Lista 5 - Bases Matemáticas

Números Reais

Parte I

1 — Este exercício trata da ordenação dos números reais e sua relação com as operações de soma, multiplicação e potências.

a) Sabendo que $a > 0$, podemos afirmar que $a < a^2$?

b) Sabendo que $a < 0$, podemos afirmar que $a < a^2$?

c) Sabendo que $0 < a < 1$, coloque em ordem crescente os números $0, 1, a, a^2, a^3, a^{10}$.

d) Sabendo que $0 < a < b$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

e) Sabendo que $a < b < 0$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

f) Sabendo que $a < 0 < b$, coloque em ordem crescente os números $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$.

g) Sabendo que $0 < a < 1$, coloque em ordem crescente os números $0, 1, -1, a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$.

h) Sabendo que $a + b > 0$ e $a < 0$, coloque em ordem crescente os números $0, a, -a, b, -b$.

i) Sabendo que $a < -1$, $0 < b < 1$ e $ab+1 > 0$, coloque em ordem crescente $0, 1, -1, a, -a, b, -b, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, -\frac{1}{b}$.

j) Sabendo que $0 < a < 1 < b$ e $\frac{1}{a} < b$, coloque em ordem crescente os números $1, a, b, ab$.

k) Sabendo que $0 < a < 1 < b$, coloque em ordem crescente os números a, a^2, b, b^2.

l) Sabendo que $0 < a < 1 < b$ e $a^2b > 1$, coloque em ordem crescente os números $a, a^2, b, b^2, \frac{1}{b}$.

2 — Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ não nulos, coloque em ordem crescente os números:

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ c,\ -a,\ -b,\ -c,\ a^2,\ b^2,\ c^2,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},$$

sabendo que:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < -b < 1 \\ 4 < c \\ a < b^2 \end{cases}$$

Parte II

3 — Dado um número inteiro n, defina

$$\overline{n} = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2n & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) Resolva a inequação $\overline{n}^2 - n^2 > 2$

b) Descreva $\overline{n+1}$ em termos da paridade de n

c) Descreva $\overline{n+\overline{n}}$ em termos da paridade de n

4 — Dado um número inteiro n, defina

$$\overline{n} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) Resolva a inequação $\overline{n}^2 + 3\overline{n} < 4$

b) Descreva $\overline{n+1}$ em termos da paridade de n

c) Descreva $\overline{n+\overline{n}}$ em termos da paridade de n

5 — Dado um número real x, defina

$$\overline{x} = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Resolva a inequação $\overline{x}^2 - \overline{x^2} \geq 3$
b) Descreva $\overline{x+1}$ em termos dos valores possíveis de x
c) Descreva $\overline{2x-1}$ em termos dos valores possíveis de x
d) Descreva $\overline{\overline{x} - 2x}$ em termos dos valores possíveis de x

6 — Escreva as seguintes expressões eliminando adequadamente o valor absoluto, separando em dois *ou mais* casos quando for necessário (veja o modelo abaixo)

$$|x-2|-1 = \begin{cases} x-3 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ -x+1 & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

a) $||x|-1|$
b) $a - |a - |a||$
c) $|x-1| - |2-x|$
d) $||x-3|-2|$

7 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações

a) $|x-3| = 8$
b) $|x| = -x$
c) $|x| = -x+2$
d) $|-x+2| = 2x+1$
e) $\left|5x - x^2 - 6\right| = x^2 - 5x + 6$

8 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações

a) $|x-1| \cdot |x+1| = 0$
b) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$
c) $|x+1| + |x-2| = 1$
d) $|x+1| + |x-2| = 5$
e) $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$
f) $||x-1|+2| = 3$
g) $||x-1|-2| = 3$
h) $||2-x| - |x+3|| = 4$

9 — Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes inequações

a) $|x-3| < 8$

b) $|x+4| < 2$

c) $|2-x| > 3$

d) $|x+3| + x < 1$

e) $|x+2| > |x-3|$

f) $|x-1| + |x-2| > 1$

g) $|x-1| + |x+1| \leq 2$

h) $|x-1| + |x+1| < 2$

10 — Em cada caso abaixo, expresse a(s) condição(ões) dadas em termos de equações ou inequações envolvendo valores absolutos e determine os respectivos conjuntos-solução

a) x está mais próximo de 5 do que de 2

b) A diferença entre as distâncias de x a -2 e 3 é exatamente igual a 5

c) A distância entre x e 1 não supera 3 e x está mais perto de 6 do que de -8

11 — Resolva as seguintes inequações

a) $|x-2| - x|x+2| < 1$

b) $\left|x^2 - 4\right| + 2x + 1 \geq 0$

c) $\left|1 - |x+3|\right| > 2$

12 — Determine o domínio da inequação abaixo e seu conjunto-solução

$$\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$$

Parte III

13 — Prove as seguintes propriedades

a) $|x| = |-x|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $|xy| = |x||y|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

c) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*$

14 — Dada uma constante $r > 0$, e um número real a qualquer, mostre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

a) $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$

b) $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

15 — Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações

a) $|x-2| < 3 \Rightarrow x < 3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $|x-2| < 1 \Rightarrow x < 4, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $|x-3| < 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $|x-3| > 2 \Rightarrow x(x-4) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) $|x-1| > 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

f) $|x-5| < 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

16 — Em cada caso, determine para quais valores de r ($r > 0$) a implicação é verdadeira

a) $|x-4| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 < 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $|x+3| < r \Rightarrow x^2 - 10x + 9 > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Exercícios Complementares

17 — Prove as seguintes propriedades

a) *Desigualdade Triangular:*
$|x+y| \leq |x| + |y|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

b) $|x| - |y| \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

c) $||x| - |y|| \leq |x - y|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

d) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|, \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

18 — Use a Desigualdade Triangular para mostrar que

a) Se $|x-3| < 0,005$ e $|y-1| < 0,005$, então $|(x+y) - 4| < 0,01$

b) Se $|x - x_0| < \frac{r}{2}$ e $|y - y_0| < \frac{r}{2}$, então $|(x+y) - (x_0 + y_0)| < r$

19 — Determine para quais valores de r ($r > 0$) pode-se afirmar: se $|x-1| < 0,001$ e $|y-2| < r$, então $|x+y-3| < 0,02$.

20 — Use a Desigualdade Triangular para mostrar que

a) Se $|x-3| < \frac{5}{1000}$ e $|y-1| < \frac{5}{1000}$, então $|(x-y) - 2| < \frac{1}{100}$

b) Se $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{2}$, então $|(x-y) - (x_0 - y_0)| < \epsilon$

21 — Determine para quais valores de r ($r > 0$) pode-se afirmar: se $|x-1| < 0,001$ e $|y-2| < r$, então $|x-y-1| < 0,02$.

Respostas dos Exercícios

1 a.) Não. Por exemplo, $(1/2)^2 < (1/2)$
b.) Sim, pois $a < 0 < a^2$
c.) $0 < a^{10} < a^3 < a^2 < a < 1$
d.) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
e.) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
f.) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
g.) $-\frac{1}{a} < -1 < -a < 0 < a < 1 < \frac{1}{a}$
h.) $-b < a < 0 < -a < b$
i.) $-\frac{1}{b} < a < -1 < \frac{1}{a} < -b < 0 < b < -\frac{1}{a} < 1 < -a < \frac{1}{b}$
j.) $0 < a < 1 < ab < b$
k.) $0 < a^2 < a < 1 < b < b^2$
l.) $0 < \frac{1}{b} < a^2 < a < 1 < b < b^2$

2 $-c < \frac{1}{b} < -a < 0 < \frac{1}{c} < a^2 < a < b^2 < -b < 1 < \frac{1}{a} < c$

6 a.)
$$\begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ -x-1, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$
c.)
$$\begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 2 \\ 2x-3, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ -1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

7 b.) $Sol = (-\infty, 0]$
e.) $Sol = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

8 b.) $Sol = \{\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\}$
c.) $Sol = \varnothing$
e.) $Sol = [1, 2) \cup \{5\}$
g.) $Sol = \{-4, 6\}$
h.) $Sol = \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$

9 b.) $Sol = (-6, -2)$
c.) $Sol = (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$
e.) $Sol = (\frac{1}{2}, +\infty)$
f.) $Sol = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
g.) $Sol = \{-1, 1\}$

10 b.) $|x+2| - |x-3| = 5; Sol = [3, +\infty)$
c.) $|x-1| < 3$ e $|x-6| < |x+8|\,; Sol = (-1, 4)$

11 a.) $Sol = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \ \leq x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ ou $x \geq 2\}$
c.) $Sol = (-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$

12 Dom $= \mathbb{R}\backslash\{2, 8\}$; $Sol = [-1, 2) \cup (8, 5+\sqrt{3}]$

13 b.) Escreva a igualdade e estude-a nos casos $x \geq 0, y \geq 0$, $x \geq 0, y < 0$, $x < 0, y \geq 0$ e $x < 0, y < 0$.

15 a.) F; **c.)** V; **e.)** V;

16 b.) $0 < r < 4$

17 a.) $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$. Somando as desigualdades temos: $-|x|-|y| \leq x+y \leq |x|+|y|$, i.e. $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$, donde a tese.
b.) Basta observar que $|x| = |x-y+y|$ e aplicar a Desigualdade Triangular.

20 a.) Observe que $x-y-2 = (x-3)+(1-y)$.