

# Lista 3 - Números e Funções Reais

## Funções

### Generalidades sobre funções. Funções reais. Gráficos.

Nos exercícios abaixo, a expressão *domínio maximal* significa o maior domínio possível para a função dada.

**1** — Determine o domínio maximal  $D$  das seguintes funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $D \subset \mathbb{R}$

a)  $f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$

b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$

c)  $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - x}$

d)  $f(x) = \sqrt{|1+x| - |x^2|}$

**2** — Determine o domínio maximal  $D$  das seguintes funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , em que  $D \subset \mathbb{N}$

a)  $f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$

b)  $f(n) = \sqrt{|1+n| - |n^2|}$

**3** — Para cada uma das seguintes funções, determine se são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, justificando (i.e. provando ou dando contra-exemplos)

a) Se  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $f : A \rightarrow A$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

b) Se  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  e  $g : A \rightarrow A$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 7 \\ 1, & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

c)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 3n + 1$ .

d)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = n - |n|$ .

e)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

f)  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

g)  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .

h)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x, x)$ .

i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x, |x|)$ .

**4** — Determine o conjunto imagem da função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $f(n) = (-1)^n n$ .

**5** — Considerando a função  $f$  do Exercício 4, determine o conjunto imagem da função  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $g(n) = f(n) + f(n+1)$ .

**6** — Sejam dadas as seguintes funções

(a)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 3n + 1$

(b)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x - |(x+2)^2 - 1|$

(c)  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Determine as pré-imagens abaixo

a)  $f^{-1}(2)$ .

b)  $f^{-1}(\{2k \mid k \in \mathbb{N}\})$ .

c)  $g^{-1}(-1)$ .

d)  $g^{-1}([-3, -1])$ .

e)  $h^{-1}(1)$ .

f)  $h^{-1}([\frac{1}{3}, \frac{1}{2}])$

**7** — Seja dada uma função  $f : A \rightarrow B$ . Se  $X$  e  $Y$  são subconjuntos do domínio  $A$  e se  $V$  e  $W$  são subconjuntos do contradomínio  $B$ , mostre que

- a) Se  $X \subset Y$  então  $f(X) \subset f(Y)$ .
- b) Se  $V \subset W$  então  $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$ .
- c)  $X \subset f^{-1}(f(X))$ .
- d) Se  $f$  é injetora então  $X = f^{-1}(f(X))$ .

**8** — Considere a função  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x, y) = y - |x|$ .

- a) Calcule  $f^{-1}(\{0\})$
- b) Calcule  $f^{-1}((0, \infty))$

**9** — Identifique no plano cartesiano as seguintes regiões:

- a)  $R_1 = \{(x, y) \mid |x - 2| < 1\}$
- b)  $R_2 = \{(x, y) \mid |y + 1| < 2\}$
- c)  $R_3 = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$
- d)  $R_4 = \{(x, y) \mid x(x - 3) > 0\}$

**10** — Dadas as funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 3$ ,  $g(x) = |x - 2| - 2$ , identifique no plano cartesiano as seguintes regiões:

- a)  $S_1 = \{(x, y) \mid f(x) \cdot g(x) < 0\}$
- b)  $S_2 = \{(x, y) \mid f(x) - g(x) \geq 0\}$
- c)  $S_2 = \{(x, y) \mid \min\{|f(x)|, |g(x)|\} > 1\}$

**11** — Dada uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , seja  $\bar{x}$  um seu extremo local com  $f(\bar{x}) = \bar{y}$ . Para cada função abaixo, determine um extremo local e o valor da função nesse extremo:

- a)  $g(x) = f(x + 1)$
- b)  $g(x) = f(x) + 1$
- c)  $g(x) = -f(x)$
- d)  $g(x) = f(-x)$
- e)  $g(x) = 2f(x)$
- f)  $g(x) = f(2x)$

# Respostas dos Exercícios

1 b.)  $D = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ;

c.)  $D = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ ;

2 a.)  $D = \mathbb{N}^*$ ;

b.)  $D = \{0, 1\}$

3 a.) Nada;

b.) Bijetora;

c.) A função é injetora pois

$$f(n') = f(n) \Rightarrow 3n' + 1 = 3n + 1 \Rightarrow n = n'$$

Entretanto não é sobrejetora pois 5 pertence ao contradomínio, mas não existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(n) = 5$ , pois  $3n + 1 = 5 \Rightarrow 3n = 4$  e claramente não existe nenhum natural com essa propriedade.

d.) Nada;

e.) Injetora;

f.) Nada;

g.) Injetora;

h.) A função não é sobrejetora, pois  $(1, 0)$  pertence ao contradomínio mas não existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = (1, 0)$ . A função é injetora, pois  $f(x) = f(x') \Rightarrow (x, x) = (x', x') \Rightarrow x = x'$

i.) Injetora;

4  $\text{Im } f = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(2n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

5  $\text{Im } f = \{-1, 1\}$

6 a.)  $\emptyset$

b.)  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar e múltiplo de } 3\}$

c.)  $\{-1\}$

d.)  $[-3, 0]$

e.)  $\{0\}$

f.)  $\left[\frac{9}{16}, \frac{16}{9}\right]$

8 a.)  $\{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b.)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}$

11 a.) Ponto extremo:  $\bar{x} - 1$ ; Valor:  $g(\bar{x} - 1) = \bar{y}$

b.) Ponto extremo:  $\bar{x}$ ; Valor:  $g(\bar{x}) = \bar{y} + 1$

c.) Ponto extremo:  $\bar{x}$ ; Valor:  $g(\bar{x}) = -\bar{y}$

d.) Ponto extremo:  $-\bar{x}$ ; Valor:  $g(-\bar{x}) = \bar{y}$

e.) Ponto extremo:  $\bar{x}$ ; Valor:  $g(\bar{x}) = 2\bar{y}$

f.) Ponto extremo:  $\frac{\bar{x}}{2}$ ; Valor extremo:  $g\left(\frac{\bar{x}}{2}\right) = \bar{y}$