = 0$. Como a única raiz positiva desta equação é 27, segue que a turma tinha 27 alunos.

Unidade 12

Exercícios Recomendados

3. a) Vamos provar que α é uma raiz simples de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$ e $p^{'}(\alpha) \neq 0$.

Suponhamos que α é uma raiz simples de $p(x)$. Então, por definição, $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = 0$ e, como, $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, segue que $p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$. Reciprocamente, suponhamos $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$. Então, $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, pois α é uma raiz de $p(x)$. Agora, como $p'(x) = (x-\alpha)'q(x) + (x-\alpha)q'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, segue que $p'(\alpha) = q(\alpha) \neq 0$.

b) Vamos provar que α é uma raiz dupla de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$.

Suponhamos que α é uma raiz dupla de $p(x)$. Então, por definição, $p(x) = (x-\alpha)^2 q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$. Daí, $p(\alpha) = 0$. Como $p'(x) = 2(x-\alpha)q(x) + (x-\alpha)^2 q'(x)$ e $p''(x) = 2q(x) + 4(x-\alpha)q'(x) + (x-\alpha)^2 q''(x)$, segue que $p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) = 2q(\alpha) \neq 0$. Reciprocamente, suponhamos $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ e $p''(\alpha) \neq 0$. Então, $p(x) = (x-\alpha)q(x)$, pois α é uma raiz de $p(x)$. Como $p'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$, segue que $q(\alpha) = p'(\alpha)$. Como $p'(\alpha) = 0$, segue que $q(\alpha) = 0$, mostrando que α é uma raiz de $q(x)$ e, portanto, $q(x)$ é divisível por $(x-\alpha)$. Assim, podemos escrever $q(x) = (x-\alpha)q_1(x)$, onde $q_1(x)$ é um polinômio. Daí, $p(x) = (x-\alpha)^2 q_1(x)$. Resta mostrar que $q_1(\alpha) \neq 0$. De fato, como $p''(x) = 2q_1(x) + 4(x-\alpha)q'(x) + (x-\alpha)^2 {q_1}''(x)$, temos $q_1(\alpha) = \frac{p''(\alpha)}{2}$. Sendo $p''(\alpha) \neq 0$, temos $q_1(\alpha) \neq 0$.

c) Deixamos como exercício provar que α é uma raiz de multiplicidade m de $p(x)$ se, e somente se $p(\alpha) = p'(\alpha) = \cdots = p^{m-1}(\alpha) = 0$ e $p^m(\alpha) \neq 0$.

4. Errado. Tome $p(x) = x^2 - 1$. Temos $p'(x) = 2x$. Observe que 0 é raiz simples de $p'(x)$, mas não é raiz dupla de $p(x)$.

9. Note que $p(1) = n + 1 \neq 0$. Logo, 1 não é raiz de $p(x)$. Suponhamos a um número real diferente de 1. Então,

$$p(a) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Suponhamos que $p(a) = 0$. Então $a^{n+1} - 1 = 0$. Equivalentemente, $a^{n+1} = 1$. Como n é par, $n + 1$ é ímpar. Consequentemente, o único valor de a seria 1. Mas, isto contradiz o fato de $a \neq 1$. Logo, $p(a) \neq 0$, ou seja, a também não é raiz de $p(x)$.

Exercícios Resolvidos de MA 11

Unidades 13 e 14

A seguir, apresentamos alguns exercícios resolvidos de forma completa. Cabe observar, que existem outras maneiras de se resolver um mesmo exercício e, assim, as soluções apresentadas não são únicas.

Unidade 13

Exercícios Recomendados

5. Se $A(t)$ denota a área coberta do lago no dia t, por uma alga, pelos dados do problema temos $A(t) = 2^t A(0)$. Como uma alga cobre a superfície do lago em 100 dias, temos que $A(100) = 2^{100} A(0)$. Por outro lado, 2 algas cobrem $2A(t)$ no dia t. Portanto,

$$2^{100} A(0) = 2.2^t A(0), \tag{1}$$

Como $A(0)$ é diferente de zero, segue de (1) que $t = 99$. Assim, o número de dias necessários para que duas algas, de mesma espécie, cubram a superfície do lago é 99.

No caso de termos três algas, observamos que (1) não pode ser resolvida apenas com as propriedades de exponenciação. Vamos precisar da noção de logartimos, que estudaremos na próxima unidade.

Unidade 14.

3. Ora, devemos ter $a^x = x^2 - 1$ para $x = 3$. Portanto, $a^3 = 3^2 - 1$, ou seja $a = 2$.

4. Denotemos por S o conjunto solução das inequações propostas.

(a) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3 \iff 3^{2x}.3^2 - 3^x.3^3 - 3^x + 3 > 0 \iff$
$9(3^x)^2 - 28.3^x + 3 > 0.$

Fazendo $3^x = y$, obtemos $9y^2 - 28y + 3 > 0$, que é equivalente a termos $y < \frac{1}{9}$ ou $y > 3$. Como $y = 3^x$, $3^x < \frac{1}{9}$ ou $3^x > 3$, isto é, $3^x < 3^{-2}$ ou $3^x > 3$, mostrando que $x < -2$ ou $x > 1$. Assim, $S = \{x \in \mathbb{R}; x < -2 \text{ ou } x > 1\}$.

(b) $2^x - 1 > 2^{1-x} \iff 2^x - 1 > \frac{2}{2^x} \iff 2^x(2^x - 1) > 2(2^x)^2 - 2^x - 2 > 0.$

Fazendo $2^x = y$, obtemos $y^2 - y - 2 > 0$, que é equivalente a termos $y < -1$ ou $y > 2$. Mas, $y = 2^x$, logo $2^x < -1$ ou $2^x > 2$. Lembrando que $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $2^x > 2$, ou seja $x > 1$. Assim, $S = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$.

(c) $4^{x+\frac{1}{2}} + 5.2^x + 2 > 0 \iff 4^x.4^{\frac{1}{2}} + 5.2^x + 2 > 0 \iff 2.(2^x)^2 + 5.2^x + 2 > 0.$

Fazendo $2^x = y$, obtemos $2y^2 + 5y + 2 > 0$, que é equivalente a termos $y < -2$ ou $y > -\frac{1}{2}$. Como $y = 2^x$, segue que $2^x < -2$ ou $2^x > -\frac{1}{2}$. Lembrando que $2^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $2^x > -\frac{1}{2}$, ou equivalentemente, $x \in \mathbb{R}$. Assim, $S = \mathbb{R}$.

5. Suponhamos $a > 1$. O caso $0 < a < 1$ é tratado de modo análogo. Fixe $0 < \epsilon < 1$. Pelo lema da Unidade 13, existem $s \in \mathbb{Q}$ e $r \in \mathbb{Q}$ tais que $1 - \epsilon < a^s < 1 < a^r < 1 + \epsilon$. Como $a^0 = 1$ e a função a^x, $x \in \mathbb{R}$, é crescente, temos que $s < 0$ e $r > 0$. Tome $\delta = \min\{-s, r\}$. Note que $\delta > 0$. Seja $h \in \mathbb{R}$ tal que $-\delta < h < \delta$ Então, $0 \leq h < \delta$ ou $-\delta < h < 0$. Se $0 \leq h < \delta$, então $1 = a^0 \leq a^h < a^\delta \leq a^r < 1 + \epsilon$, mostrando que, neste caso, $a^h - 1 < \epsilon$. Se $-\delta < h < 0$, então $1 - \epsilon < a^s \leq a^{-\delta} < a^h < a^0 = 1$, mostrando que, neste caso, $1 - a^h < \epsilon$. Como $0 < \epsilon < 1$ foi tomado de modo arbitrário, mostramos que $\lim_{h\to 0} a^h = 1$.

Questão 1.

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

(1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?

(1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

UMA RESPOSTA

Uma solução concisa é a seguinte:

(a) O número de pessoas aumentou em $\frac{10}{7}$. Portanto a água disponível para cada um deve ser $\frac{7}{10}$ do que era antes (3,5 litros), isto é, $\frac{49}{20} = 2,45$ litros.

(b) As 7 pessoas teriam água pelos 30 dias restantes, mas agora há $\frac{10}{7}$ vezes o número anterior de pessoas. Isso reduz os dias a $\frac{7}{10} \cdot 30 = 21$.

Outra forma de pensar é a seguinte. Primeiro calcula-se a quantidade Q de água que resta após 12 dias. Como restam 30 dias de viagem, com 7 pessoas consumindo 3,5 litros por dia, são $Q = 30 \times 7 \times 3,5$ litros (como a quantidade de água é justa para os 42 dias e os primeiros 12 dias transcorreram como previsto, conclui-se que o que resta para os outros 30 dias também é justo).

(a) Esse total deve ser consumido nos mesmos 30 dias, mas agora por 10 pessoas. Então o consumo diário de cada um é Q dividido por 30×10, que dá $\frac{7}{10} \times 3,5 = 2,45$ litros.

(b) Se todos consumirem 3,5 litros por dia, a cada dia transcorrido após o décimo segundo dia serão consumidos 35 litros. Portanto, após n dias restarão $Q - 35n$ litros. Queremos saber o maior n tal que $Q - 35n \geq 0$, isto é, o maior n que seja menor ou igual a $\frac{Q}{35}$. Mas $\frac{Q}{35} = 30 \times \frac{7}{10} = 21$, então em 21 dias (exatamente) se esgotará o reservatório de água.

Questão 2.

(1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?

(1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

UMA RESPOSTA

(a) Para que exista uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$ é necessário e suficiente que os pontos $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, y)$ não sejam colineares, isto é, que $\frac{5-3}{2-1} \neq \frac{y-5}{3-2}$, ou seja, que $y - 5 \neq 2$, ou ainda, $y \neq 7$.

(b) Para obter os coeficientes a, b, c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se resolver o sistema (nas incógnitas a, b, c)

$$\begin{cases} a + b + c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 9 \end{cases}$$

Isto é feito de modo simples: basta subtrair a primeira equação das duas seguintes. Tem-se

$$\begin{cases} 3a + b &= 2 \\ 8a + 2b &= 6 \end{cases}$$

Por subtração (segunda menos duas vezes a primeira), ficamos com $2a = 2$, de onde sai imediatamente $a = 1$. Substituindo esse valor em $3a + b = 2$, obtemos $b = -1$, e voltando à equação $a + b + c = 3$ obtemos $c = 3$. Portanto $x^2 - x + 3$ é a função quadrática procurada.

Comentário: Há diversas outras formas de se resolver o problema. Por exemplo: tome primeiro a função $g(x) = 1+2x$, que é a função afim tal que $g(1) = 3$ e $g(2) = 5$. Observe que $f(x) = g(x) + a(x - 1)(x - 2)$ é uma função quadrática que assume os mesmos valores que g nos pontos $x = 1$ e $x = 2$. Então basta achar a que faça $f(3) = y$. Ora,

$$f(3) = 1 + 2 \cdot 3 + a(3 - 1)(3 - 2) = 7 + 2a\,.$$

Então $7 + 2a = y$ e, portanto, $a = \frac{y-7}{2}$. Por conseguinte,

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{y - 7}{2}(x - 1)(x - 2)$$

responde o problema para qualquer y. Em particular, para $y = 9$,

$$f(x) = 1 + 2x + (x - 1)(x - 2) = x^2 - x + 3\,.$$

Questão 3.

(1.0) (a) Seja $f : A \to B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.

(1.0) (b) Seja $f : A \to B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

UMA RESPOSTA

(a) Definição da imagem de um subconjunto X de A:

$$f(X) = \{y \in B; f(x) = y \text{ para algum } x \in X\}.$$

Definição da pré-imagem de um subconjunto Y de B:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}.$$

Agora consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função quadrática assume seu valor mínimo $f(-\frac{3}{4}) = \frac{23}{8}$ para $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4}$. Assim, $f(x) \geq \frac{23}{8}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{23}{8}, +\infty)$. Além disso, para todo $y \geq \frac{23}{8}$, a equação $f(x) = y$, ou seja, $2x^2 + 3x + 4 = y$, que equivale a $2x^2 + 3x + 4 - y = 0$, tem discriminante $\Delta = 9 - 32 + 8y \geq -23 + 23 = 0$, logo existe(m) valor(es) de x com $f(x) = y$. Assim $f(\mathbb{R}) = [\frac{23}{8}, +\infty)$.

$f^{-1}(3)$ é o conjunto dos pontos x tais que $f(x) = 3$, isto é, tais que $2x^2 + 3x + 4 = 3$. Então é o conjunto das soluções de $2x^2 + 3x + 1 = 0$, que é igual a $\{-1, -\frac{1}{2}\}$.

Comentário: $f^{-1}(3)$ é um abuso de linguagem amplamente aceito para designar $f^{-1}(\{3\})$.

(b) $z \in f(X \cup Y)$ se, e somente se, existe $w \in X \cup Y$ tal que $f(w) = z$, que por sua vez ocorre se, e somente se, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$ ou existe $y \in Y$ tal que $f(y) = z$, que ocorre se, e somente se, $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$, que ocorre se, e somente se, $z \in f(X) \cup f(Y)$.

Tome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, $X = [-1, 0]$ e $Y = [0, 1]$. Neste caso, $X \cap Y = \{0\}$ e $f(X) = f(Y) = [0, 1]$. Logo $f(X \cap Y) = \{f(0)\} = \{0\}$ e $f(X) \cap f(Y) = [0, 1]$.

Questão 4.

(0.5) (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.

(0.5) (b) Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.

(1.0) (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

UMA RESPOSTA

(a) Se $r\sqrt{2}$ é racional, então $r\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, para $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Como $r \neq 0$, podemos dividir por r para obter $\sqrt{2} = \frac{p}{rq}$, de que resulta $\sqrt{2}$ racional, contradição.

(b) Escolha n um número natural maior do que $\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$. Então $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n}$ é positivo, irracional (pelo item (a)) e

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}/\epsilon} = \epsilon\,.$$

(c) Se a ou b for irracional, não há o que provar. Se a for racional, subtraindo a de todos os números do intervalo $[a, b]$, ficamos com o intervalo $[0, b - a]$. Tomando ϵ igual a $b - a$ no item (b), obtemos o irracional α menor do que $b - a$ e maior do que zero. Então $a + \alpha$ é irracional (se não fosse, então α seria a soma de dois racionais e, portanto, um racional, contradizendo (b)) e pertence ao intervalo $[a, b]$.

Questão 5.

Sejam m e n números naturais primos entre si.

(1.0) (a) Mostre que $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se, n não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.

(1.0) (b) Mostre que se n tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.

UMA RESPOSTA

(a) Sendo m e n primos entre si, uma fração equivalente a $\frac{m}{n}$ deve ter a forma $\frac{mp}{np}$ (obtida multiplicando-se m e n pelo mesmo número natural p).

Os fatores primos de uma potência de 10 são 2 e 5. Se $\frac{mp}{np}$ é fração decimal para algum p então $np = 10^r$. Logo, np só admite fatores primos iguais a 2 ou 5, e, portanto, n também.

Reciprocamente, se n possui apenas fatores primos iguais a 2 ou 5, então podemos multiplicar n por p de forma que o resultado seja uma potência de 10 (p pode ser ou uma potência de 2 ou uma potência de 5). Com esse p, $\frac{mp}{np}$ é uma fração decimal.

(b) Usando o processo tradicional da divisão continuada para transformar $\frac{m}{n}$ em fração decimal, como há fatores de n diferentes de 2 ou 5, em nenhuma etapa o resto da divisão é zero, logo a expansão nunca termina, ou seja, é infinita. Além disso, os diferentes restos (diferentes de zero) que ocorrem são todos menores do que n, portanto o número deles é no máximo $n - 1$. Assim, algum resto deve repetir-se e, a partir daí, o processo se repete: os restos se sucedem na mesma ordem anterior e, portanto, os quocientes também, o que fornece a periodicidade (observe que o período tem, no máximo, $n - 1$ números).

Questão 1.

Prove que se a, b, c e d são números racionais tais que $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$ então $a = c$ e $b = d$.

UMA SOLUÇÃO

A igualdade $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$ implica que $(a - c)\sqrt{2} = (d - b)\sqrt{3}$. Suponha que tenhamos $(a, b) \neq (c, d)$. Então teremos $a \neq c$ ou $b \neq d$. Digamos que $b \neq d$ (o caso $a \neq c$ é análogo). Neste caso podemos dividir ambos os lados por $d - b$, e teremos

$$\frac{a - c}{d - b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,.$$

Como a, b, c, d são todos racionais, o lado esquerdo é racional e igual a alguma fração irredutível $\frac{p}{q}$. Mas aí teríamos

$$3q^2 = 2p^2\,,$$

o que é impossível, pois o lado esquerdo tem um número par de fatores 2 e o lado direito tem um número ímpar (ou: o lado esquerdo tem um número ímpar de fatores 3 e o lado direito tem um número par).

Questão 2.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente tal que, para todo x racional, vale $f(x) = ax + b$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ constantes). Prove que se tem $f(x) = ax + b$ também se x for irracional.

UMA SOLUÇÃO

Dado x irracional, podemos achar r e s racionais com $r < x < s$, sendo $s - r$ tão pequeno quanto desejemos. Como f é crescente, daí vem $f(r) < f(x) < f(s)$, ou seja, $ar + b < f(x) < as + b$. Como f é crescente, então $a > 0$, logo podemos subtrair b de cada termo e dividir por a, sem alterar a direção das desigualdades:

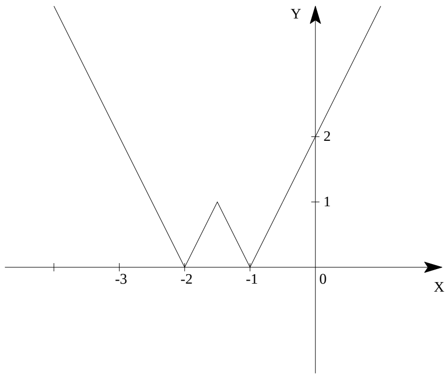
$$r < \frac{f(x) - b}{a} < s\,.$$

Como r e s podem ser escolhidos tão próximos de x quanto desejemos, isto nos obriga a ter $\frac{f(x)-b}{a} = x$ e, portanto, $f(x) = ax + b$.

Questão 3.

(a) Determine uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ||f(x)| - 1|$, tenha o gráfico abaixo.

(b) Expresse g na forma $g(x) = A + \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \ldots + \alpha_n|x - a_n|$, para algum n, explicitando os valores de $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.



UMA SOLUÇÃO

(a)
Observação: Em princípio não é necessário "deduzir" quem é f, basta apresentar uma função candidata e verificar. No entanto, dois argumentos para obtê-la seguem abaixo.

Primeiro argumento: No trecho afim mais à direita, vale $g(x) = 2x + 2$. Portanto para $x \geq -1$, vale, $||f(x)| - 1| = 2x + 2$. Então, no intervalo $(-1, \infty)$, a expressão $|f(x)| - 1$ não se anula, logo ou é sempre negativa, e neste caso ter-se-á $||f(x)| - 1| = -|f(x)| + 1$, ou é sempre positiva, e neste caso ter-se-á $||f(x)| - 1| = |f(x)| - 1$. No primeiro caso, teríamos $-|f(x)| + 1 = 2x + 2$, ou $|f(x)| = -1 - 2x$, em particular $|f(0)| = -1$, o que é impossível. Então só resta segunda opção, e $|f(x)| - 1 = 2x + 2$, de onde $|f(x)| = 2x + 3$, para $x \geq -1$. Concluímos que $f(x) = 2x + 3$ ou $f(x) = -2x - 3$. Ambas as possibilidades são válidas, e escolhemos a primeira $f(x) = 2x + 3$. Aí observamos que essa escolha de $f(x)$ também funciona nos demais trechos afins.

Segundo argumento: Suponha que a taxa de variação de f seja positiva. Então, para x suficientemente afastado para a direita da raiz de f, f é positiva e maior do que 1, de modo que $||f(x)| - 1| = f(x) - 1$. No trecho mais à direita, isso dá $2x + 2$, e daí se conclui que $f(x) = 2x + 3$. Nos outros intervalos, basta verificar.

Verificação: Para verificar que $g(x) = ||f(x)| - 1|$ olha-se a coincidência das funções em cada trecho afim. Os dois lados são afins nos mesmos intervalos: $(-\infty, -2]$, $[-2, -\frac{3}{2}]$, $[-\frac{3}{2}, -1]$ e $[1, \infty)$. Logo basta verificar a coincidência entre as funções em dois pontos de cada intervalo. Basta, portanto, verificar que coincidem em $-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, 0$, o que pode ser feito facilmente.

(b) É natural tomar $a_1 = -2$, $a_2 = -\frac{3}{2}$ e $a_3 = -1$. Então buscamos escrever

$$g(x) = A + \alpha|x+2| + \beta|x + \frac{3}{2}| + \gamma|x+1|\,.$$

Impondo $g(0) = 2$, $g(-1) = 0$, $g(-\frac{3}{2}) = 1$ e $g(-2) = 0$, obtemos quatro equações lineares nas incógnitas A, α, β e γ. Resolvendo o sistema, chegamos em $A = -1$, $\alpha = \gamma = 2$ e $\beta = -2$, logo na função dada por

$$x \mapsto -1 + 2|x+2| - 2|x + \frac{3}{2}| + 2|x+1|\,.$$

Resta ver que essa função é realmente a função g. Essa verificação é feita da mesma maneira que na questão (a).

Questão 4.

Ache uma fração ordinária igual ao número real $\alpha = 3,757575\ldots$

UMA SOLUÇÃO

Se α é o número acima então $100\alpha = 375,757575\ldots$. Subtraindo as duas igualdades, vem $99\alpha = 372,0000\ldots$. Logo $\alpha = \frac{372}{99}$.

Questão 5.

Considere as seguintes possibilidades a respeito das funções afins $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$.

A) $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

B) $f(x) \neq g(x)$ seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

C) Existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$.

Com essas informações,

i) Exprima cada uma das possibilidades acima por meio de relações entre os coeficientes a, b, c e d.

ii) Interprete geometricamente cada uma dessas 3 possibilidades usando os gráficos de f e g.

UMA SOLUÇÃO

(i) A possibilidade A) ocorre se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Prova: Se $a = c$ e $b = d$ então, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = ax + b = cx + d = g(x)$. Por outro lado, se $f(x) = g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então, em particular, $f(0) = g(0)$, ou seja, $a \cdot 0 + b = c \cdot 0 + d$, isto é, $b = d$; além disso, $f(1) = g(1)$, implicando $a \cdot 1 + b = c \cdot 1 + d$, ou seja, $a = c$ (usando que $b = d$).

A possibilidade B) ocorre se, e somente se, $a = c$ e $b \neq d$. Prova: Se $a = c$ e $b \neq d$, então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d) = b - d \neq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $f(x) \neq g(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $(a - c)x + (b - d)$ não tem raiz. Mas isto só ocorre se $a = c$ e $b \neq d$.

A possibilidade C) ocorre se, e somente se, $a \neq c$. Prova: Se $a \neq c$ então $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d)$ tem única raiz igual a $\frac{d-b}{a-c}$, logo este é o único ponto x tal que $f(x) = g(x)$. Por outro lado, se existe um único ponto x tal que $f(x) = g(x)$ é porque a diferença $f(x) - g(x) = (a - c)x + (b - d)$ tem uma única raiz, ou seja, $a - c \neq 0$.

(ii) No caso A), os gráficos de f e g são retas coincidentes. No caso B), os gráficos de f e g são retas paralelas. No caso C), os gráficos de f e g são retas concorrentes.

Questão 1.

Calcule as seguintes expressões:

(1,0) (a) $\log_n \left[\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}\right]$

(1,0) (b) $x^{\log a/\log x}$, onde $a > 0$, $x > 0$ e a base dos logaritmos é fixada arbitrariamente.

UMA SOLUÇÃO

(a) Como $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = n^{1/n^3}$, temos

$$\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{n^3} = n^{-3}\,,$$

logo o valor da expressão dada é -3.

(b) Tomando logaritmo na base b que foi fixada, temos

$$\log\left(x^{\log a/\log x}\right) = \frac{\log a}{\log x} \cdot \log x = \log a\,.$$

Como a função log é injetiva, segue-se que

$$x^{\log a/\log x} = a\,.$$

Questão 2.

(Como caracterizar a função exponencial a partir da função logaritmo.) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente, tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove as seguintes afirmações:

(1,0) (a) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(1) > 1$.

(1,0) (b) Pondo $a = f(1)$ a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a f(x)$ é linear. (Use o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.)

(0,5) (c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$, onde g é a função definida no item (b).

(0,5) (d) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

UMA SOLUÇÃO

O objetivo desta questão é mostrar que é possível caracterizar a função exponencial a partir da função logaritmo, sem usar argumentos geométricos, como está no livro no caso de logaritmos naturais.

(a) Sendo crescente, f não é identicamente nula. Daí resulta que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pois se existisse $x_0 \in \mathbb{R}$ com $f(x_0) = 0$ teríamos, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0$$

e f seria identicamente nula.

Em seguida, notamos que

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}) \cdot f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $f(0) = 1$. Como $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$, então $f(0)$ é solução positiva da equação $x = x^2$. Como essa equação só tem 1 como solução positiva, a igualdade está demonstrada.

Finalmente, como f é crescente, $f(1) > f(0) = 1$.

(b) O Teorema Fundamental da Proporcionalidade diz que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e satisfaz $g(x+y) = g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então g é linear, isto é, $g(x) = cx$, com $c > 0$. No nosso caso, temos

$$g(x+y) = \log_a f(x+y) = \log_a [f(x) \cdot f(y)] = \log_a f(x) + \log_a f(y) = g(x) + g(y)\,,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Temos $g(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1$, portanto $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Como acabamos de ver, $\log_a f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\log_a a^x = x$ e a função $\log_a$ é injetiva, segue-se que $f(x) = a^x$.

Questão 3.

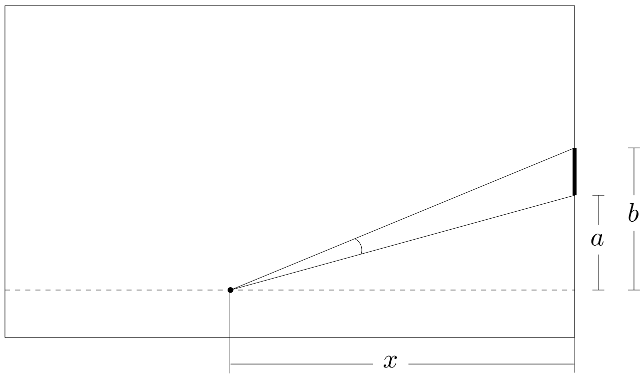
(1,0) (a) Usando as fórmulas para $\cos(x+y)$ e $\text{sen}(x+y)$, prove que

$$\text{tg}(x-y) = \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(y)}{1 + \text{tg}(x)\cdot\text{tg}(y)}$$

(desde que $\text{tg}(x-y)$, $\text{tg}(x)$ e $\text{tg}(y)$ estejam definidas).

(1,5) (b) Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, use a fórmula acima para resolver o seguinte problema:

Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura). Os postes da meta distam a e b (com $a < b$) da reta percorrida por ele. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.



UMA SOLUÇÃO

(a) A manipulação é direta:

$$\text{tg}(x-y) = \frac{\text{sen}(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\text{sen}(x)\cdot\cos(y) - \text{sen}(y)\cdot\cos(x)}{\cos(x)\cdot\cos(y) + \text{sen}(x)\cdot\text{sen}(y)}\,.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos(x)\cdot\cos(y)$ (se $\text{tg}(x)$ e tg(y) estão definidas, $\cos(x)$ e $\cos(y)$ são não nulos), vem

$$\text{tg}(x-y) = \frac{\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)}}{1 + \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\text{sen}(y)}{\cos(y)}} = \frac{\text{tg}(x) - \text{tg}(y)}{1 + \text{tg}(x)\cdot\text{tg}(y)}\,.$$

(b) Em cada instante, o jogador vê a meta sob o ângulo $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, onde α_1 e α_2 são os ângulos entre sua trajetória e as retas que o ligam aos postes da meta. Temos

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{tg}(\alpha_2) - \text{tg}(\alpha_1)}{1 + \text{tg}(\alpha 1)\cdot\text{tg}(\alpha_2)}\,.$$

Se x é a distância do jogador ao fundo do campo, temos $\text{tg}(\alpha_1) = \frac{a}{x}$ e $\text{tg}(\alpha_2) = \frac{b}{x}$, logo

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}} \,.$$

Como o numerador $b - a$ é constante, $\text{tg}(\alpha)$ é máxima quando o denominador for mínimo. Ou seja, é preciso achar x que minimiza a expressão $x + \frac{ab}{x}$.

Como a média aritmética é sempre maior do que ou igual à média geométrica, então $\frac{1}{2}(x + \frac{ab}{x}) \geq \sqrt{x \cdot \frac{ab}{x}} = \sqrt{ab}$, ou seja, o denominador é sempre maior do que ou igual a a $2\sqrt{ab}$. A igualdade vale se e somente se os dois termos da média são iguais, isto é, quando $x = \sqrt{ab}$. Portanto $x + \frac{ab}{x}$ atinge seu menor valor quando $x = \sqrt{ab}$.

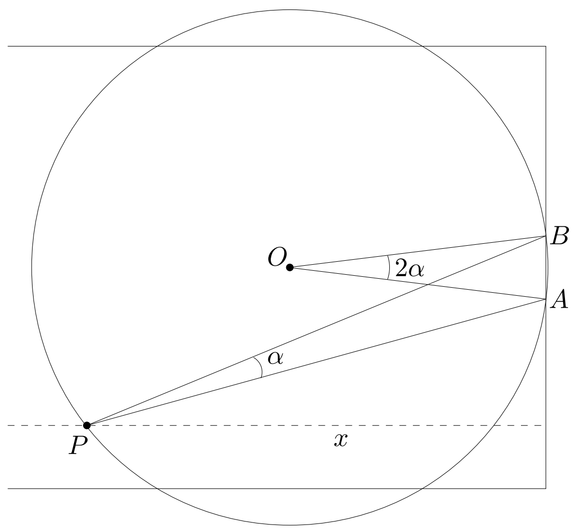
Obs. É possível resolver a questão (b) com outros argumentos. Sejam A e B os extremos da meta, que distam a e b da linha do jogador, respectivamente (veja figura abaixo, à esquerda). Para cada posição P do jogador, existe um único círculo que passa por A, B e P. O centro desse círculo, O, está na mediatriz dos pontos A e B (pois AOB é triângulo isósceles), estando, portanto, a $\frac{b+a}{2}$ de distância da linha do jogador. Os segmentos OA e OB têm comprimento igual ao raio do círculo, digamos r, cujo valor depende de P.

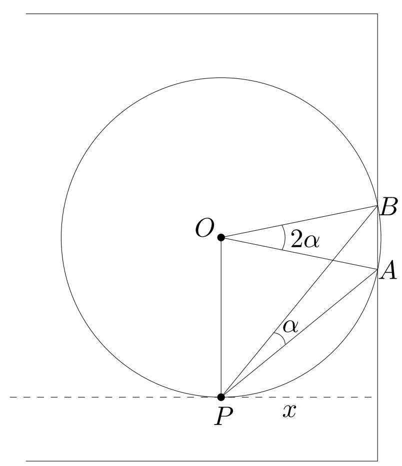
Pelo Teorema do Ângulo Inscrito, $A\hat{O}B = 2A\hat{P}B$. Assim, $A\hat{P}B$ é máximo quando $A\hat{O}B$ é máximo. E $A\hat{O}B$ é máximo quando a distância $OA = OB = r$ é mínima. Mas o menor r possível é aquele tal que o círculo de centro sobre a mediatriz de A e B e raio r tangencia a linha do jogador. Nessa situação, OP é perpendicular à linha do jogador e $r = \frac{b+a}{2}$ (ver figura abaixo, à direita).

O valor de x, neste caso, é a altura do triângulo AOB com relação à base AB (ou seja, o comprimento da apótema da corda AB). Esse valor sai do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo AOQ, em que Q é o ponto médio de AB. Ou seja,

$$x^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = r^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \,.$$

Dessa equação resulta a solução $x = \sqrt{ab}$.





Questão 4.

(1,0) (a) 24h após sua administração, a quantidade de uma droga no sangue reduz-se a 10% da inicial. Que percentagem resta 12h após a administração? Justifique sua resposta, admitindo que o decaimento da quantidade de droga no sangue é exponencial.

(1,0) (b) Em quanto tempo a quantidade de droga no organismo se reduz a 50% da dose inicial?

(0,5) (c) Se a mesma droga for administrada em duas doses de 10 mg com um intervalo de 12h, qual é a quantidade presente no organismo após 24h da primeira dose?

UMA SOLUÇÃO

(a) Sendo exponencial, a quantidade de droga no organismo obedece à lei $c_0 a^t$, onde a é um número entre 0 e 1, c_0 é a dose inicial (obtida da expressão para $t = 0$) e t é medido, por exemplo, em horas. Após 24h a quantidade se reduz a $\frac{1}{10}$ da inicial, isto é,

$$c_0 a^{24} = \frac{c_0}{10}\,.$$

Portanto $a^{24} = \frac{1}{10}$. Daí segue que $a^{12} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, e que

$$c_0 a^{12} = \frac{c_0}{\sqrt{10}}\,.$$

Então a quantidade de droga após 12h é a quantidade inicial dividida por $\sqrt{10}$.

(b) Para saber o tempo necessário para a redução da quantidade de droga à metade (isto é, a meia-vida da droga no organismo), basta achar t que cumpra $a^t = \frac{1}{2}$. Como $a^{24} = \frac{1}{10}$ implica

$$a^{24s} = \left(\frac{1}{10}\right)^s$$

a resposta é $t = 24s$, onde s é tal que $10^{-s} = 2^{-1}$. Daí segue que $s = \log_{10} 2$ e que $t = 24 \log_{10} 2$.

(c) A quantidade logo após a primeira dose é c_0. Após 12h ela decai para $\frac{c_0}{\sqrt{10}}$. Uma nova administração a eleva para $c_0 + \frac{c_0}{10} = c_0(1 + \frac{1}{\sqrt{10}})$. Após mais 12h essa quantidade é dividida por $\sqrt{10}$, passando a ser

$$c_0 \left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{10}\right)\,,$$

logo, com $c_0 = 10$ mg, restarão, após 24h da primeira dose,

$$(1 + \sqrt{10})\ \text{mg}.$$

Questão 1.

(1,0) (a) Prove isto: Se um número natural não é o quadrado de um outro número natural, sua raiz quadrada é irracional.

(1,0) (b) Mostre que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ é irracional.

UMA SOLUÇÃO

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = n$, então $p^2 = nq^2$. Como os fatores primos de p^2 e q^2 aparecem todos com expoente par, o mesmo deve ocorrer com os fatores primos de n. Então n é o quadrado de algum número natural.

(b) Se $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ fosse racional então seu quadrado

$$q = (\sqrt{2}+\sqrt{5})^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$$

também seria. Mas aí $\frac{q-7}{2} = \sqrt{10}$ também seria racional, o que não é possível, pois 10 não é o quadrado de um número natural.

Questão 2.

(2,0) No instante em que uma pedra caiu (sem sofrer impulso inicial) ao momento em que se ouviu o som de seu choque com a água no fundo do poço decorreram S segundos. Calcular a profundidade do poço. Dar a resposta em função da aceleração g da gravidade e da velocidade v do som. Usar a fórmula $s = \frac{g}{2}t^2$ do espaço percorrido no tempo t por um corpo em queda livre que partiu do repouso.

DUAS SOLUÇÕES

Uma solução. O tempo $S = t_1 + t_2$ é a soma do tempo t_1 que a pedra levou para chegar ao fundo mais o tempo t_2 que o som levou para vir até o nível da borda. Chamando de x a profundidade do poço, temos $x = \frac{g}{2}t_1^2$ e, por outro lado, $x = vt_2 = v(S - t_1)$. Logo

$$\frac{g}{2}t_1^2 = v(S - t_1)$$

ou

$$gt_1^2 + 2vt_1 - 2vS = 0\,,$$

que é uma equação quadrática na incógnita t_1. As soluções desta equação são

$$\frac{-2v + \sqrt{4v^2 + 8gvS}}{2g}\,,\ \frac{-2v - \sqrt{4v^2 + 8gvS}}{2g}\,.$$

A segunda é negativa e neste problema não faz sentido. A primeira é positiva, porque $\sqrt{4v^2 + 8gvS} > \sqrt{4v^2} = 2v$. Então, dividindo por 2 o numerador e o denominador da fração,

$$t_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 2gvS}}{g}\,,$$

logo

$$x = vt_2 = v(S - t_1) = Sv + \frac{v^2}{g} - \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gvS}\,.$$

Outra solução. A solução é essencialmente determinada por aquilo que escolhemos como incógnita (t_1, t_2 ou x). Se equacionarmos diretamente em x iremos pelo seguinte caminho. Observe que $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ e $t_2 = \frac{x}{v}$. Então, de $t_1 + t_2 = S$ resulta uma equação em x:

$$\frac{x}{v} + \sqrt{2g^{-1}}\sqrt{x} - S = 0\,.$$

Definamos $y = \sqrt{x}$. Então precisamos achar soluções positivas de

$$v^{-1}y^2 + \sqrt{2g^{-1}}y - S = 0\,.$$

A única solução positiva dessa equação quadrática é

$$y = \frac{-\sqrt{2g^{-1}} + \sqrt{2g^{-1} + 4Sv^{-1}}}{2v^{-1}}\,.$$

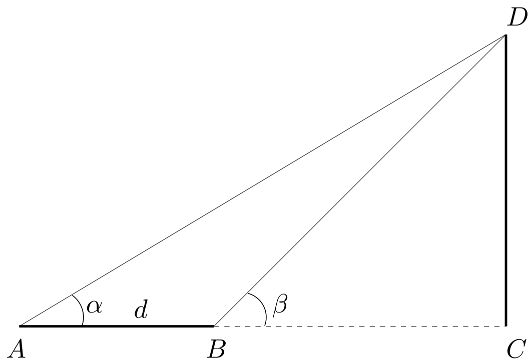
Então

$$x = y^2 = \frac{v^2}{4}\left[\frac{2}{g} + \left(\frac{2}{g} + \frac{4S}{v}\right) - 2\sqrt{\frac{4}{g^2} + \frac{8S}{vg}}\right]\,,$$

que equivale à expressão obtida na primeira solução.

Questão 3.

(2,0) Percorrendo, ao longo de uma reta horizontal, a distância $d = AB$ em direção à base inacessível de um poste CD, nota-se (com o auxílio de um teodolito) que os ângulos $C\hat{A}D$ e $C\hat{B}D$ medem, respectivamente, α e β radianos. Qual é a altura do poste CD?



UMA SOLUÇÃO

Temos $CD = AC\,\mathrm{tg}\,\alpha = BC\,\mathrm{tg}\,\beta$. Como $AC = BC + d$, vem $(BC + d)\mathrm{tg}\,\alpha = BC\,\mathrm{tg}\,\beta$, e daí

$$BC = d \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}$$

e

$$CD = BC\,\mathrm{tg}\,\beta = d \cdot \frac{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}\,,$$

que é a resposta para a pergunta.

Questão 4.

(2,0) Um reservatório contém uma mistura de água com sal (uma salmoura), que se mantém homogênea graças a um misturador. Num certo momento, são abertas duas torneiras, com igual capacidade. Uma despeja água no reservatório e a outra escoa. Após 8 horas de funcionamento, verifica-se que a quantidade de sal na salmoura reduziu-se a 80% do que era antes que as torneiras fossem abertas. Que percentagem do sal inicial permanecerá na salmoura após 24h de abertura das torneiras?

UMA SOLUÇÃO

Seja M_0 a massa de sal existente no início da operação. Decorrido o tempo t, essa massa será $M(t) = M_0 a^t$, onde a é uma constante $(0 < a < 1)$. Isto se justifica porque, sendo a salmoura da torneira de saída uma amostra da salmoura do tanque, supostamente homogênea, a quantidade de sal que sai por unidade de tempo é proporcional à quantidade de sal no tanque, e isto é o princípio que rege o decaimento exponencial.

No entanto, a constante a não precisa ser calculada para se resolver o problema. O enunciado nos diz (supondo o tempo t medido em horas) que $M(8) = M_0 a^8 = 0,8 M_0$, logo $a^8 = 0,8$. Após 24 horas, a quantidade de sal é $M_0 a^{24}$. Ora, $a^{24} = (a^8)^3 = 0,8^3 = 0,512$. Portanto a resposta é $51,2\%$, isto é, pouco mais que a metade.

Questão 5.

Considere a função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - x^2$.

(1,0) (a) Defina função crescente e prove que f é crescente.

(1,0) (b) Defina função ilimitada e prove que f é ilimitada.

UMA SOLUÇÃO

(a) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, chama-se *crescente* quando, para $x, y \in X$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$.

Em nosso caso, sejam $x, y \in [1, +\infty)$, com $x < y$. Vamos mostrar que $f(y) - f(x) > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) &= (y^3 - y^2) - (x^3 - x^2) \\
&= (y^3 - x^3) - (y^2 - x^2) \\
&= (y - x)(y^2 + xy + x^2) - (y - x)(y + x) \\
&> (y - x)(y^2 + x^2) - (y - x)(y + x) \\
&= (y - x)(y^2 - y + x^2 - x) \\
&= (y - x)(y(y - 1) + x(x - 1))\,.
\end{aligned}$$

Como $x \geq 1$, então $x(x - 1) \geq 0$; e como $y > x \geq 1$, então $y(y - 1) > 0$ e $y - x > 0$. Portanto $f(y) - f(x) > 0$.

Outra solução. Podemos definir o número positivo $h = y - x$, ou seja, escrever y como $x + h$, e provar que $f(x + h) - f(x) > 0$. Temos

$$\begin{aligned}
f(x + h) - f(x) &= \left[(x + h)^3 - (x + h)^2\right] - \left[x^3 - x^2\right] \\
&= (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2 + 2hx + h^2) - x^3 + x^2 \\
&= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2hx - h^2\,.
\end{aligned}$$

Para mostrar que essa expressão é positiva, precisamos achar termos positivos que, somados aos negativos, resultem em um número positivo. Então a reescrevemos:

$$\begin{aligned}
f(x + h) - f(x) &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2hx - h^2 \\
&= x^2h + 2xh^2 + h^3 + (2x^2h - 2hx) + (xh^2 - h^2) \\
&= x^2h + 2xh^2 + h^3 + 2hx(x - 1) + h^2(x - 1)\,.
\end{aligned}$$

Como $x \geq 1$ então os dois últimos termos são maiores do que ou iguais a zero. Acrescido do fato que os três primeiros são positivos, tem-se que $f(x + h) - f(x) > 0$, para qualquer $x \geq 1$ e $h > 0$.

(b) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, chama-se *ilimitada* quando, dado qualquer $A > 0$, pode-se achar $x \in X$ tal que $f(x) > A$. No nosso caso, $f(x) > A$ significa $x^3 - x^2 > A$, ou seja, $x^3(1 - \frac{1}{x}) > A$. Ora, quando $x > 2$ já se tem $1 - \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$. Então, para se ter $x^3(1 - \frac{1}{x}) > A$, basta tomar um $x \in [1, +\infty)$ que seja maior do que 2 e tal que $x^3 \cdot \frac{1}{2} > A$, isto é, $x^3 > 2A$, o que se obtém simplesmente tomando $x > \sqrt[3]{2A}$. Portanto, basta tomar $x > \max\{2, \sqrt[3]{2A}\}$.