Lista 1 - Bases Matemáticas

Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

Parte I

1 — Atribua valores verdades as seguintes proposições:

a) 5 é primo ***e*** 4 é ímpar.

b) 5 é primo ***ou*** 4 é ímpar.

c) (Não é verdade que 5 é primo) ***e*** 4 é par.

d) Não é verdade que (5 é primo ***ou*** 4 é ímpar).

2 — Atribua um valor verdade às seguintes proposições:

a) ***Se*** 2 é par, ***então*** 3 não é par.

b) ***Se*** 2 não é par, ***então*** 3 não é par.

c) ***Se*** 3 não é par, ***então*** 3 não é ímpar.

d) ***Se*** minha mãe é um trator ***então*** eu sou uma moto-serra.

3 — Negue as seguintes proposições:

a) $3 > 4$ ***e*** 2 é par.

b) Não é verdade que (3 é par ***ou*** 5 é impar).

c) 2 é número par ***e*** não é verdade que 3 é um número ímpar.

d) ***Se*** $3 > 4$, ***então*** 2 é par.

e) ***Se*** 2 é par ***então***$(\pi = 3$ ***ou*** $\pi = 4)$.

f) ***Se*** 2 é par ***então*** não é verdade que 3 é par.

4 — Em um planeta distante, a população local se divide em dois grupos distintos, por eles chamados de HI e HO (não há nenhum indivíduo que pertença a ambos os grupos). Nessa população, há indivíduos com antenas e indivíduos sem antenas. Os indivíduos são coloridos, podendo ser verdes, brancos ou vermelhos (não há indivíduos bicolores ou tricolores). Sabemos que:

1. Se um indivíduo é do grupo HI, então ele possui antena.

2. Se um indivíduo é verde ou branco, então ele não possui antena.

Pergunta-se:

a) Se um indivíduo possui antena, podemos saber a que grupo pertence?

b) Se um indivíduo não possui antena, podemos saber a que grupo pertence?

c) Se um indivíduo é do grupo HI, o que podemos afirmar sobre sua cor?

d) Se um indivíduo é do grupo HO, o que podemos afirmar sobre sua cor?

e) Se um indivíduo é verde, podemos saber a que grupo pertence?

f) Se um indivíduo é branco, podemos saber a que grupo pertence?

g) Se um indivíduo é vermelho, podemos saber a que grupo pertence?

5 — Sejam $p(n)$ e $q(n)$ proposições sobre números naturais. Assuma que a implicação $p(n) \Rightarrow q(n)$ é verdadeira, para todo n natural. Sabendo que as proposições $p(2)$ e $q(3)$ são verdadeiras e que as proposições $p(5)$ e $q(7)$ são falsas, determine quais das afiramções abaixo são verdadeiras:

a) $q(2)$ é verdadeira

b) $p(3)$ é verdadeira

c) $q(5)$ é falsa

d) $p(7)$ é falsa

6 — Observe o diagrama genérico abaixo:

$$\begin{array}{l} \text{premissa 1} \\ \text{premissa 2} \\ \hline \text{conclusão} \end{array}$$

Ele representa o seguinte **argumento**: assumindo como verdadeiras a **premissa 1** e a **premissa 2**, pretendemos deduzir que também é verdadeira a **conclusão**. Um argumento desse tipo será considerado um *argumento válido*, se a **conclusão** seguir necessariamente das premissas, isto é, *se não for possível termos as premissas verdadeiras e a conclusão falsa*. Com esse significado, propõe-se o seguinte problema: dadas duas proposições simples p e q, determine quais dos argumentos abaixo são válidos:

a)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \text{não } p \\ \hline \text{não } q \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \text{não } q \\ \hline \text{não } p \end{array}$$

7 — Complete a lacuna em cada proposição abaixo com os conectivos $\wedge$ ou $\vee$ de modo a torná-la verdadeira:

a) x é solução de $x^2 = 1$ se, e somente se, $x = -1$ ___ $x = 1$

b) x é solução de $x^2 > 1$ se, e somente se, $x < -1$ ___ $x > 1$

c) x é solução de $x^2 < 1$ se, e somente se, $x > -1$ ___ $x < 1$

8 — Escreva cada uma das proposições compostas abaixo usando somente os conectivos indicados

a) $p \Rightarrow q$, usando $\vee$ e $\neg$

b) $p \veebar q$ (*ou exclusivo*), usando $\wedge$, $\vee$ e $\neg$

c) $p \wedge q$, usando $\vee$ e $\neg$

d) $p \wedge q$, usando $\Rightarrow$ e $\neg$

e) $p \vee q$, usando $\wedge$ e $\neg$

f) $p \vee q$, usando $\Rightarrow$ e $\neg$

9 — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes proposições:

a) $\neg p \Rightarrow q$

b) $\neg p \Rightarrow \neg q$

c) $p \Rightarrow \neg q$

d) Se chove, então eu não vou trabalhar.

e) Se x é par, então $x + 1$ é ímpar.

f) Se minha mãe é um trator, então eu sou uma moto-serra.

g) Se $2^k + 1$ é primo, então k é uma potência de 2.

h) Se $x^2 + y^2 = 0$, então x e y são iguais a 0.

10 — Para os pares de proposições p e q, diga se p é condição necessária ou suficiente para q. Em todos os itens em que é mencionado, x denota um número natural.

a) $p : x > 2$
$q : x > 3$

b) $p : x > 2$
$q : x \geq 2$

c) $p : x > 0$ e $x < 2$
$q : x < 2$

d) $p : x > 0$ e $x < 2$
$q : x = 1$

e) $p : \Delta$ é um triângulo isósceles
$q : \Delta$ é um triângulo equilátero

f) $p : M$ é uma matriz com determinante diferente de 0
q : "M é uma matriz inversível

Parte II

11 — Determine o conjunto-verdade das seguintes proposições abertas, para as quais o domínio de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $n^2 < 12$

b) $3n + 1 < 25$

c) $3n + 1 < 25$ *e* $n + 1 > 4$

d) $n < 5$ ou $n > 3$

e) n é primo e não é verdade que $n > 17$

f) $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

12 — Nas seguintes proposições abertas o domínio de discurso é o conjunto dos números reais. Para essas proposições esboce na reta real o seu conjunto verdade.

a) $x > 2$ e $x < 4$

b) $x > 2$ ou $x < 3$

c) $x < 2$ ou $(x < 5$ e $x > 3)$

d) não é verdade que $(x > 2$ e $x < 4)$

13 — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$.

b) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$.

d) $x < 2$ ou $(x < 5$ e $x > 3)$

e) Todos os números naturais são primos.

f) Nenhum número natural é primo.

14 — Interprete cada proposição abaixo (isto é, escreva em linguagem natural) e determine seu valor-verdade. O universo de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $\forall n\, (n + 1 > 2)$

b) $\forall n\, (n < 2 \vee (n < 5 \wedge n > 3))$

c) $\exists n\, (n + 1 > 2)$

d) $\exists n\, (n < 2 \vee (n < 5 \wedge n > 3))$

e) $\forall n\, (n \text{ par } \Rightarrow n + 1 \text{ ímpar})$

f) $\forall n\, (n \text{ primo } \Rightarrow n + 1 \text{ par})$

g) $\exists n\, (n \text{ primo } \wedge n + 1 \text{ ímpar})$

15 — Determine o valor-verdade das seguintes proposições

a) $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $2x^2 - 5x - 1 < 0$

b) $\exists x \in \mathbb{R}$, tal que $x^2 - 3x + 5 < 0$

c) $\exists x \in \mathbb{N}$, tal que $x^2 - 13x + 42 < 0$

16 — Determine o valor verdade de cada proposição abaixo:

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ \exists\, m \in \mathbb{Z} \mid m < \frac{1}{n}$

b) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ \exists\, m \in \mathbb{N}^* \mid m < \frac{1}{n}$

c) $\forall\ n \in \mathbb{N}^*\ \exists\, m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m^2+1}{m} > n$

17 — Identifique a variável livre e determine o conjunto-verdade das seguintes proposições abertas (o domínio de discurso é o conjunto dos números naturais)

a) Para todo n, $n^2 \geq m$

b) $m = 2n + 1$ para algum n

c) Para todo m par, nm é par

d) Para todo n ímpar, nm é ímpar

18 — Dê exemplos ou contra-exemplos, se existirem, para as seguintes afirmações

a) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 \geq m$ para todo $n \in \mathbb{Z}$

b) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 \geq m$

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$

d) Existem $m, n \in \mathbb{N}$ distintos tais que $m + n = 0$

e) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n$ é par.

f) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ pares, $m + n$ é par.

g) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, se $m + n$ é par, então m e n são ambos pares.

19 — Interprete cada proposição abaixo (isto é, escreva em linguagem natural) e determine seu valor-verdade. O universo de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $\forall n\, \forall m\, (n + 1 > m)$

b) $\forall n\, \exists m\, (n + 1 > m)$

c) $\exists n\, \forall m\, (n + 1 > m)$

d) $\forall n\, \forall m\, (n,\ m \text{ pares } \Rightarrow n + m \text{ par})$

e) $\forall n\, \forall m\, (n + m \text{ par } \Rightarrow n,\ m \text{ pares})$

f) $\forall m\, \exists n\, (nm \text{ é ímpar})$

g) $\forall m\, \exists n\, (nm \text{ é par})$

h) $\forall m\, \exists n\, (m^2 = n)$

i) $\forall m\, \exists n\, (n^2 = m)$

20 — Para cada proposição abaixo, diga se é universal ou particular e determine o valor-verdade. O universo de discurso é o conjunto dos números naturais

a) $\forall x\, \exists y\, (x < y)$

b) $\exists y\, \forall x\, (x < y)$

c) $\exists x\, \forall y\, (x < y)$

d) $\forall y\, \exists x\, (x < y)$

e) $\exists x\, \exists y\, (x < y)$

f) $\forall x\, \forall y\, (x < y)$

21 — Determine o valor-verdade das seguintes proposições. O universo de discurso é o conjunto dos números reais.

a) $\forall x\, \exists y\, (2x - y = 0)$

b) $\exists y\, \forall x\, (2x - y = 0)$

c) $\exists y\, \exists z\, (y + z = 100)$

d) $\forall y\, \exists x\, (x^2 - 4x + y = 0)$

e) $\exists y\, \exists x\, (x^2 - 4x + y = 0)$

f) $\exists y\, \forall x\, (x^2 - 4x + y > 0)$

22 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica

a) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.

b) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.

c) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par e divisível por 3.

d) Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo.

e) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.

f) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

g) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

h) Todo número natural é divisível por 2, 3, 5 ou 7.

i) Para todo número racional x, x é menor que $1/x$.

j) Existem dois números inteiros cuja soma é 1000.

k) Não existe número racional cujo quadrado é 2.

l) Para todos números a e b reais, há um número c que é menor que b e maior que a.

23 — Para cada uma das proposições do exercício anterior, escreva a sua negação em linguagem simbólica e em linguagem natural

24 — Reescreva cada afirmação a seguir em linguagem natural, sem usar notação simbólica

a) $\forall n \in \mathbb{R},\ \ n < n^2$.

b) $\exists n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n$.

c) $\exists! n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n$.

d) $\exists n \in \mathbb{R},\ \ n^2 = n^3$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : k < n$.

f) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ \ \exists c, d \in \mathbb{R} : a < c + d < b$.

g) $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \exists c \in \mathbb{Z} \,|\, (a/b)c \in \mathbb{Z}$.

h) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \,|\, \forall c \in \mathbb{R}, ab = c$

i) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} \,|\, ab = c$

25 — A Fórmula de Bhaskara é uma proposição universal. Identifique as suas variáveis (e seus universos) e descreva-a em linguagem simbólica.

Parte III

Nos exercícios de 26 a 30, diga que tipo de técnica de demonstração foi usada para provar a proposição e explique como a técnica foi aplicada. No que se segue, a notação $a \mid b$ significa que a divide b, isto é, que existe um inteiro k tal que $b = ka$.

26 — ***Proposição:*** $a \mid b$ ***e*** $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$. *Prova:* como $a \mid b, \exists k_1 : ak_1 = b$; e como $a \mid c$, $\exists k_2 : ak_2 = c$. Assim, $b + c = ak_1 + ak_2 = a(k_1 + k_2)$, o que significa que existe k $(k = k_1 + k_2)$ tal que $b + c = ak$, ou seja, $a \mid (b + c)$. □

27 — ***Proposição:*** $\log_2 3$ ***é irracional.*** *Prova:* suponha que existam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $\log_2 3 = a/b$. Assim, $2^{a/b} = 3$ e $(2^{a/b})^b = 3^b$. Como $(2^{a/b})^b = 2$, teríamos $2^a = 3^b$. Mas 2 elevado a qualquer inteiro deve ser par, e 3 elevado a qualquer inteiro deve ser ímpar. Como um número não pode ser par e ímpar ao mesmo tempo, temos que concluir que $\log_2 3$ é irracional. □

28 — ***Proposição: Se*** a ***e*** b ***são números reais tais que*** ab ***é irracional, então pelo menos um dentre*** a ***e*** b ***deve ser irracional.*** *Prova:* se tanto a como b fossem racionais, então existiriam $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = k_1/k_2$ e $b = k_3/k_4$. Então, $ab = (k_1/k_2)(k_3/k_4) = \frac{(k_1k_3)}{(k_2k_4)}$ – o que significa que ab poderia ser escrito como quociente de dois inteiros, sendo assim racional. Portanto, se ab é irracional, ou a ou b deve ser irracional. □

29 — ***Proposição: Se*** a ***é irracional, então*** $\sqrt{a}$ ***também é irracional.*** *Prova:* Se $\sqrt{a}$ for racional, então existem inteiros m e n tais que $\sqrt{a} = m/n$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $a = m^2/n^2$. Como m^2 e n^2 são inteiros, a é racional. □

30 — ***Proposição: A soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo é maior do que a medida da hipotenusa.*** *Prova:* dado um triângulo retângulo qualquer, sejam a e b os comprimentos de seus catetos e c o comprimento de sua hipotenusa. Suponha que $a + b \leq c$. Elevando ambos os lados ao quadrado temos $(a + b)^2 \leq c^2$, ou ainda, $a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$. Como as medidas dos lados são todas positivas, resulta $a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 \leq c^2$, e portanto $a^2 + b^2 < c^2$. No entanto, o Teorema de Pitágoras afirma que $a^2 + b^2 = c^2$, e a prova está completa. □

Nos exercícios de 31 a 34, as demonstrações apresentadas estão incorretas. Aponte o erro em cada uma delas.

31 — $1 < 0$.
Prova: Seja um número real $x < 1$. Aplicando o logaritmo em ambos os lados da desigualdade, temos $\log x < \log 1$. Como sabemos que $\log 1 = 0$, então $\log x < 0$. Agora dividimos ambos os lados por $\log x$ e obtemos $1 < 0$. ☠

32 — *Todo número inteiro tem raiz quadrada inteira.*
Prova: Provemos a contrapositiva de "$\forall n \in \mathbb{Z}, \sqrt{n} \in \mathbb{Z}$". Seja $a = \sqrt{n}$. Temos que $a^2 = n$, e como o quadrado de um inteiro é sempre outro inteiro, n também é inteiro. ☠

33 — *Se* $5|ab$ *então* $5|a$ *ou* $5|b$.
Prova: Se $5|ab$ então ab é da forma $5k$ para algum k. Portanto, ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m. Assim, concluímos que $5|a$ ou $5|b$. ☠

34 — $1 = 2$.
Prova: Sejam a e b dois números iguais. Multiplicando ambos os lados de "$a = b$" por a obtemos $a^2 = ab$. Subtraindo b^2 dos dois lados,

$a^2 - b^2 = ab - b^2$. Fatorando, $(a+b)(a-b) = b(a-b)$. Cancelando $(a-b)$ temos $a+b=b$. Quando a e b valem 1, temos que $1+1=1$, e está concluída a prova.

35 — Demonstre que se p, q são números racionais, então $p+q$ é um número racional.

36 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições.

a) A raiz cúbica de 2 é irracional.

b) Dados a, b, c inteiros, se a não divide bc, então a não divide b.

37 — Prove pelo método contra-positivo: Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser impares.

38 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é irracional.

39 — Dados a, b, c números inteiros com $c \neq 0$, mostre que a divide b se e somente se ac divide bc.

Exercícios Complementares

40 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada uma das seguintes proposições

a) Não há soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$

b) Não há solução racional para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$

Respostas dos Exercícios

1 a.) F
c.) F

2 a.) V
c.) F

3 a.) $3 \leq 4$ *ou* 2 é impar.
d.) $3 > 4$ *e* 2 é ímpar.
e.) 2 é par *e* $\pi \neq 3$ *e* $\pi \neq 4$.

4 a.) Não, pode ser HI ou HO
c.) Certamente é vermelho
d.) Nada
f.) Sim, é HO

5 a.) Sim, $q(2)$ é verdadeira
c.) Não podemos concluir nada sobre $q(5)$

6 a.) válido
b.) inválido

7 a.) *ou*
c.) *e*

8 a.) $\neg p \vee q$
b.) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
d.) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$

9 [contrapositiva / recíproca / inversa]
a.) $\neg q \Rightarrow p$ / $q \Rightarrow \neg p$ / $p \Rightarrow \neg q$
b.) $q \Rightarrow p$ / *não* $q \Rightarrow$ *não* p / $p \Rightarrow q$
d.) Se vou trabalhar, então não chove. / Se não vou trabalhar, então chove. / Se não chove, então vou trabalhar.
e.) Se $x + 1$ é par, então x é ímpar. / Se $x + 1$ é ímpar, então x é par. / Se x é ímpar, então $x + 1$ é par.
h.) Se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$ / Se $x = 0 = y$, então $x^2 + y^2 = 0$ / Se $x^2 + y^2 \neq 0$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$

10 a.) Condição necessária, mas não suficiente.
d.) Condição necessária e suficiente.
e.) Condição necessária, mas não suficiente.
f.) Condição necessária e suficiente.

11 a.) $\{0, 1, 2, 3\}$ **c.)** $\{4, 5, 6, 7\}$ **e.)** $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

13 a.) Exemplo: $x = 7$ (poderia ser qualquer número real maior que 1). Contra-exemplo: $x = -5$ (poderia ser qualquer número real menor ou igual a 1).
b.) Exemplo: letra "a"(não há outro). Contra-exemplo: letra "b"(poderia ser a letra "n").
d.) Exemplo: $x = \pi$ (poderia ser qualquer número real menor que 2 ou entre 3 e 5). Contra-exemplo: $x = \sqrt{7}$ (poderia ser qualquer número real $2 \leq x \leq 3$ ou $x \geq 5$).
e.) Exemplo: 11 (poderia ser qualquer número primo). Contra-exemplo: 18 (poderia ser qualquer número composto ou 0 ou 1).

14 a.) (F) Para todo número natural n, $n + 1 > 2$ (ou, de forma mais clara: o sucessor de qualquer número natural é sempre maior do que 2).
d.) (V) Existe (pelo menos) um número natural que satisfaça $n < 2$ ou $3 < n < 5$.
e.) (V) Para todo número natural, se tal número é par, seu sucessor é ímpar (ou, de forma mais clara: o sucessor de qualquer número par é um número ímpar).
g.) (V) Existe um número primo cujo sucessor é ímpar.

15 b.) F
c.) F

16 b.) F
c.) V

17 a.) Variável livre: m. Conjunto-verdade: $\{0\}$
d.) Variável livre: m. Conjunto-verdade: é o conjunto dos números naturais ímpares.

18 a.) Exemplo: $m = 0$ (é o único exemplo para a variável m). Contra-exemplo: $m = 4$ e $n = 1$ ($n^2 < m$).
c.) Exemplo: $x = \sqrt{3}$, $n = 2$. Contra-exemplo: não há, pois a proposição é verdadeira.
e.) Exemplo: qualquer par de números naturais com mesma paridade. COntra-exemplos: qualquer par de números naturais com paridades distintas.
g.) Exemplo: $m = 2, n = 18$, tem-se $m + n = 20$ (a soma é par e cada uma das parcelas também é par). Contra-exemplo: $m = 3$ e $n = 5$, tem-se $m + n = 8$ (a soma é par, mas as parcelas não são pares).

19 b.) (V) Para todo número natural n, existe um número natural m que seja menor do que o sucessor de n.
d.) (V) A soma de dois números naturais pares é par.
f.) (F) Dado qualquer número natural m, existe um número natural n que, multiplicado por m, resulta em um número ímpar.
h.) (V) O quadrado de todo número natural é um número natural.

20 a.) Universal. Verdadeira.
c.) Particular. Falsa.
e.) Particular. Verdadeira.

21 b.) F
d.) F
f.) V

22 b.) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2)$
* simplificado: $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é par e divisível por 3
d.) $\neg\, (\exists x \in \mathbb{Z} \,|$
$\left[\forall d \in \mathbb{N}, d \mid x^2 \Rightarrow (d = 1 \vee d = x^2)\right] \vee x^2 < 0\big)$
* simplificado: $\neg(\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é primo $\vee\, x^2$ é ímpar)
e.) $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, (\exists k \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2k) \vee (\exists h \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2h + 1)$
* simplificado: $\exists x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2$ é par ou x^2 é ímpar.
g.) $\forall x \in A, x \in B$
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(l))| < \varepsilon$
h.) $\forall x \in \mathbb{N}, (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 2k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 3k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 5k) \vee (\exists\, k \in \mathbb{Z} \,|\, x = 7k)$
k.) $\neg(\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 = 2$
* alternativa: $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \neq 2$
l.) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R} \,|\, c < b \wedge c > a$

23 a.) $\forall n \in \mathbb{R} n^2 \neq 2$.
Para todo número real n, $n^2 \neq 2$.
Existe um número racional cujo quadrado é igual a 2.
c.) $\forall x \in \mathbb{Z} \neg(\exists k, h \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 = 2k \wedge x^2 = 3h)$
(* simplificado: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ é ímpar ou não é divisível por 3)
Para todo número inteiro, seu quadrado é ímpar ou não é divisível por 3.
(* simplificado: $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ não é par e x^2 não é ímpar.)
Para todo número inteiro, seu quadrado não é nem par nem ímpar.
f.) $\exists x \in \mathbb{R} \,|\, \forall y \in \mathbb{R} \,|\, x + y \neq 0$.
Existe um número real x que não tem oposto.
Existe um elemento de A que não está em B.
Existe um número natural que não é divisível por 2, 3 5 e 7.
i.) $\exists x \in \mathbb{Q} \,|\, x \geq 1/x$
Existe um número racional que é maior ou igual ao seu inverso.
j.) $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \neq 1000$
A soma de quaisquer dois inteiros é sempre diferente de 1000.
Existe um número racional cujo quadrado é igual a 2.
Existe um par de números reais a e b para os quais qualquer número real c é menor ou igual a a ou é maior ou igual a b.

24 a.) Todo número real é menor que seu quadrado.
c.) Existe um único número real que é igual a seu próprio quadrado.
e.) Todo número natural é maior do que algum número natural.
g.) Para todo par de inteiros a e b, existe um inteiro que multiplicado pelo quociente de a por b o torna inteiro.
i.) Para todo número real a e para todo número real c existe um número real b tal que $ab = c$.

25 A fórmula diz: dada uma (qualquer) equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b^2 - 4ac \geq 0$, suas soluções são dadas por $(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$. Assim, as variáveis são $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. A proposição universal que expressa a Fórmula de Bhaskara pode ser escrita, em linguagem simbólica,
$\forall a, b, c, x,$
$(ax^2 + bx + c = 0) \wedge (b^2 - 4ac \geq 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$

26 Prova direta. Assume-se que a hipótese é verdadeira e prova-se, manipulando algebricamente os dados, que a tese é verdadeira.

27 Redução ao absurdo. A prova consiste em demonstrar que a negação da tese (isto é, supor que $\log_2 3$ é racional) leva a uma contradição.

28 Contrapositiva. A prova consiste em assumir que o consequente é falso (isto é, supor que a e b são racionais) e demonstrar que o antecedente também é falso (isto é, que ab é racional).

31 A própria demonstração diz que $\log x < \log 1$, isto é $\log x < 0$. No entanto, ao multiplicar ou dividir uma inequação $a < b$ por algum número negativo k, tem-se que $ak > bk$ ou $a/k > b/k$ (isto é, o sinal de ordem deveria ter sido invertido).

32 A proposição provada não é a contrapositiva do que se queria provar, e sim a recíproca.

33 A proposição é "Se $5|ab$ então $5|a$ ou $5|b$", e foi usada para provar a si mesma: "ab é da forma $5k$ ... Portanto ou $a = 5m$ ou $b = 5m$ para algum m". *Em tempo:* a proposição em si é verdadeira, é a demonstração que está errada.

34 Se $a = b$, então $a - b = 0$. Nesse caso, não podemos cancelar o fator $(a - b)$ como fizemos.