

Lista 2 - Bases Matemáticas

Conjuntos

No que se segue, $\wp(X)$ denota o conjunto potência (ou conjunto das partes) do conjunto X .

1 — Descreva os conjuntos abaixo na forma enumerativa:

- a) $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 10\}$
- b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 5\}$
- c) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 4 \leq 10\}$
- d) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 6 = 0\}$
- e) $\{4n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n < 5\}$
- f) $\{2n + 3m \mid n, m \in \mathbb{N}, n < 3 \text{ e } m \leq 4\}$
- g) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq n\}$

2 — Descreva os conjuntos abaixo na forma predicativa (atenção, as respostas ao final da lista não são as únicas possíveis):

- a) $\{0, 1, 2, 3\}$
- b) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- c) $\{-1, 1\}$
- d) $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- e) $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
- f) $\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

3 — Descreva os conjuntos abaixo na forma construtiva (atenção, as respostas ao final da lista não são necessariamente as únicas possíveis, embora sejam de certo modo 'naturais'):

- a) $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$
- b) $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
- c) $\{-1, 2, 5, 8, 11\}$
- d) $\{-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

- e) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é divisível por } 3\}$
- f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ tem resto } 2 \text{ na divisão por } 3\}$

4 — Identifique em qual formato cada conjunto abaixo está descrito e descreva-os nos outros dois formatos:

- a) $\{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq \frac{1}{2}\}$
- b) $\{4, 9, 16, 25\}$
- c) $\{n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}, -3 \leq n \leq 7\}$

5 — Sejam dados os conjuntos $X = \{0\}$, $Y = \{0, 1\}$ e $Z = \{\{0\}, 1\}$. Determine que são verdadeiras ou falsas as afirmações abaixo

- a) $X \in Z$
- b) $X \subset Z$
- c) $X \cap Z \neq \emptyset$
- d) $X \cap Y \neq \emptyset$
- e) $Y \subset Z$
- f) $\wp(X) \cap Z \neq \emptyset$

6 — Considere os seguintes subconjuntos do conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{U} : (x - 2)^2(x - 3) = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\}$$

Para esses subconjuntos determine:

- a) $A \cup B$
- b) $A \cap (B \cup C)$
- c) $C \cup A^c$

- d) $(A \cup C)^c$
- e) $A^c \cap C^c$
- f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$
- g) $\varnothing(B)$

7 — Em cada item, dê exemplos de conjuntos A, B, C satisfazendo a igualdade abaixo

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{1, 2, 3\}$$

- a) Cada conjunto contém um único elemento
- b) Cada conjunto contém dois elementos
- c) Cada conjunto contém mais de dois elementos

8 — Seja C um subconjunto de \mathbb{N} tal que

$$\{X \subset \mathbb{N} \mid 1 \notin X\} \subset \varnothing(C)$$

- a) Interprete a inclusão: Quais são os subconjuntos de \mathbb{N} que pertencem a $\varnothing(C)$?
- b) Determine todas as possibilidades para o conjunto C .

9 — Sejam A, B subconjuntos de \mathbb{N} tais que

$$\varnothing(A) \cap \varnothing(B) = \{X \subset \mathbb{N} \mid 1 \notin X\}.$$

Determine condições sobre A e B de modo que

- a) $A = B$
- b) $A \neq B$

10 — Dados A, B, C, D conjuntos quaisquer, prove as seguintes afirmações:

- a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.
- b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

Exercícios Complementares

11 — Considere as seguintes afirmações

- (i) $A \cup (A \cap B) = A$
- (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- (iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Verifique a validade de cada uma delas,

a) no caso particular em que

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ B &= \{0, 2, 4, 6, 8\}, \\ C &= \{3, 4, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

b) para quaisquer conjuntos A, B, C .

12 — Considere as seguintes afirmações (em que o complementar é relativo a algum conjunto universo fixado)

- (i) $(A^c)^c = A$
- (ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- (iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- (iv) $A^c \cap B = B \setminus A$
- (v) $A \cup B^c = (B \setminus A)^c$

Verifique a validade de cada uma delas,

a) no caso particular em que

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ B &= \{0, 2, 4, 6, 8\}, \\ \mathbb{U} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \end{aligned}$$

sendo \mathbb{U} o conjunto universo;

b) para qualquer universo \mathbb{U} e quaisquer subconjuntos A, B desse universo.

13 — Mostre que, para quaisquer conjuntos A, B, C , tem-se que

- a) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.
- b) Se $\varnothing(A) = \varnothing(B)$ então $A = B$.
- c) $A \setminus B \subset B$ se e somente se $A \setminus B = \varnothing$.

Respostas dos Exercícios

1 b.) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

d.) $\{2\}$

f.) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16\}$

g.) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$

2 c.) $\{x \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 1\}$

e.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ deixa resto } 1 \text{ na divisão por } 3\}$

f.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é um quadrado perfeito}\}$

3 a.) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

c.) $\{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } -1 \leq n \leq 3\}$

f.) $\{3n + 2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$

4 a.) Enunciado na predicativa. Enumerativa:

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Construtiva: $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 2\}$

b.) Enunciado na enumerativa. Predicativa:

$\{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 25 \text{ e } n \text{ é um quadrado perfeito}\}$.

Construtiva: $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } 2 \leq n \leq 5\}$

c.) Enunciado na construtiva. Enumerativa:

$\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Predicativa: $\{n \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq n \leq 8\}$

5 a.) V; b.) F; e.) F; f.) V

6 b.) $\{2, 3, 4\}$

d.) $\{5, 7\}$

f.) $\{1, 3, 4, 6, 8\}$

g.) $\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

7 a.) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{3\}$

c.) $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

8 a.) O conjunto à esquerda da inclusão é formado por todos os subconjuntos de \mathbb{N} que não possuem o número 1. Assim, a inclusão diz que todos os subconjuntos de \mathbb{N} que não possuem o número 1 são também elementos de $\wp(C)$ (isto é, subconjuntos de C).

b.) $C = \mathbb{N}$ ou $C = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

9 b.) Isso ocorre se $1 \in A \setminus B$ ou $1 \in B \setminus A$

10 a.) Se $x \in A$ então, como $A \subset B$, $x \in B$. Como por hipótese $B \subset C$, de $x \in B$ segue que $x \in C$. Como isso vale para qualquer x , resulta $A \subset C$.

11 b.) (i) A inclusão $A \subset (A \cap B)$ é imediata (veja Exercício 10, item d). Por outro lado, se $x \in A \cup (A \cap B)$, então $x \in A$ ou $x \in A \cap B$, e em qualquer um dos casos resulta $x \in A$.

12 b.) (ii) Temos que $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B$ o que ocorre se e somente se $x \notin A$ ou $x \notin B$, ou seja, $x \in A^c$ ou $x \in B^c$, o que equivale a $x \in A^c \cup B^c$.

13 a.) *Dica:* Ao mostrar a inclusão $B \subset C$, considere, para cada $x \in B$, dois casos: $x \in A$ ou $x \notin A$. O mesmo para a outra inclusão.

b.) *Dica:* Ao comparar um elemento x de um conjunto ou do outro, considere o subconjunto unitário $\{x\}$.

c.) *Dica:* Se $A \setminus B$ não fosse vazio...