

## Lista 2 - Números e Funções Reais

### Números Reais

#### Propriedades. Valor Absoluto. Equações e Inequações.

**1** — Relação de ordem dos números reais e as operações algébricas.

- Sabendo que  $a > 0$ , podemos afirmar que  $a < a^2$ ?
- Sabendo que  $a < 0$ , podemos afirmar que  $a < a^2$ ?
- Sabendo que  $0 < a < 1$ , coloque em ordem crescente os números  $0, 1, a, a^2, a^3, a^{10}$ .
- Sabendo que  $0 < a < b$ , coloque em ordem crescente os números  $\frac{1}{a}$  e  $\frac{1}{b}$ .
- Sabendo que  $a < b < 0$ , coloque em ordem crescente os números  $\frac{1}{a}$  e  $\frac{1}{b}$ .
- Sabendo que  $a < 0 < b$ , coloque em ordem crescente os números  $\frac{1}{a}$  e  $\frac{1}{b}$ .
- Sabendo que  $0 < a < 1$ , coloque em ordem crescente os números  $0, 1, -1, a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$ .
- Sabendo que  $a + b > 0$  e  $a < 0$ , coloque em ordem crescente os números  $0, a, -a, b, -b$ .
- Sabendo que  $a < -1$ ,  $0 < b < 1$  e  $ab + 1 > 0$ , coloque em ordem crescente  $0, 1, -1, a, -a, b, -b, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}$ .
- Sabendo que  $0 < a < 1 < b$  e  $\frac{1}{a} < b$ , coloque em ordem crescente os números  $1, a, b, ab$ .
- Sabendo que  $0 < a < 1 < b$ , coloque em ordem crescente os números  $a, a^2, b, b^2$ .
- Sabendo que  $0 < a < 1 < b$  e  $a^2 b > 1$ , coloque em ordem crescente os números  $a, a^2, b, b^2, \frac{1}{b}$ .

**2** — Verdadeiro ou falso:

- A soma de dois números racionais é necessariamente racional
- A soma de dois números irracionais é necessariamente irracional
- A soma de um número racional e um número irracional pode ser racional ou irracional

**3** — Escreva as seguintes expressões sem utilizar sinais do valor absoluto, separando em dois *ou mais* casos quando for necessário (veja o modelo abaixo)

$$|x - 2| - 1 = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

- $||x| - 1|$
- $a - |a - |a||$
- $|x - 1| - |2 - x|$
- $||x - 3| - 2|$

**4** — Resolva algebricamente em  $\mathbb{R}$  as seguintes equações

- $|x - 3| = 8$
- $|x| = -x$
- $|x| = -x + 2$
- $|-x + 2| = 2x + 1$
- $|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6$
- $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$
- $||x - 1| + 2| = 3$
- $||x - 1| - 2| = 3$

**5** — Use a interpretação geométrica do valor absoluto para resolver, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes equações

- a)  $|x + 1| + |x - 2| = 1$
- b)  $|x + 1| + |x - 2| = 3$
- c)  $|x + 1| + |x - 2| = 5$
- d)  $||2 - x| - |x + 3|| = 4$

**6** — Use a interpretação geométrica do valor absoluto para resolver, em  $\mathbb{R}$ , as seguintes inequações

- a)  $|x - 3| < 8$
- b)  $|x + 4| < 2$
- c)  $|2 - x| > 3$
- d)  $|x + 2| > |x - 3|$
- e)  $|x - 1| + |x - 2| > 1$
- f)  $|x - 1| + |x + 1| \leq 2$
- g)  $|x - 1| + |x + 1| < 2$

**7** — Em cada caso abaixo, expresse a(s) condição(ões) dadas em termos de equações ou inequações envolvendo valores absolutos e determine os respectivos conjuntos-solução

- a)  $x$  está mais próximo de 5 do que de 2
- b) A diferença entre as distâncias de  $x$  a  $-2$  e 3 é exatamente igual a 5
- c) A distância entre  $x$  e 1 não supera 3 e  $x$  está mais perto de 6 do que de  $-8$

**8** — Resolva algebricamente as seguintes inequações

- a)  $|x + 3| + x < 1$
- b)  $|x - 2| - x|x + 2| < 1$
- c)  $|x^2 - 4| + 2x + 1 \geq 0$
- d)  $|1 - |x + 3|| > 2$

**9** — Determine o domínio da inequação abaixo e seu conjunto-solução

$$\frac{9}{|x - 5| - 3} \geq |x - 2|$$

**10** — Prove as seguintes propriedades

- a)  $|x| = |-x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- b)  $|xy| = |x||y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- c)  $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

**11** — Dada uma constante  $r > 0$ , e um número real  $a$  qualquer, mostre que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

- a)  $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- b)  $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

**12** — Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações

- a)  $|x - 2| < 3 \Rightarrow x < 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- b)  $|x - 2| < 1 \Rightarrow x < 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- c)  $|x - 3| < 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- d)  $|x - 3| > 2 \Rightarrow x(x - 4) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- e)  $|x - 1| > 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- f)  $|x - 5| < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**13** — Em cada caso, determine para quais valores de  $r$  ( $r > 0$ ) a implicação é verdadeira

- a)  $|x - 4| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- b)  $|x + 3| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

# Respostas dos Exercícios

1 a.) Não. Por exemplo,  $(1/2)^2 < (1/2)$

b.) Sim, pois  $a < 0 < a^2$

c.)  $0 < a^{10} < a^3 < a^2 < a < 1$

d.)  $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$

e.)  $\frac{1}{p} < \frac{1}{a}$

f.)  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

g.)  $-\frac{1}{a} < -1 < -a < 0 < a < 1 < \frac{1}{a}$

h.)  $-b < a < 0 < -a < b$

i.)  $-\frac{1}{b} < a < -1 < \frac{1}{a} < -b < 0 < b < -\frac{1}{a} < 1 < -a < \frac{1}{b}$

j.)  $0 < a < 1 < ab < b$

k.)  $0 < a^2 < a < 1 < b < b^2$

l.)  $0 < \frac{1}{b} < a^2 < a < 1 < b < b^2$

3 a.)

$$\begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

c.)

$$\begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 2 \\ 2x-3, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ -1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

4 a.)  $Sol = \{-5, 11\}$

b.)  $Sol = (-\infty, 0]$

c.)  $Sol = \{1\}$

d.)  $Sol = \{\frac{1}{3}\}$

e.)  $Sol = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

f.)  $Sol = \{0, 2\}$

g.)  $Sol = \{-4, 6\}$

5 a.)  $Sol = \emptyset$

b.)  $Sol = [-1, 2]$

c.)  $Sol = \{-2, 3\}$

d.)  $Sol = [1, 2) \cup \{5\}$

e.)  $Sol = \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$

6 b.)  $Sol = (-6, -2)$

c.)  $Sol = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

d.)  $Sol = (\frac{1}{2}, +\infty)$

e.)  $Sol = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

f.)  $Sol = \{-1, 1\}$

7 b.)  $|x+2| - |x-3| = 5; Sol = [3, +\infty)$

c.)  $|x-1| < 3$  e  $|x-6| < |x+8|; Sol = (-1, 4)$

8 b.)  $Sol = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ ou } x \geq 2\}$

d.)  $Sol = (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

9 Dom =  $\mathbb{R} \setminus \{2, 8\}; Sol = [-1, 2) \cup (8, 5 + \sqrt{3}]$

10 b.) Escreva a igualdade e estude-a nos casos  $x \geq 0, y \geq 0$ ,  $x \geq 0, y < 0$ ,  $x < 0, y \geq 0$  e  $x < 0, y < 0$ .

12 a.) F; c.) V; e.) V;

13 b.)  $0 < r < 4$