Armando Caputi e Daniel Miranda

Bases Matemáticas

Sumário

Apresentação

O curso de *Bases Matemáticas* na UFABC nasceu dentro de uma estratégia da universidade em proporcionar aos alunos ingressantes uma experiência de aprendizado que favorecesse a transição do ensino médio ao ensino superior. O foco dessa estratégia é dividido em dois eixos: um voltado ao reforço conceitual, outro voltado à formação e à postura de estudo.

No que concerne aos aspectos conceituais, o curso de *Bases Matemáticas* se propõe, por um lado, a rever uma parte significativa do conteúdo do ensino médio, mas sob um ponto de vista mais maduro, típico do ensino superior. Por outro lado, o curso se propõe a introduzir ao estudante conceitos mais refinados da Matemática, através de um esforço gradual de abstração. Interligando esses vários aspectos, o curso é permeado por uma tensão permanente em torno dos seguintes objetivos:

- aprimorar o conhecimento e o uso de regras básicas da álgebra
- desenvolver a capacidade de compreensão e uso da linguagem matemática
- desenvolver o raciocínio lógico

A preocupação com aspectos ligados à formação e à postura de estudo, parte da constatação da predominância, no ensino médio brasileiro, da "formação voltada ao *treinamento*". Em outras palavras, uma formação restrita à mera reprodução de métodos e algoritmos para resolver determinados problemas, as famosas "receitas de bolo". Tal enfoque acaba por desenvolver no estudante uma postura passiva, ao invés de proporcionar autonomia e criatividade.

A passagem do “treinamento” para a “autonomia” é uma das mais difíceis de serem transpostas. Por isso, deixamos aqui um convite expresso para que se dê particular atenção a esse processo. Desde os primeiros cursos, como o de *Bases Matemáticas*, parte dos esforços devem ser voltados ao próprio método de estudo e à postura que se tem diante dos conhecimentos aprendidos.

Sobre este livro

O principal objetivo destas notas é suprir a falta de bibliografia específica para um curso como o de *Bases Matemáticas*. É bem verdade que cada um dos tópicos tratados nesse curso pode ser encontrado em algum bom livro, mas não de forma coesa e conjunta. Sem prejuízo do salutar hábito de se consultar ampla bibliografia, adotar inúmeros livros como referências principais deste curso nos pareceu fora de propósito nesse momento inicial da vida acadêmica.

A atual versão do livro já passou por várias revisões, muitas delas sugeridas por professores e alunos que utilizaram essas notas em anos anteriores. Entretanto, continuamos nosso esforço de aprimorar e complementar o material já produzido até aqui. Novas seções ou até mesmo pequenas correções podem ser apresentadas em um futuro próximo, assim como versões atualizadas e aprimoradas de alguns capítulos do livro. Por último, gostaríamos de dizer que vemos com muito bons olhos o apontamento de críticas e sugestões, tanto por parte dos alunos do curso de *Bases Matemáticas*, quanto dos professores dessa disciplina que optarem por usar total ou parcialmente estas notas.

Símbolos e notações gerais

Ao longo do curso serão adotados os seguintes símbolos e notações (sem prejuízo de outros símbolos e notações que irão sendo introduzidos ao longo destas notas):

$\exists$	:	*existe*
$\forall$	:	*qualquer que seja* ou *para todo(s)*
$\Rightarrow$	:	*implica*
$\Leftrightarrow$	:	*se, e somente se*
$\therefore$	:	*portanto*
$\because$	:	*pois*
$\mid$	:	*tal que*
$:=$	:	*definição* (o termo à esquerda de $:=$ é definido pelo termo ou expressão à direita)
i.e.	:	*id est* (em português, *isto é*)
$\square$	:	*indica o final de uma demonstração*

1 Elementos de Lógica e Linguagem Matemática

“Quando eu uso uma palavra, disse Humpty Dumpty, em tom bastante desdenhoso, ela significa exatamente o que eu quiser que ela signifique - nem mais nem menos.”
Através do Espelho - Lewis Carroll

A matemática utiliza uma linguagem específica, na qual os termos possuem significados precisos e muitas vezes distintos do usual. Assim é necessário que conheçamos o sentido de alguns termos e expressões matemáticas. Esse é um dos objetivos desse capítulo, ao apresentar de modo sucinto e intuitivo os aspectos fundamentais da linguagem matemática, enfatizando principalmente aqueles termos que são usados em contextos e com significados diversos daqueles em que costumamos empregá-los normalmente.

Mas não é somente o vocabulário e a linguagem que são distintos na matemática. Também a concepção de *argumento*, de *justificativa*, e mesmo de *explicação*. Um argumento matemático, também conhecido como demonstração ou prova, para ser correto, deve seguir princípios estritos de lógica, princípios que garantam a confiabilidade do conhecimento matemático. Alguns desses princípios são apresentados na seção 1.2.

1.1 Proposições

Começaremos definindo as frases mais simples de nossa linguagem: as proposições.

Definição 1.1 *Uma **proposição** é uma sentença declarativa que é* verdadeira *ou* falsa*, mas não simultaneamente ambas.*

Exemplos 1.2 As seguintes frases são exemplos de proposições.

- “$2 + 5 = 7$”;
- “A função $f(x) = -x$ é uma função crescente”. Nesse caso, temos um exemplo de uma proposição *falsa*.
- “$2^{25^{9876}} + 3^{4576}$ é primo”; É uma proposição pois apesar de não ser fácil decidir se a proposição é *verdadeira* ou *falsa*, claramente só uma dessas opções pode ocorrer.

Exemplos 1.3 Nenhuma das frases seguintes é uma proposição, porque ou não são declarações ou não podemos atribuir um único valor *verdadeiro* ou *falso*.

- "Vamos dançar!"
- "Como você está?".
- "Esta sentença é falsa". Essa frase não pode ser verdadeira pois isto implicaria que ela é falsa. E não pode ser falsa pois implicaria que é verdadeira.
- "Está quente hoje". Essa frase pode ser vista como uma proposição desde que especifiquemos precisamente o que significa quente, como por exemplo se definirmos que está quente se a temperatura é maior que 26^{o}C, pois somente assim podemos atribuir um valor de verdade a frase. Note,

porém, que esse não é o uso cotidiano da frase. O uso cotidiano expressa uma impressão, uma sensação e nesse sentido não é uma proposição.

Como ilustrado pelo exemplo anterior, o fato de uma sentença poder ser vista como uma proposição depende do contexto em que essa sentença é enunciada e dentro desse contexto uma proposição deve ser suficientemente clara e objetiva para que possamos atribuir um e somente um valor verdade, i.e, *verdadeiro* ou *falso*.

Finalmente, a definição de proposição implica que todas as afirmações matemáticas serão necessariamente verdadeiras ou

falsas, não havendo outra possibilidade (esse último fato é conhecido como *Princípio do Terceiro Excluído*).
Notação: No que se segue denotaremos uma proposição qualquer por p, q, r, etc.

1.1.1 Proposições Universais e Particulares

Em diversas situações precisamos que o "sujeito" das proposições seja uma variável que possa ser substituída por um elemento qualquer dentre uma coleção de objetos $\mathbb{U}$ em consideração. O conjunto $\mathbb{U}$ neste caso será denominado **universo do**

discurso, ou ainda, **domínio de discurso** . Assim, por exemplo, na sentença "$x \in \mathbb{R}, x < 3$", x é a variável e $\mathbb{R}$ é o universo do discurso.

Proposições que dependam de uma ou mais variáveis são denominadas **proposições abertas**. Elas são indicadas por uma letra seguida da variável ou das variáveis entre parênteses, i.e,

$$p(x), q(x), p(x, y), ...$$

O valor verdade de uma proposição aberta depende do valor atribuído às variáveis. Por exemplo, considere a função proposicional $p(x) =$"$x < 3$", neste caso se $x = 2$ então $p(2) =$"$2 < 3$"

tem valor verdade *verdadeiro*, por outro lado se considerarmos $x = 4$ temos que $p(4) =$"$4 < 3$ " tem valor verdade *falso*.

Definição 1.4 *O conjunto dos valores de x para os quais a proposição aberta $p(x)$* verdadeira *é denominado* ***conjunto verdade*** *de $p(x)$.*

Exemplos 1.5

- O conjunto verdade de $p(x) =$"x é primo e $3 < x < 14$" é $\{5, 7, 11, 13\}$
- O conjunto verdade de $p(x) =$"x é real e $x^2 + 1 = 5$" é

$$\{-2, 2\}$$

Através de proposições abertas podemos fazer afirmações sobre todos os elementos de um conjunto usando o **quantificador universal** $\forall$ que é lido como "para todo"ou "qualquer que seja".

Assim a proposição "para todo número natural n temos que $2n + 1$ é ímpar" pode ser escrita como

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1 \text{ é ímpar}$$

ou ainda como

$$\forall n \in \mathbb{N} p(n),$$

sendo que $p(n)$ denota a proposição aberta "$2n + 1$ é ímpar".

Também é possível fazer afirmações sobre a existência de um elemento de um conjunto usando o **quantificador existencial** $\exists$, que é lido como "existe". Desta forma a proposição "a equação linear $ax + b = 0$, com $a \neq 0$, admite solução real" pode ser escrita como :

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x \in \mathbb{R} \,|\, ax + b = 0.$$

Ou ainda, se denotarmos como $q(x) =$ "$ax + b = 0''$ podemos reescrever a afirmação anterior como:

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x \in \mathbb{R} \,|\, q(x).$$

Ou de modo mais resumido, deixando subentendido o domínio do discurso e o símbolo de tal que, $|$:

$$\text{Se } a \neq 0, \exists x q(x)$$

Ressaltamos que $\exists x \,|\, p(x)$ significa que existe **pelo menos um** elemento no domínio de discurso tal que para esse elemento vale $p(x)$. Em diversas situações esse elemento é único, denotaremos esse fato por $\exists! x \,|\, p(x)$, que se lê "existe e é único x tal que $p(x)$". Assim por exemplo, nos reais, $\exists! x \in \mathbb{R} \,|\, (x-1) = 0$.

É importante distinguirmos as variáveis que estão quantificadas das que não estão. Uma variável é dita **livre** quando não está quantificada e é dita **aparente** quando está quantificada. Assim, na proposição “n é par”, n é uma variável livre. Já em “ para todo número natural n, $2n + 1$ é ímpar” n é uma variável aparente.

Em português	símbolo	nome
Para todo, para cada	$\forall$	quantificador universal
Existe, há, para algum	$\exists$	quantificador existencial
Existe único	$\exists!$	

Tabela 1.1: Quantificadores

Nesse contexto, uma proposição é dita *universal* se faz referência a *todos* os objetos do universo $\mathbb{U}$. Caso contrário, é dita *particular* .

Exemplos 1.6 No que se segue, assuma que o universo é o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$.

1. "Todos os números naturais são ímpares" é uma proposição universal.

2. "O número 2 é par" é uma proposição particular.

3. "Nenhum número natural é primo" é uma proposição universal, pois equivale a dizer que "todo número natural tem a propriedade de não ser primo.

4. “Há números naturais pares” é uma proposição particular.

5. “Há números naturais cujo dobro ainda é um número natural” é uma proposição particular.

6. “O quadrado de todo número natural é maior do que 4” é uma proposição universal.

7. “Ao menos dois números naturais são pares” é uma proposição particular.

8. “O número natural 0 é menor ou igual do que qualquer número natural” é uma proposição particular.

9. "Todo número natural é maior ou igual do que o número natural 0" é uma proposição universal.

10. "$n < n + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$" é uma proposição universal.

11. "$\exists n \in \mathbb{N} \,|\, n^2 = n$" é uma proposição particular.

Algumas observações importantes:

- O fato de uma proposição ser universal ou particular não tem nenhuma relação com o fato de ser verdadeira ou falsa.

- A proposição do exemplo 4 é particular, pois refere-se a alguns números naturais.

- A proposição do exemplo 5 é particular, mesmo se é satisfeita por todos os números naturais. O que importa, é que a proposição se refere a alguns números, não a todos.

- As proposições dos exemplos 8 e 9 acima dizem a mesma coisa, isto é, que 0 é o menor dos números naturais (de fato, são ambas verdadeiras). Entretanto, sob o ponto de vista formal, a proposição do exemplo 8 afirma uma propriedade do número 0 e por isso é particular, enquanto a proposição do exemplo 9 afirma uma propriedade de todos os números naturais (por isso é universal).

Exemplos e Contra-exemplos

Quando lidamos com proposições universais, entram em cena os *exemplos* e *contra-exemplos*. Considere uma proposição universal do tipo *todo elemento de* $\mathbb{U}$ *satisfaz a propriedade* p. Um **Exemplo** para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que satisfaz a propriedade p. Um *contra-exemplo* para essa proposição é um elemento do universo $\mathbb{U}$ que *não* satisfaz a propriedade p.

Exemplos 1.7

1. Considere a proposição "para todo $n \in \mathbb{N}$ par, $(n + 1)^2$ é ím-

par". Neste caso o número 2 é um exemplo dessa proposição, pois está no domínio do discurso e $(2 + 1)^2 = 9$ é ímpar. Já o número 3 não é nem exemplo nem contra-exemplo, pois não pertence ao domínio de discurso.

2. Para todo $m \in \mathbb{N}$, $m^2 - m + 41$ é primo. Neste caso 1 é um exemplo, pois $1 \in \mathbb{N}$ e $1^2 - 1 + 41 = 41$ é primo. O número 2 também é um exemplo, pois $2 \in \mathbb{N}$ e $2^2 - 2 + 41 = 43$ é primo. Pode-se verificar facilmente que todos os números naturais entre 1 e 40 são exemplos dessa afirmação. Por outro lado, 41 é contra-exemplo, pois $41 \in \mathbb{N}$ e $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ não é primo.

3. O número 5 é um exemplo para a proposição "Todo número natural é ímpar", enquanto que o número 2 é um contra-exemplo.

4. O número 4 é um exemplo para a proposição "Nenhum número natural é primo", enquanto que o número 3 é um contra-exemplo (lembre, nesse caso, que a propriedade universal alegada pela proposição é *não* ser primo).

5. O número 8 é um exemplo para a proposição "O quadrado de todo natural é maior do que 4", enquanto que o número 1 é um contra-exemplo.

6. A proposição “Todo número natural é maior ou igual a zero” possui inúmeros exemplos, mas não possui contraexemplos.

7. A proposição “Todo número natural é menor que zero” possui inúmeros contraexemplos, mas não possui exemplos.

Uma proposição universal, que admite contraexemplos é falsa. Essa é uma das maneiras mais simples de provar que uma afirmação dessa forma é falsa, através de um contra-exemplo.

Já uma afirmação da forma “existe x em $\mathbb{U} \mid p(x)$” é verdadeira se existir pelo menos um elemento x no domínio do discurso $\mathbb{U}$ tal que para esse elemento a proposição $p(x)$ é verdadeira.

De modo análogo, chamaremos esse elemento de exemplo da proposição. E assim, proposições sobre existência podem ser demonstradas exibindo um exemplo.

Por outro lado, se o domínio de discurso tiver mais que um elemento, a existência de exemplo não implica na verdade uma afirmação da forma "para todo x em $\mathbb{U}$, $p(x)$". Pois, para que essas afirmações sejam verdadeiras, todos os possíveis elementos do domínio devem satisfazer $p(x)$.

	“para todo“ $\forall$	”existe“ $\exists$
existem exemplos	inconclusivo	verdadeira
não existem exemplos	—	falsa
existem contraexemplos	falsa	inconclusivo
não existem contraexemplos	verdadeira	—

Tabela 1.2: Comportamento geral do valor verdade de uma proposição quantificada em função da existência/inexistência de exemplos ou contraexemplos

Exercícios

Ex. 1.1 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica:

a) Existe um número real n tal que $n^2 = 2$.

b) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.

c) Existe x tal que x^2 é par e divisível por 3.

d) Não existe número inteiro x tal que x^2 é primo ou x^2 é negativo.

e) Existe um número inteiro x tal que x^2 é par ou x^2 é ímpar.

f) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

g) Todo elemento do conjunto A é elemento do conjunto B.

h) Para todo ϵ, existe $\delta(\epsilon)$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(l))| < \varepsilon$.

Ex. 1.2 — Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine o valor verdade para cada uma das seguintes proposições:

a) $\exists x \in A \,|\, x + 4 = 9$.

b) $\exists x \in A \,|\, x < 7$.

c) $\forall x \in A, x + 3 < 7$.

d) $\forall x \in A, x + 3 < 9$.

Ex. 1.3 — Para todas as afirmações a seguir n denota um número natural. Determine o conjunto verdade das seguintes proposições abertas:

a) $n^2 < 12$

b) $3n + 1 < 25$

c) $3n + 1 < 25 \; e \; n + 1 > 4$

d) $n < 5$ ou $n > 3$

e) n é primo e não é verdade que $n > 17$

f) $(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5) = 0$

Ex. 1.4 — Dê exemplos ou contraexemplos, se existirem, para as seguintes afirmações:

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 1 > 2$.

b) Todas as letras da palavra "banana" são vogais.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x$.

d) Para todo $y \in \mathbb{N}$, $y^3 > 1$

1.1.2 Proposições Compostas: e, ou, não

Podemos expandir nossa linguagem construindo novas proposições através da combinação de proposições mais simples de modo a obter proposições mais elaboradas. Faremos a combinação de proposições através de conectivos, dentre os quais "*e*", "*ou*" e "*implica*" e do modificador "*não*".

Definição 1.8 *Dadas duas proposições p, q:*

- *a proposição composta p ou q é chamada* ***disjunção*** *de p e q. A disjunção p ou q é* verdadeira *quando pelo menos* *uma das proposições p ou q forem* verdadeiras. *Caso contrário o valor verdade de p ou q é* falso.

- *a proposição composta p e q é chamada* ***conjunção*** *das proposições p e q. A conjunção p e q é* verdadeira *somente quando as proposições p e q forem ambas* verdadeiras. *Caso contrário o valor verdade de p e q é* falso.

A proposição *p ou q*, pela definição anterior, é falsa somente quando **ambas** as proposições *p* e *q* forem falsas. Desta forma o uso do conectivo *ou* em matemática não é o mesmo que o uso cotidiano do termo. Assim, por exemplo, o sentido usual da expressão "Pedro estava estudando ou Pedro estava numa festa" não inclui a possibilidade que ele estivesse estudando numa festa, enquanto que o conectivo *ou* em matemática inclui essa possibilidade. Ou seja, em matemática o conectivo *ou* é sempre usado de modo inclusivo.

Por outro lado o sentido da conjunção *e* se aproxima do sentido usual do "e" em português, assim a proposição p *e* q é verdadeira somente quando ambas as proposições p e q forem verdadeiras.

Definição 1.9 *Dado uma proposição p, a negação de p é uma proposição com valor verdade invertido, chamada de* ***negação*** *de p, denotada não p e que pode ser lida como "não p" ou "não é verdade p".*

Exemplos 1.10

- A negação da proposição "x é ímpar" é a afirmação "x não é ímpar", ou equivalentemente "x é par"
- A negação da proposição "$\sqrt{2}$ não é racional" é "$\sqrt{2}$ é racional"

Observação 1.11 *Adotaremos a seguinte convenção relativa a prioridade dos operadores lógicos: o modificador não abrange somente a proposição mais próxima, salvo o caso de parênteses. Assim, por exemplo não p ou q, somente a proposição p é negada, isto é, a proposição anterior é uma forma abreviada da proposição* (*não p*) *ou q.*

O seguinte teorema nos diz como negar a conjunção e a disjunção de duas proposições.

Teorema 1.12 ***Negação da Disjunção e da Conjunção e Dupla Negação***

Sejam p, q proposições. Então são válidas as seguintes regras de negação

1. *A negação da proposição p e q é (não p) ou(não q);*

2. *A negação da proposição p ou q é (não p) e(não q);*

3. *A negação da proposição não p é p.*

Exemplos 1.13

- A negação da proposição "x é divisível por 2 e 3" é "x não é divisível por 2 ou x não é divisível por 3".

- A negação da proposição "x é divisível por 2 ou 3" é "x não é divisível por 2 e x não é divisível por 3".

- A negação da proposição "b é soma de quadrados ou b é primo" é a afirmação que "b não é soma de quadrados e b não é primo".

- A negação da proposição "x é maior que 2 *ou* x é menor igual que -1 " é a proposição " x é menor igual a 2 *e* x é maior que -1."

Para proposições quantificadas temos ainda as seguintes regras de negação:

Teorema 1.14 *Negação do Quantificador*
Seja $p(x)$ um proposição aberta. Então são válidas as seguintes regras de negação:

- *A negação da proposição "para todo x em D é verdade $p(x)$" é a proposição "existe pelo menos um x em D tal que não é verdade $p(x)$".*
- *A negação da proposição "existe x em D tal que é verdade $p(x)$" é a proposição "para todo x em D não é verdade $p(x)$".*

Exercício Resolvido 1.15 Converta as seguintes afirmações para a forma simbólica e diga quais são as suas negações:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.
- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

Solução:

- Todos os números naturais podem ser decompostos como produtos de primos.

Se denotarmos $m(x) =$ "x pode ser decomposto como produto de n
então a proposição acima pode ser reescrita na forma simbólica como:

$$\forall x \in \mathbb{N}, m(x)$$

ou mais resumidamente $(\forall x)m(x)$, deixando implícito que o domínio da variável é o conjunto dos números naturais.

A negação da proposição é " Existe um número natural que não pode ser decomposto em primos" ou simbolicamente

$$\exists x \in \mathbb{N} \mid \textit{não}\, m(x)$$

- Existe inteiro n tal que $n + 3 = 4$.

  Se denotarmos por $p(n) =$ "$n + 3 = 4''$ então a proposição pode ser reescrita em forma simbólica como

  $$\exists n \in \mathbb{N} \mid p(n)$$

  Para essa proposição o domínio do discurso são os números naturais. Observe que essa afirmação é verdadeira pois 1 satisfaz $p(1)$. A negação de "Existe um número inteiro n tal que $n + 3 = 4$" é "para todo inteiro n temos que não é verdade que $n+3 = 4$", ou simplificando "para todo número inteiro n temos que $n + 3 \neq 4$"

□

Exercícios

Ex. 1.5 — Atribua um valor verdade à cada uma das seguintes proposições:

a) 5 é um número primo e 4 é um número ímpar.

b) 5 é um número primo ou 4 é um número ímpar.

c) Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar.)

d) (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.

Ex. 1.6 — Negue as seguintes proposições:

a) $3 > 4$ *e* 2 é um número par.

b) $4 > 2$ *ou* $3 > 5$.

c) $4 > 2$ *ou* $(\exists k)(k < 3$ *e* $k > 5)$.

d) (Não é verdade que 3 é um número par) ou que 5 é um número ímpar.

e) 2 é um número par e $3k + 1$ é um número ímpar.

f) 2 é número par e não é verdade que 3 é um número ímpar.

g) Não é verdade que (5 é um número primo e 4 é um número ímpar.)

h) (Não é verdade que 5 é um número primo) ou 4 é um número ímpar.

Ex. 1.7 — Nas seguintes proposições abertas o domínio do discurso é o conjunto dos números reais. Para essas proposições determine e esboce na reta real o seu conjunto verdade.

a) $x > 2$ e $x < 4$.

b) $x > 2$ ou $x < 3$.

c) $x > 2$ ou ($x < 5$ e $x > 3$).

d) não é verdade que ($x > 2$ e $x < 4$).

Ex. 1.8 — Para as seguintes proposições, escreva a negação, em português e simbólica, de cada uma delas.

a) Existe um número real x tal que $x^2 = 2$.

b) Para todo ϵ, existe $\delta(\epsilon)$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(l))| < \varepsilon$.

c) Não existe número racional x tal que $x^2 = 2$.

d) Existe um número natural n tal que n^2 é par e divisível por 3.

e) Não existe número inteiro m tal que m^2 é um número primo ou m^2 é negativo.

f) Para cada número real x existe um número real y tal que $x + y = 0$.

g) Todo elemento de um conjunto A é elemento do conjunto B.

1.1.3 Implicação

Um dos conectivos de maior importância na matemática é a **implicação** ou **condicional**.

Definição 1.16 *Dadas duas proposições p e q então podemos construir a proposição "se p então q" que também pode ser lida como "p implica q", que denotaremos por*

$$p \Rightarrow q.$$

A implicação $p \Rightarrow q$ é falsa *somente no caso que a proposi-*

ção p é verdadeira *e a proposição q é* falsa.

Numa implicação, $p \Rightarrow q$, a proposição p é denominada **hipótese** ou **premissa** e a proposição q é denominada **tese, conclusão ou consequente** da implicação.

A tabela a seguir apresenta o valor verdade de $p \Rightarrow q$ em função dos valores verdades de p e q.

p	q	$p \Rightarrow q$
verdadeiro	*verdadeiro*	*verdadeiro*
verdadeiro	*falso*	*falso*
falso	*verdadeiro*	*verdadeiro*
falso	*falso*	*verdadeiro*

Tabela 1.3: Valores verdade da implicação em função dos valores verdades de p e q.

E importante observar, que na matemática a implicação $p \Rightarrow q$ não estabelece nenhuma relação de causa-efeito entre a hipótese e a tese. A implicação matemática somente estabelece uma relação entre o valor lógico da implicação e os valores lógicos da premissa e da conclusão.

Assim a implicação "Se 4 é par, então um triângulo equilátero tem todos os ângulos iguais" é uma implicação verdadeira pois o antecedente ("4 é par") é verdadeiro e o consequente ("um triângulo equilátero tem todos os ângulos iguais") é também verdadeiro. Apesar disso, nenhuma relação causal parece existir entre esses dois fatos. Mais surpreendente, nesse aspecto é que a implicação "se 2 é ímpar então $2 + 5 = 3$" é verdadeira. Esse exemplo ilustra a última linha da nossa tabela. É fundamental observar que estamos afirmando apenas que a implicação é verdadeira, e não a conclusão da implicação é verdadeira.

Esse comportamento “não-usual” da implicação pode ser melhor entendido através de uma analogia. Imagine uma lei que diz que todos os motoristas de fusca devem usar gravatas vermelhas. Quando um motorista estará desobedecendo a lei? Se ele não estiver dirigindo fusca (ou seja premissa falsa) então não importa se ele está ou não usando gravata vermelha pois nesse caso a lei não se aplica a ele. O único modo de desobedecer a lei é estar dirigindo um fusca (premissa verdadeira) e não estiver usando gravata vermelha (conclusão falsa). Esse é o comportamento da implicação, ela só é falsa se a premissa for verdadeira e o consequente falso.

Exemplos 1.17

- “Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar.” é uma implicação verdadeira, pois a hipótese e a tese da implicação são verdadeiras.
- “Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar.” é uma implicação falsa, pois a hipótese é verdadeira e a tese é falsa.
- “Se 2 é um número ímpar, então 3 é um número par.” é uma implicação verdadeira, pois a premissa é falsa.

- “Se a mãe de Pedro é um trator então Pedro é uma moto-serra.” é uma implicação verdadeira, pois a premissa é falsa (implicitamente estamos assumindo que Pedro é humano, e que humanos não são tratores).

Teorema 1.18 ***Negação da implicação***
A negação da implicação p implica q é a proposição p e não q

Exemplos 1.19

- A negação de “Se a é par, então a^2 é par” é “a é par e a^2 é ímpar”.

- A negação de “Se $f(x)$ é uma função derivável então ela é uma função contínua” é ”$f(x)$ é uma função derivável e não-contínua“

Dada uma proposição $p \Rightarrow q$ então:

- a proposição $q \Rightarrow p$ é chamada de **recíproca** da proposição;
- a proposição *não q* $\Rightarrow$ *não p* é chamado de **contrapositiva**;
- a proposição *não p* $\Rightarrow$ *não q* é chamado de **inversa** da proposição.

Destacamos que uma implicação e sua contrapositiva são equivalentes, ou seja, ou ambas são simultaneamente verdadeiras ou ambas são simultaneamente falsas. Como veremos posteriormente (na seção 1.2.2), essa equivalência nos fornece uma técnica de demonstração: no lugar de demonstrarmos uma implicação podemos demonstrar sua contrapositiva.

Também observamos que a contrapositiva da recíproca é a inversa (veja exercício 1.12), e assim pelas razões apresentadas no parágrafo anterior a recíproca e a inversa são equivalentes .

Ressaltamos que um erro lógico muito comum é confundir uma proposição com a sua recíproca. O próximo exemplo ilustra que uma implicação verdadeira pode ter a recíproca falsa.

Exemplos 1.20 Considere a seguinte proposição "se x é um número racional então x^2 é um número racional". Essa implicação é verdadeira, como veremos no exercício 1.21.c.

- a proposição "se x^2 é um número racional então x é um número racional" é a recíproca dessa proposição. Essa recíproca é falsa pois $\sqrt{2}$ não é um número racional, mas o seu quadrado, o número 2, é racional

- a proposição "se x^2 não é um número racional, então x não é um número racional” é a contrapositiva da proposição inicial, e assim verdadeira.

- a proposição “se x não é um número racional então x^2 não é um número racional” é a inversa dessa proposição. Sendo equivalente a recíproca, essa afirmação é falsa.

As seguintes denominações, derivadas da noção de implicação, são usuais:

Definição 1.21 *Uma proposição p é dita* ***condição suficiente*** *para uma proposição q, se p implica q. Uma proposição p é uma* ***condição necessária*** *para uma proposição q, se q implica p.*

Exemplos 1.22

1. Para um número natural, ser par é uma condição necessária para ser divisível por 4, pois todo número divisível por 4 é par. Por outro lado, ser par não é condição suficiente para ser divisível por 4, pois existem pares que não são divisíveis por 4.

2. Para um número real, ser maior que 2 é uma condição suficiente para ser maior que 1, mas não necessária.

3. Ter nascido em Minas Gerais é condição suficiente para ser brasileiro, mas claramente não necessária.

4. Para um número real, ser distinto de 0 é condição necessária e suficiente para possuir um inverso.

Finalmente, o conectivo $p \Leftrightarrow q$ é chamado de **bicondicional** ou **bi-implicação**. A expressão $p \Leftrightarrow q$ é lida como "p se e somente se q". A expressão é equivalente a $(p \Rightarrow q)\, e (q \Rightarrow p)$.

Nesse caso dizemos ainda que p é uma condição necessária e suficiente para q.

Exercícios

Ex. 1.9 — Ache a contrapositiva, a recíproca e a inversa das seguintes frases:

a) *não* $p \Rightarrow q$.

b) *não* $p \Rightarrow$ *não* q.

c) $p \Rightarrow$ *não* q.

d) Se chove então eu não vou trabalhar.

e) Se x é par, então $2x + 1$ é ímpar.

f) Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

g) Se $2^k + 1$ é primo, então k é uma potência de 2.

h) Se $x^2 + y^2 = 0$ então x e y são iguais a 0.

Ex. 1.10 — Atribua um valor verdade as seguintes proposições:

a) Se 2 é um número par, então 3 é um número ímpar.

b) Se 2 é um número par, então 4 é um número ímpar.

c) Se 3 não é par, então 3 não é ímpar.

d) Se 3 não é par nem primo, então 5 não é ímpar.

e) Se minha mãe é um trator então eu sou uma moto-serra.

Ex. 1.11 — Para os pares de proposições p e q diga se p é condição necessária, suficiente ou ambas para q. Em todos os exemplos considere n como sendo um número natural.

a) p= "n é maior que 2" q ="n é maior que 3".

b) p="x é maior que 2" q ="x é maior igual a 2".

c) p="n é maior que 0 e n é menor que 2" q ="n é menor que 2".

d) p="n é maior que 0 e n é menor que 2" q ="$n = 1$".

e) p="Δ é um triângulo isósceles" q ="Δ é um triângulo equilátero".

f) p="M é uma matriz com determinante diferente de 0" q ="M é uma matriz invertível".

Ex. 1.12 — Determine:

a) A contrapositiva da contrapositiva de p *implica* q.

b) A contrapositiva da recíproca de p *implica* q.

c) A contrapositiva da inversa de p *implica* q

d) A contrapositiva de p *implica não* q

e) A recíproca de p *implica não* q

Ex. 1.13 — Negue a proposição $p \Leftrightarrow q$

1.1.4 Múltiplos Quantificadores

Diversas proposições matemáticas envolvem mais que um quantificador. Ao lidarmos com proposições com mais de um quantificador devemos tomar alguns cuidados extras, que exporemos nessa seção. Comecemos com alguns exemplos de proposições matemáticas com múltiplos quantificadores.

Exemplos 1.23

- Para todo número inteiro par n, existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \text{ com } n \text{ par}, \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, n = 2k$$

- Para todo número real x, e para todo número real y, $x + y = y+x$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$$

- Para todo número real $x \neq 0$, existe um número real x' tal que $x \cdot x' = 1$. Essa proposição pode ser escrita simbolicamente como:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{com } x \neq 0, \exists x' \in \mathbb{R} \,|\, x \cdot x' = 1$$

Um fato a ser observado, é que quando temos dois quantificadores diferentes (um universal e um existencial), a ordem dos quantificadores é importante. Assim por exemplo a proposição

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,|\, y = x^2$$

que pode ser reescrita como "para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2$" afirma que para todo número real existe o quadrado desse número, e assim essa é uma proposição verdadeira. Porém se trocarmos a ordem dos quantificadores temos a proposição:

$$\exists y \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, y = x^2$$

que pode ser reescrita como existe um número real y tal que para todo número real x, $y = x^2$, ou seja essa proposição afirma que existe um número real que é o quadrado de qualquer número real[1]. E desta forma essa proposição é falsa.

Para quantificadores do mesmo tipo (dois existenciais, dois universais, etc.) a ordem dos quantificadores não importa, ou seja, a proposição $\exists x \in S \mid \exists y \in T\, p(x, y)$ é equivalente a proposição $\exists y \in T \mid \exists x \in S\, p(x, y)$, e a proposição $\forall x \in S, \forall y \in T, p(x, y)$ é equivalente a proposição $\forall y \in T, \forall x \in S, p(x, y)$.

A negação de proposições com mais de um quantificador pode

[1] i.e, o mesmo número real deveria ser o quadrado de todos os números reais

ser feita utilizando cuidadosamente as regras de negação para quantificadores. Assim por exemplo:

Exemplo 1.24 Usando a negação do quantificador universal, temos que a negação da proposição

$$\forall y \in T, \exists x \in S \mid p(x, y) \qquad \text{é :}$$

$$\exists y \in T \mid não(\exists x \in S \mid p(x, y))$$

Usando a negação do quantificador existencial temos:

$$\exists y \in T \mid \forall x \in S, não\ p(x, y)).$$

$\square$

Quando tivemos uma proposição com múltiplos quantificadores, um exemplo será um elemento do domínio de discurso do quantificador mais externo que satisfaz a proposição obtida removendo a quantificação mais externa. Assim por exemplo, dado a proposição

$$\forall x \in T, \forall y \in S, p(x, y)$$

um exemplo é um elemento de T que satisfaz a proposição $\forall y \in S\, p(x, y)$, obtida da anterior removendo a quantificação mais externa. De modo análogo podemos definir contraexemplos para proposições com múltiplos quantificadores.

Exemplos 1.25

- Um exemplo para a proposição $P =$“Para todo número real x, existe y tal que $x + y = 0$” é um número real x que satisfaz a proposição $Q(x) =$“existe y tal que $x + y = 0$”. Assim 2 é exemplo pois: $Q(2) =$“existe y tal que $2 + y = 0$” é uma proposição verdadeira. A verdade da última proposição pode ser demonstrada através de um exemplo para $Q(2)$, o número real $y = 2$.

  De modo mais geral, qualquer número real é exemplo para a afirmação $P =$“Para todo número real x, existe y tal que

$x + y = 0$" pois a frase obtida pela remoção do quantificador mais externo: $Q(x)$ ="existe y tal que $x + y = 0$" é verdadeira, pois $y = x$ é um exemplo para $Q(x)$

- Por outro lado um exemplo para proposição P ="Existe x tal que para todo y tal que $x + y = 0$" seria um número real x que satisfaz a proposição $Q(x)$ ="para todo y tal que $x + y = 0$". Claramente não existe um número real que satisfaz essa proposição. Assim todos os números reais são contraexemplos para essa afirmação

Exercícios

Ex. 1.14 — Transcreva as seguintes proposições para a forma simbólica:

a) Para todo número inteiro ímpar n, existe um número inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

b) Para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

c) Para todo número real x existe y tal que $x + y = 0$.

d) Para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_0$, $|a_n - L| \leq \epsilon$

e) Para todo $x \in A$ e para todo número real $\epsilon > 0$ existe um número real $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$

Ex. 1.15 — Seja a proposição $p(x, y) =$“$x + 4 > y$” com $x, y \in D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para as seguintes proposições, reescreva-as em português e atribua um valor verdade

a) $\forall x \in D, \exists y \in D \,|\, p(x, y)$

b) $\exists y \in D \,|\, \forall x \in D, p(x, y)$

c) $\forall x \in D, \forall y \in D, p(x, y)$

d) $\exists x \in D, \exists y \in D \,|\, p(x, y)$

Ex. 1.16 — O que as seguintes afirmações significam? Elas são universais ou particulares? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contraexemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

a) $\forall x, \exists y \,|\, (x < y)$

b) $\exists y \,|\, \forall x, (x < y)$

c) $\exists x \,|\, \forall y, (x < y)$

d) $\forall y, \exists x \,|\, (x < y)$

e) $\exists x \,|\, \exists y \,|\, (x < y)$

f) $\forall x, \forall y, (x < y)$

Ex. 1.17 — Reescreva as seguintes definições matemáticas simbolicamente:

a) Comutatividade: A soma de x com y é igual a soma de y com x.
b) Não-comutatividade: Existem x e y tal que a soma de x com y é diferente da soma de y com x.
c) Identidade: Existe um elemento e tal que a soma de x com e é x.
d) Transitividade: Se x é menor igual que y e y é menor igual que z então x é menor igual que z.
e) Reflexividade: Para todo x, x é menor igual a x

Ex. 1.18 — O que as seguintes afirmações significam? Elas são verdadeiras? Dê exemplos e contraexemplos quando possível. O universo de discurso em todos os casos é os números naturais.

a) $\forall x, \exists y \,|\, (2x - y = 0)$

b) $\exists y \,|\, \forall x, (2x - y = 0)$

c) $\exists y \,|\, \exists z \,|\, (y + z = 100)$

Ex. 1.19 — Para as seguintes proposições, escreva a negação, em português e simbólica, de cada uma delas.

a) Para todo número real x, para todo número real y, $x + y = 0$.

b) Para todo número real x, existe um número real y tal que $x + y = 0$.

c) Para todo $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N_0$, $|a_n - L| \leq \epsilon$

d) Para todo ϵ, existe $\delta(\epsilon)$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - f(l))| < \varepsilon$.

Ex. 1.20 — Exemplos e ou Contraexemplos

a) Para todos números naturais pares m, n, temos que $n + m$ é par.

1.2 Demonstrações

1.2.1 Por que Demonstrar?

"A lógica é a higiene que o matemático pratica para manter as suas ideias saudáveis e fortes. "
Hermann Weyl

Nas seções anteriores apresentamos alguns elementos da linguagem e da lógica que sustentam a matemática. Já nesta seção apresentaremos algumas ideias sobre demonstrações matemáticas. Começaremos com uma breve discussão sobre o papel das demonstrações no conhecimento matemático.

A importância do conhecimento matemático para as ciências é inegável. Grandes teorias científicas, como a mecânica newtoniana, o eletromagnetismo, a relatividade geral e quântica são expressas elegantemente em termos matemáticos, e mais, graças a uma relação intrincada entre o conhecimento natural entre esses campos de saber e uma matemática sofisticada, essas teorias são capazes de um poder de expressividade, de descrição e de precisão invejáveis. São essas teorias científicas, e assim também a matemática envolvida nessas descrições, que sustentam os avanços tecnológicos de nossa sociedade. Como enfaticamente expresso pelo físico Galileo Galilei:

> "A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto"

Galileo Galilei, O Ensaiador

Se por um lado essa visão utilitarista da matemática como ferramenta, seria suficiente para justificar a importância do estudo da matemática, essa visão é insuficiente para levar à compreensão profunda da matemática em si. A matemática, como área do conhecimento, tem um propósito muito mais amplo que ser a língua da ciência.

A matemática tem objetivos e métodos próprios. E talvez o método seja uma das marcas que distinguem fundamentalmente a matemática das outras áreas do conhecimento. Nessa linha podemos dizer que a matemática, pelo menos nos últimos 23 séculos, se caracteriza pelo **método axiomático**, que simplificadamente pode ser descrito como tomar alguns fatos como verdadeiros (as hipóteses, os axiomas) e demonstrar todo o restante a partir desses fatos, utilizando as regras da lógica.

Vale ressaltar que, claramente, a matemática se estende muito além do pensamento racional-dedutivo e a intuição e a percepção inconsciente são chaves para a criatividade matemática, e a sede de descobrir novas verdades, de expandir o conhecimento é a motivação do esforço matemático. Porém , embora estes sejam realmente elementos essenciais na exploração contínua e no desenvolvimento da matemática, o **raciocínio lógico** é imprescindível para a determinação da verdade matemática.

Assim a questão natural é: porque as demonstrações são importantes? Porque a supremacia do raciocínio lógico e da dedução?

O principal motivo é que nossa intuição falha. E na história da matemática, diversos exemplos demonstraram e convenceram os matemáticos que só a intuição é insuficiente para compreender os fatos matemáticos.

Para ilustrar esse ponto, um exemplo típico da falibilidade da nossa intuição é o fato que para equações polinomiais de grau maior igual que 5 não existem fórmulas fechadas ao estilo da fórmula de Bhaskara que expressam as soluções desses polinômios. Dito de outra forma, as soluções de um polinômio de grau maior que 5 em geral não podem ser expressas como um número finito de somas, produtos, quocientes e raízes dos coeficientes do polinômio. Desde que as expressões descobertas por Bhaskara Akaria (1114-1185), Girolamo Cardano (1501-1576) e Niccolò Tartaglia (1499-1557), mostraram como representar as soluções de um polinômio de grau até 4 através de operações aritméticas e radicais dos coeficientes, o desconhecimento das expressões para graus maiores foi atribuído a uma falta de técnica que seria superada e gerações de matemáticos se dedicaram a encontrar expressões para as soluções de polinômios de graus maiores. Porém, contrariando a intuição inicial, em 1824, Niels Henrik Abel provou que tal fórmula não poderia existir e mostrou que as tentativas tinham sido em vão.

Prosseguindo nessa linha, outro exemplo da necessidade de rigor, cuidado conceitual e do valor das demonstrações é a noção de limites (e a noção de infinito) que trataremos no capítulo **??**. A manipulação descuidada desses objetos levou a uma quantidade gigantesca de erros e falhas conceituais em toda a matemática, que só foram resolvidas com definições precisas e demonstrações rigorosas.

Ainda sobre a limitação da intuição como crivo fundamental para a verdade matemática, destacamos que conforme o conhecimento matemático se expandiu, expandiu-se também a generalidade e a abstração desse conhecimento, que assim se afastou cada vez mais do restrito número de ideias sobre as quais temos alguma intuição naturalmente.

Outro ponto para justificar a necessidade das demonstrações, é que em geral as afirmações matemáticas versam sobre uma infinidade de objetos, como a afirmação "Existem infinitos primos". Por mais que verifiquemos através de computações que existam $10^{10^{10}}$ primos, não terminaremos com a inquietação e nem teremos razões sólidas para acreditarmos nesse fato. Novamente, a matemática está repleta de exemplos de afirmações que valem para um grande número de casos iniciais, mas que mesmo assim admitem contraexemplos.

1.2.2 Métodos de Demonstração

Rigor é para o matemático o
que a moral é para os homens.
André Weyl

Vamos ilustrar algumas técnicas de demonstração utilizando alguns resultados de números naturais. Para isso recordamos algumas definições que utilizaremos:

- Um número inteiro não nulo a **divide** um número inteiro b se existe um inteiro k, tal que: $b = ak$. Se a divide b, b é dito múltiplo de a ou de modo equivalente a é dito divisor de b.

- Um número inteiro a é dito par se 2 divide a, ou seja, se existe número inteiro k tal que $a = 2k$.

- Um número inteiro b é dito **ímpar** se 2 não divide b, nesse caso pode-se provar que existe um número inteiro k tal que

$b = 2k + 1$.

- Um número real r é dito **racional** se existirem números inteiros p, q, com $q \neq 0$, tal que $r = \frac{p}{q}$.
- Um número real r é dito **irracional** se não for racional, i.e, se não existirem inteiros p, q, com $q \neq 0$, tal que $r = \frac{p}{q}$.

Demonstração Direta

A demonstração direta é a forma mais simples de demonstração que nós tratamos nesta seção, e é a mais óbvia: para demonstrar que $p \Rightarrow q$ suponha que p é verdadeiro, e através de uma série de etapas, cada uma seguinte das anteriores, conclui-se q.

Exemplo 1.26 Se n, m são números pares então $n + m$ também é um número par. $\square$

Um bom modo de iniciar uma demonstração é identificando as hipóteses e a tese e esclarecendo os seus significados, e o significado dos termos envolvidos:

Hipótese 1: n é par. Por definição de número par, temos que existe um inteiro k_1 tal que $n = 2k_1$.

Hipótese 2: m é par. De modo análogo, temos pela definição de número par que existe (possivelmente outro) inteiro k_2 tal que $m = 2k_2$.

Tese: Queremos provar que $n+m$ é par, ou seja, que existe um inteiro k_3 tal que $n + m = 2k_3$.

Feito isso vamos a demonstração:

Demonstração: Como n, m são pares existem inteiros k_1, k_2 tais que $n = 2k_1$ e $m = 2k_2$. Desta forma temos que $n+m = 2k_1+2k_2$, e colocando em evidência o 2 teremos:

$$p + q = 2(k_1 + k_2) = 2k_3$$

onde $k_3 = k_1 + k_2$ é um número inteiro. E assim $n + m$ é um número par.

□

Exemplo 1.27 Se a divide b e b divide c, então a divide c. □

Novamente começaremos identificando as hipóteses e a tese e esclarecendo os seus significados:

Hipótese 1: a divide b. Isso significa que existe um número inteiro k_1 tal que $b = ak_1$.

Hipótese 2: b divide c. Isso significa que existe um número inteiro k_2 tal que $c = bk_2$.

Tese: Queremos provar que a divide c, ou seja, queremos mostrar que existe um número inteiro k_3 tal que $c = ak_3$

Demonstração: Pelas hipóteses temos que existem inteiros k_1, k_2 tais que $b = a.k_1$ e $c = b.k_2$.

Substituindo a primeira expressão na segunda teremos:

$$c = bk_2 = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2) = ak_3$$

onde $k_3 = k_1k_2$ é um número inteiro. O que prova que a divide c.

$\square$

Exemplo 1.28 Se n é um número ímpar então n^2 é um número ímpar. $\square$

Hipótese: n é um número ímpar, i.e, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k_1 + 1$

Tese: n^2 é um número ímpar, i.e, $\exists k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 = 2k_2 + 1$

Demonstração: Como n é um número ímpar, existe um inteiro k_1 tal que $n = 2k_1 + 1$ e assim:

$$n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1 \Rightarrow n^2 = 2(2k_1^2 + 2k_1) + 1$$

Como $2k_1^2 + 2k_1$ é um número inteiro, temos pela definição que n^2 é ímpar. $\square$

Exercícios

Ex. 1.21 — Demonstre as seguintes afirmações:

a) Se a divide b e a divide c então a divide $b + c$.

b) Se p, q são números racionais, então $p + q$ é um número racional.

c) Se p, q são números racionais, então $p \cdot q$ é um número racional.

* d) Se r_1 e r_2 são raízes distintas de $p(x) = x^2 + bx + c$, então $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.

Demonstração por Redução ao Absurdo

Uma demonstração por redução ao absurdo (também conhecida como demonstração por contradição ou ainda por reductio ad absurdum) é uma técnica de demonstração no qual se demonstra que se algum enunciado fosse verdadeiro, ocorreria uma contradição lógica, e portanto o enunciado deve ser falso.

Exemplo 1.29 Existem infinitos números primos. □

Demonstração: Vamos demonstrar essa proposição por redução ao absurdo. Desta forma suponha que existem finitos números primos, que denotaremos por $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considere então o número $q = p_1 p_2 ... p_n + 1$. O número q não é divisível por nenhum dos números $p_1, p_2, ..., p_n$ (o resto da divisão de q pelo primo p_i é sempre 1). Logo, q é um número primo distinto de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Isto contradiz a nossa hipótese inicial de que existem apenas n números primos. Absurdo. Logo existem infinitos números primos $\square$

Exemplo 1.30 $\sqrt{2}$ é irracional. $\square$

Demonstração: Faremos a demonstração pelo método de redução ao absurdo. Ou seja, supomos que $\sqrt{2}$ é um número racional, i.e., que existem números inteiros positivos a e b tais que:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

ou, equivalentemente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

Podemos supor que a e b não são ambos números pares, pois se fossem, poderíamos simplificar a fração até termos que pelo menos um dos termos da fração seja ímpar.

Agora, escrevemos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

Então:

$$a^2 = 2b^2 \tag{1.1}$$

Concluímos então que a^2 é um número par, pois é dobro de b^2. Logo a também deve ser par, pois se a fosse ímpar o o seu quadrado também seria ímpar.

Temos então que a é um número par e, portanto, é o dobro de algum número inteiro, digamos k:

$$a = 2k \tag{1.2}$$

Substituindo 1.2 em 1.1 temos:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow 2l^2 = b^2 \tag{1.3}$$

De modo análogo, temos que b deve ser um número par. O que é absurdo pois a e b não são ambos números pares. Portanto, $\sqrt{2}$ tem que ser um número irracional. Como queríamos demonstrar.

$\square$

Exemplo 1.31 Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 1$. $\square$

Demonstração: Vamos realizar a demonstração por redução ao absurdo. Desta forma, vamos supor que existe uma solução (a, b) com a e b inteiros positivos, satisfazendo $a^2 - b^2 = 1$. Então fatorando temos:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 1.$$

Como $a + b$ e $a - b$ são inteiros cujo produto é 1, temos que ou $a + b = a - b = 1$ ou $a + b = a - b = -1$. No primeiro caso, podemos adicionar as duas equações para obter $a = 1$ e $b = 0$, contradizendo o nosso pressuposto inicial de que a e b são positivos. No segundo caso de modo semelhante, obtemos que $a = -1$ e $b = 0$, novamente contrariando a nossa hipótese. Logo por redução ao absurdo, temos que não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 1$. $\square$

Exercícios

Ex. 1.22 — Use o método de redução ao absurdo para provar cada um das seguintes proposições.

a) $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

b) Não existem soluções inteiras positivas para a equação $x^2 - y^2 = 10$.

c) Não existem soluções racionais para a equação $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$.

d) Dados a, b, c números inteiros. Mostre que se a não divide bc, então a não divide b.

Demonstração por Contraposição

O método de demonstração por contraposição baseia-se no fato que uma implicação *p implica q* é equivalente a sua contrapositiva *não q implica não p*. Assim, no método de demonstração por contraposição ao invés de se demonstrar a implicação *p implica q*, demonstra-se que *não q implica não p*. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.32 Se n e m são números inteiros para os quais $n+m$ é par, então n e m tem a mesma paridade. □

Vamos provar essa proposição usando o método de demonstração por contraposição. Observe que a versão contrapositiva deste teorema é: "Se n e m são dois números inteiros com paridades opostas, então sua soma $n + m$ deve ser ímpar".

Para a versão contrapositiva temos:

- **Hipótese:** “n e m são dois números inteiros com paridades opostas”,

- **Tese** “soma $n + m$ deve ser ímpar”

Demonstração: Faremos a demonstração por contraposição. Desta forma supomos que n e m tem paridades opostas, ou seja, um deles é par e o outro ímpar, e assim não há perda de generalidade em supor que n é par e m é ímpar. Logo, existem inteiros k_1 e k_1 tais que $n = 2k_1$ e $m = 2k_2 + 1$. Calculando a soma

$$n + m = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$$

e observando que $k_1 + k_2$ é um número inteiro, temos que $n + m$ é um inteiro ímpar, por definição. □

Qual a diferença entre uma demonstração por contraposição de uma demonstração por redução ao absurdo?

Vamos analisar como os dois métodos de trabalho ao tentar provar "Se p, então q".

- Método de redução ao absurdo: assuma p e *não* q e então devemos provar que estas duas hipóteses levam a algum tipo de contradição lógica.
- Método de contraposição: assuma *não* q e então devemos provar *não* p.

O método de contraposição tem a vantagem de que seu objetivo é claro, temos que demonstrar *não* p. Por outro lado, no método da contradição, o objetivo é demonstrar uma contradição lógica, porém nem sempre é claro qual é a contradição que vamos encontrar.

Exemplo 1.33 Se n^2 é ímpar, então n é ímpar □

Demonstração: Nesse caso a contrapositiva é: "se n é par então n^2 é par"

Assim por contraposição. Suponha então que n é par, logo existe um número inteiro k tal que $n = 2k$, e assim:

$$n2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Como $2k^2$ é um inteiro, n^2 é par. □

Exercícios

Ex. 1.23 — Prove cada uma das seguintes proposições pelo método de contraposição.

a) Se x e y são dois números inteiros cujo produto é par, então pelo menos um dos dois deve ser par.

b) Se x e y são dois números inteiros cujo produto é ímpar, então ambos têm de ser ímpares.

c) Se a e b são números reais tais que o produto ab é um número irracional, então ou a ou b deve ser um número irracional.

Ex. 1.24 — Mostre que o produto de um número racional não nulo com um número irracional é um número irracional.

Ex. 1.25 — Mostre que se a e b são números racionais, então $a + b$ é um número racional.

Ex. 1.26 — Mostre que um número inteiro de 4 dígitos é divisível por 3 se a soma dos seus dígitos for divisível por 3.

Demonstrações de “se e somente se”

Muitos teoremas na matemática são apresentados sob a forma "p se, e somente se, q". Essa afirmação é equivalente a "se p, então q *e* se q, então p". Logo, para demonstrar uma afirmação da forma "p se, e somente se, q", devemos demonstrar duas implicações separadamente.

Exemplo 1.34 Dois inteiros a e b, possuem paridades diferentes

se, e somente se, $a + b$ é um número ímpar $\square$

Demonstração: Temos que provar duas implicações:

- Se a e b possuem paridades diferentes então $a+b$ é um ímpar;
- Se $a + b$ é ímpar então a e b possuem paridades diferentes.

Vamos provar a implicação: se a e b possuem paridades diferentes então $a + b$ é ímpar.

Sem perda de generalidade como por hipótese a e b possuem paridades diferentes, podemos assumir que a é par e que b é ímpar. Desta forma existem inteiros k_1, k_2 tais que $a = 2k_1$ e $b = 2k_2 + 1$, e assim:

$$a + b = 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2) + 1$$

e assim $a + b$ é ímpar.

Agora, demonstraremos a implicação: se $a + b$ é ímpar então a e b possuem paridades diferentes. Na verdade provaremos a contrapositiva dessa afirmação: se a e b possuem paridades iguais então $a + b$ é par.

Temos dois casos a considerar ambos a e b pares e ambos a e b ímpares.

Se a e b são ambos pares então existem k_1, k_2 tal que $a = 2k_1$ e $b = 2k_2$ e desta forma

$$a + b = 2(k_1 + k2)$$

e assim $a + b$ é par.

Se a e b são ambos ímpares então existem k_1, k_2 tal que $a = 2k_1 + 1$ e $b = 2k_2 + 1$ e desta forma

$$a + b = 2k_1 + 1 + 2k2 + 1 = 2(k_1 + k2 + 1)$$

e assim $a + b$ é par.

$\square$

Exercícios

Ex. 1.27 — Dado dois inteiros a e b, o produto ab é um número par, se e somente se, pelo menos um dos números inteiros, a ou b, for par.

Ex. 1.28 — Dados a, b, c inteiros com $c \neq 0$. Mostre que a divide b se e somente se ac divide bc.

2 Generalidades sobre Conjuntos

2.1 Conceitos básicos

Definição ingênua de conjunto

Um **conjunto** é uma qualquer coleção de objetos, concretos ou abstratos. Dado um conjunto, isto é, uma coleção de objetos, diz-se que cada um destes objetos **pertence** ao conjunto dado ou, equivalentemente, que é um **elemento** desse conjunto.

Exemplos 2.1

- o conjunto das disciplinas de um curso;
- o conjunto das letras desta frase;
- o conjunto dos jogadores de um time de futebol;

- o conjunto dos times de futebol de um estado;
- o conjunto dos conjuntos dos times de futebol de um estado;
- o conjunto das ideias que Leonardo da Vinci nunca teve;
- o conjunto dos números naturais.

Notações. Para denotar um conjunto genérico, usam-se normalmente letras maiúsculas $A, B, C, \ldots Z$, enquanto para seus elementos usam-se letras minúsculas $a, b, c, \ldots z$ (atenção: essa é somente uma notação *comum*, não uma *regra*, até mesmo porque um conjunto pode ser, por sua vez, um elemento de outro conjunto, caso em que a notação não poderia ser respeitada). A relação de pertinência é denotada pelo símbolo $\in$. Já o símbolo $\notin$ é usado para denotar a não-pertinência (quando isso fizer sentido).

Exemplos 2.2

- $a \in A$ denota o fato de que o objeto a pertence ao conjunto A;

- $x \notin C$ denota o fato de que x não é um elemento do conjunto C.

Formas de descrever um conjunto

O modo matemático de descrever um conjunto lança mão das chaves { }, sendo usadas no formato genérico

$$\{ \text{ descrição dos elementos ou de suas propriedades } \}.$$

Há uma sutil mas importante diferença entre descrever os elementos de um conjunto (o que será chamado de *descrição enumerativa*) ou descrever as propriedades desses elementos (o que será chamado de *descrição predicativa*). Na descrição enumerativa, mais simples (mas nem sempre possível), os elementos são apresentados explicita ou implicitamente, como nos exemplos abaixo:

Exemplos 2.3

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
- {andré, bernardo, caetano}
- { palavras da língua portuguesa }

- { alunos desta turma }
- $\{0, 1, 2, \ldots\}$

Note que, no último exemplo, lança-se mão das reticências para indicar que o elenco dos elementos do conjunto continua indefinidamente, segundo uma regra que fica implicitamente clara observando-se os primeiros elementos apresentados.

Já na descrição predicativa, há a concorrência de duas condições: i) há um "conjunto de referência", ao qual pertencem os elementos do conjunto que se quer descrever (podemos pensá-lo com o domínio do discurso); ii) há uma propriedade que é satisfeita por todos os elementos do conjunto que se quer descrever, e somente por eles. O formato geral (em notação matemática) da descrição predicativa é

$$\{x \in \mathbb{U} \,|\, x \text{ satisfaz } P\}$$

onde $\mathbb{U}$ denota o conjunto de referência e P a propriedade que caracteriza os elementos do conjunto que está sendo descrito. A barra vertical "|"é lida como "tal que"(ou "tais que", dependendo da concordância de número) e, em seu lugar, é também comum empregar o símbolo ":". Abaixo, alguns exemplos desse modo predicativo (para esses exemplos, $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais):

Exemplos 2.4

- $\{n \in \mathbb{N} \mid n + 1$ é um múltiplo de $10\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 + 2x - 1 > 0\}$
- { alunos desta turma que usam o trem como meio de transporte }
- { números ímpares que também são primos }

Alguns cuidados com essa noção ingênua dos conjuntos

Ao tratarmos os conjuntos como meras coleções de objetos, estamos livres de tomar qualquer coleção imaginável. O limite para tal, se existir, é a própria criatividade da mente humana. Mas desse modo podem aparecer problemas lógicos irremediáveis, como mostra o paradoxo abaixo.

Paradoxo de Russell. Há conjuntos que são elementos de si mesmos: o conjunto de todos os conjuntos imagináveis é um elemento de si mesmo, pois trata-se evidentemente de um conjunto imaginável (acabamos de imaginá-lo); o conjunto de todas as coisas que não são comestíveis não é comestível, logo é um elemento de si mesmo. Há também os conjuntos que *não* são elementos de si mesmos: o conjunto dos mamíferos não é um mamífero; o conjunto dos alunos desta turma não é um aluno desta turma. Para distinguir uma classe de conjuntos da outra, chamemos de *endológicos* os conjuntos que são elementos de si mesmos e de *exológicos* os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Evidentemente, todo conjunto é elemento de uma classe ou da outra, não podendo pertencer a ambas. Denote então por C o conjunto de todos os conjuntos exológicos. A qual classe pertence o conjunto C? É um conjunto endológico? É exológico?

Uma análise do paradoxo acima pode ser encontrada no Apêndice, mas adiantemos aqui sua conclusão: tal conjunto C não pode existir, a não ser às custas da consistência lógica do nosso sistema. E essa constatação ilustra a necessidade de se desenvolver um conceito de "conjunto"mais elaborado, de modo a evitar paradoxos e inconsistências. Tal elaboração foge totalmente ao escopo deste texto, mas sua necessidade não poderia ter sido omitida. Com esse cuidado em mente, nos será suficiente, para efeito dos nossos objetivos, lançar mão da definição ingênua de conjunto dada no início deste capítulo, uma vez que lidaremos somente com conjuntos "razoáveis".

2.2 Relações elementares

Subconjuntos e superconjuntos

Seja dado um conjunto A. Dizemos que um conjunto B é um **subconjunto** do conjunto A (ou, equivalentemente, que B **está contido** em A) se todo elemento de B é também elemento de A.

Denota-se tal situação por $B \subset A$. Em símbolos,

$$B \subset A$$

se, e somente se,

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

A mesma situação pode ser descrita dizendo que A é um **superconjunto** de B ou, mais comumente, que A **contém** B, denotando-se tal relação por $A \supset B$.

Exemplos 2.5 Para os exemplos que se seguem, denote por P o conjunto dos números naturais pares (note que tal conjunto inclui o zero), por I o conjunto dos números naturais ímpares e seja $S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n+1 \in P\}$ o conjunto dos números naturais que são sucessores de algum número natural par. Denote ainda por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros.

1. $P \subset \mathbb{N}$, uma vez que todo número natural par é, obviamente, um número natural.

2. Todo número natural é um número inteiro, logo $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.

3. Todo número natural ímpar é o sucessor de algum número natural par, logo $I \subset S$.

4. Se um número natural é o sucessor de um número par, então

tal número é necessariamente ímpar, ou seja, $I \supset S$.

Os dois últimos exemplos acima traduzem o simples fato de que os conjuntos S e I coincidem[1]. Temos, de fato, a seguinte

Definição 2.6 *Se dois conjuntos A e B satisfazem as relações $A \subset B$ e $B \subset A$ simultaneamente, então dizemos que tais*

[1]Note, em particular, que o símbolo $\subset$, ou mesmo $\supset$, não exclui a possibilidade da igualdade entre os conjuntos

conjuntos são **iguais**, *isto é, $A = B$. Em símbolos,*

$$A = B$$

se, e somente se,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Vale destacar, portanto, que uma igualdade entre conjuntos é a síntese de duas inclusões. Tal interpretação é útil, particularmente, em demonstrações envolvendo igualdade de conjuntos. Por exemplo, consideremos o conjunto A constituído pelos números naturais cuja metade também é um número natural e comparemos o conjunto A com o conjunto P dos exemplos acima, isto é, o conjunto dos números naturais pares. Poderíamos simplesmente dizer que, evidentemente, tais conjuntos são iguais. Entretanto, desconfiando das evidências (o que é um hábito saudável), vejamos como demonstrar a igualdade $A = P$.

Tendo em mente que tal igualdade traduz as duas afirmações $A \subset P$ e $A \supset P$, precisamos trabalhar com cada uma separadamente. Para provar a primeira, devemos mostrar que todo elemento de A é também elemento de P. Assim, tomemos um elemento $a \in A$. Tal elemento deve possuir, portanto, a propriedade de que $a/2$ é um número natural, isto é

$$\frac{a}{2} = n$$

para um certo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $a = 2n$, ou seja, a é divisível por 2. Concluímos que a é par, isto é, $a \in P$. Provamos, desse modo, que todo elemento de A é também elemento de P, ou seja, $A \subset P$. Para provar a outra inclusão, devemos verificar que todo elemento de P é também elemento de A. Seja então $n \in P$ um elemento qualquer. Como n é par (condição para pertencer ao conjunto P), ele é divisível por 2. Assim, existe algum número natural m tal que

$$n = 2m$$

Dividindo ambos os membros da equação acima por 2, obtemos

$$\frac{n}{2} = m$$

isto é, a metade de n é um número natural. Desse modo, $n \in A$, donde concluímos que $P \subset A$.

Tendo verificado que valem as inclusões $A \subset P$ e $A \supset P$, podemos concluir que vale a igualdade desejada, isto é, $A = P$.

Uma vez que a relação de inclusão do tipo $B \subset A$ inclui a possibilidade que os conjuntos A e B sejam iguais (em outras palavras, a relação $X \subset X$ é sempre válida, para qualquer conjunto X), precisamos de outra notação e nomenclatura para os casos em que queremos evitar tal possibilidade. Nesses casos, falamos em *inclusão própria* (ou *estrita*), denotando por $B \subsetneq A$. Em símbolos,

$$B \subsetneq A \Leftrightarrow B \subset A \text{ e } B \neq A.$$

Assim, quando dizemos que B *está contido propriamente* em A (ou que B é um *subconjunto próprio* de A), estamos afirmando *duas* coisas: i) todo elemento de B é elemento de A; ii) existe ao menos um elemento de A que não pertence a B. Evidentemente, uma observação análoga cabe para a inclusão própria $A \supsetneq B$.

Sobre notações. É comum encontrar um uso diferente para o símbolo $\subset$ (ou $\supset$) na literatura. Em alguns textos ou artigos, de fato, o símbolo $\subset$ (ou $\supset$) é usado com o mesmo significado que demos ao símbolo $\subsetneq$ (respectivamente, $\supsetneq$). Nesse caso, para indicar a inclusão genérica (i.e. não própria), tais textos usam o símbolo $\subseteq$ (respectivamente $\supseteq$). Assim, ao se consultar outras referências bibliográficas, é salutar verificar qual o significado ali adotado para os símbolos de inclusão.

Conjunto vazio. Assumimos a existência de um conjunto que não possui nenhum elemento. Tal conjunto é chamado de **conjunto vazio** e denotado por $\varnothing$. Dado qualquer conjunto A, vale sempre a relação de inclusão

$$\varnothing \subset A.$$

A afirmação acima equivale à proposição $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. Como vimos no capítulo anterior, uma implicação é falsa somente quando sua premissa é verdadeira e sua conclusão falsa. Em particular, vimos o *argumento de vacuidade*: uma implicação cuja premissa é falsa é sempre uma implicação verdadeira, independentemente do valor verdade de sua conclusão. É esse exatamente o caso acima: a premissa $x \in \emptyset$ é falsa, enquanto que a conclusão $x \in A$ tem valor de verdade indeterminado.

Outro modo de justificar a mesma implicação é através de sua contra-positiva: $x \notin A \Rightarrow x \notin \emptyset$. Nesse caso, a premissa pode ser verdadeira ou falsa, sendo impossível determinar o valor verdade *a priori* (afinal, sequer sabemos qual conjunto é A). Entretanto, a conclusão $x \notin \emptyset$ é evidentemente verdadeira. Assim, a implicação é verdadeira, qualquer que seja o valor verdade da premissa.

Exercícios

Ex. 2.1 — Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

b) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

c) $\varnothing = \{\varnothing\}$

Conjunto potência. Seja dado um conjunto A. O conjunto de todos os subconjuntos de A é chamado de **conjunto potência** de A (ou também **conjunto das partes** de A) e é denotado por $frm{-}eA$. Note que, qualquer que seja o conjunto A, o conjunto potência $frm{-}eA$ sempre contém, pelo menos, os elementos $\emptyset$ e A.

Exemplos 2.7. Sejam dados os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Então:

- $frm{-}eA = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

- $frm{-}eB = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

É importante destacar um erro comum quando se fala em conjunto das partes. Tomemos o conjunto A do exemplo acima. É *falso* afirmar que $1 \in frm{-}eA$ (ou pior, que $1 \subset A$). O correto é $\{1\} \in frm{-}eA$ (o que equivale a dizer que $\{1\} \subset A$). Em suma, vale a relação

$$X \in frm{-}eA \Leftrightarrow X \subset A.$$

A melhor maneira de evitar erros como o ilustrado acima é ter sempre em mente o *significado* das relações de pertinência e de inclusão. A primeira é uma relação entre *elemento* e *conjunto*, enquanto a segunda é uma relação entre *conjunto* e *conjunto*. Assim, os elementos de $frm{-}eA$ são subconjuntos de A. Já os elementos de A, estes não são, em geral, elementos de $frm{-}eA$.

Exercícios

Ex. 2.2 — Na última observação, dissemos que os elementos de um conjunto A não são, *em geral*, elementos de $frm{-}eA$. Dê um exemplo de conjunto A tal que $A \cap frm{-}eA \neq \emptyset$.

Ex. 2.3 — Se A é um conjunto com n elementos, quantos elementos possui o conjunto potência $frm{-}eA$? (Veremos, mais adiante, duas soluções para este exercício: uma no contexto do

Princípio de Indução, outra no contexto de Combinatória).

2.3 Operações

União e intersecção

Definição 2.8 . *Dados dois conjuntos* A *e* B*, o* ***conjunto união*** $A \cup B$ *é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a*

A ou a B, isto é

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B.$$

Definição 2.9 *O* ***conjunto intersecção*** $A \cap B$ *é formado pelos elementos que pertencem simultaneamente a A e B, isto é*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B.$$

Exemplos 2.10. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ e $C = \{4, 5, 6\}$, tem-se:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

- $A \cap B = \{1, 3\}$
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap C = \varnothing$
- $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
- $B \cap C = \{5\}$

Quando dois conjuntos A e B não têm nenhum elemento em comum, i.e. quando $A \cap B = \varnothing$, dizemos que estes conjuntos são

disjuntos. A união de dois conjuntos disjuntos é também chamada de **união disjunta** e pode ser denotada pelo símbolo $\mathring{\cup}$ [2].

Propriedade 2.11 *Sejam dados dois conjuntos A e B. Das definições acima, seguem imediatamente as seguintes propriedades:*

1. $A \cup A = A = A \cap A$

[2]A rigor, pode-se falar em união disjunta de conjuntos quaisquer, mesmo não disjuntos. Nesse caso, os eventuais elementos da intersecção dos conjuntos passam a ser considerados distintos, o que se obtém indexando os elementos de cada conjunto.

2. $A \cup \varnothing = A$ *e* $A \cap \varnothing = \varnothing$

3. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$

4. $A \cap B \subset B \subset A \cup B$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

A título de exemplo, vamos provar a terceira e a quinta dessas propriedades. Iniciemos com a terceira:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B$$

Na verdade, trata-se de duas inclusões de conjuntos:

$$A \cap B \subset A \qquad \text{e} \qquad A \subset A \cup B.$$

Vejamos uma de cada vez. Para provar a primeira, precisamos verificar a implicação: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$. Se for $A \cap B = \varnothing$, então a implicação acima é verdadeira por vacuidade (não custa lembrar que isso equivale ao fato, já conhecido, de que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto). Suponhamos então que $A \cap B \neq \varnothing$. Nesse caso, se x pertence à intersecção de A e B, então x pertence tanto ao conjunto A quanto ao conjunto B. Em particular, o que nos interessa nesse caso é que x

pertence ao conjunto A. Isso é exatamente o que afirma a implicação acima, logo é verdadeira a inclusão $A \cap B \subset A$.
Com relação à segunda inclusão, i.e. $A \subset A \cup B$, a ideia é similar. Precisamos provar a implicação: $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$. Novamente, se $A = \emptyset$, a implicação é válida (por vacuidade). Já no caso $A \neq \emptyset$, tomemos $x \in A$. Para que x seja um elemento da união $A \cup B$, deve satisfazer a ao menos uma das condições: $x \in A$ ou $x \in B$. Mas a primeira condição é garantida pela hipótese acima. Logo, x também é elemento da união $\square$.

Provemos agora a quinta propriedade: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap$

$(A \cup C)$. Nesse caso, temos uma igualdade de conjuntos. Convém, portanto, tratá-la como duas inclusões:

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

Iniciando pela primeira inclusão, devemos provar a implicação

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Se $A \cup (B \cap C) = \varnothing$, a implicação é verdadeira por vacuidade. Caso contrário, seja $x \in A \cup (B \cap C)$. Antes de prosseguir, tenha-mos em mente que queremos provar que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, i.e.

$$x \in A \cup B \qquad \text{e} \qquad x \in A \cup C.$$

Pois bem, segundo a premissa, temos que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Há, portanto, dois casos a serem analisados. Se $x \in A$, então $x \in A \cup B$, assim como $x \in A \cup C$ (estamos usando, na verdade, a terceira propriedade, que acabamos de provar). Logo, no caso em que $x \in A$, podemos concluir que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Já no caso em que $x \in B \cap C$, temos que $x \in B$ e $x \in C$. Usando a quarta propriedade acima (cuja prova seria totalmente análoga à da terceira propriedade), vale as implicações:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

e

$$x \in C \Rightarrow x \in A \cup C,$$

ou seja, podemos também nesse caso concluir que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Em suma, provamos a inclusão

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Queremos agora provar a segunda inclusão:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C).$$

O procedimento é semelhante ao anterior, portanto seremos mais diretos. Se $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \varnothing$, a inclusão vale por vacuidade. Caso contrário, seja $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Temos que $x \in A \cup B$, assim como $x \in A \cup C$. Da primeira, segue que $x \in A$ ou $x \in B$. Se $x \in A$, então $x \in A \cup (B \cap C)$ (que é o que queremos provar). Se $x \in B$, usemos o fato de que $x \in A \cup C$. Deste, segue que $x \in A$ ou $x \in C$ (além de $x \in B$). Já consideramos o caso em que $x \in A$ (no qual verificamos a validade da inclusão). Se $x \in C$, temos que $x \in B \cap C$, logo $x \in A \cup (B \cap C)$, como queríamos. Desse modo, provamos a inclusão

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C),$$

concluindo a demonstração da quinta propriedade.

Diferença de conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, define-se a **diferença** $A \backslash B$ (também denotada por $A - B$) como sendo o conjunto formado pelos elementos de A que *não* pertencem a B, isto é

$$A \backslash B := \{a \in A \,|\, a \notin B\}.$$

Exemplos 2.12 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{4, 5, 6\}$ e $D = \{2, 3\}$, tem-se:

- $A \backslash B = \{2\}$

- $B \backslash A = \{5\}$
- $A \backslash C = A$
- $C \backslash A = C$
- $A \backslash D = \{1\}$
- $D \backslash A = \emptyset$
- $B \backslash C = \{1, 3\}$
- $C \backslash B = \{4, 6\}$

- $B \backslash D = \{1, 5\}$
- $D \backslash B = \{2\}$
- $C \backslash D = C$
- $D \backslash C = D$

Propriedade 2.13 *Sejam dados dois conjuntos A e B. Das definições acima, seguem imediatamente as seguintes propriedades:*

1. $A \backslash A = \emptyset$

2. $A \backslash \varnothing = A$

3. $\varnothing \backslash A = \varnothing$

Complementar de um conjunto. Seja fixado um conjunto $\mathbb{U}$. Dado um subconjunto qualquer $A \subset \mathbb{U}$, define-se o **complementar** de A relativamente a $\mathbb{U}$, denotado por $\complement_{\mathbb{U}} A$, como sendo o conjunto $\mathbb{U} \backslash A$. Isto é,

$$\complement_{\mathbb{U}} A = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}.$$

Num certo sentido, a operação do *complementar* é idêntica à operação *diferença*. O que pode distinguir uma da outra é o papel desempenhado pelo conjunto $\mathbb{U}$, o qual atua como um conjunto de referência (um conjunto universo, em um sentido relativo, como já chamamos atenção anteriormente). Em outras palavras, a operação do complementar age sobre os subconjuntos de um conjunto referencial, enquanto a operação de diferença opera sobre dois conjuntos quaisquer.

Observação. Durante o curso, toda vez que o conjunto de referência estiver implicitamente fixado, adotaremos uma notação simplificada para o complementar de um conjunto. Assim, nesses casos, ao invés da notação acima, denotaremos o complementar de um conjunto A simplesmente por A^c.

Exemplos 2.14. Fixemos o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e tomemos os subconjuntos A, B e C do exemplo anterior. Então:

- $A^c = \{4, 5, 6\}$
- $B^c = \{2, 4, 6\}$
- $C^c = \{1, 2, 3\}$

Propriedade 2.15 . *Seja dado um conjunto* $\mathbb{U}$ *e seja* $A \subset \mathbb{U}$. *Da definição, seguem imediatamente as seguintes propriedades:*

1. $\varnothing^c = \mathbb{U}$

2. $\mathbb{U}^c = \varnothing$

3. $(A^c)^c = A$

4. $A \cup A^c = \mathbb{U}$

5. $A \cap A^c = \varnothing$

Exercícios

Ex. 2.4 — Define-se a **diferença simétrica** $A \vartriangle B$ como sendo a união das diferenças $A \backslash B$ e $B \backslash A$, isto é $A \vartriangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Verifique as seguintes propriedades:

a) $A \vartriangle A = \varnothing$

b) $A \vartriangle \varnothing = A$

c) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$

Ex. 2.5 — Determine as diferenças simétricas entre os conjuntos A, B, C, D do Exemplo 2.3.

Exercício Resolvido 2.16 Mostre que, dados quaisquer conjuntos A e B, tem-se que

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Solução: Em geral, para provarmos uma *igualdade de conjuntos* do tipo $X = Y$, é necessário provarmos *duas inclusões*: $X \subset Y$ e $Y \subset X$. Assim, no caso desse exercício, devemos provar as inclusões:

$$A \vartriangle B \subset (A \cup B) \backslash (A \cap B) \quad \text{e} \quad (A \cup B) \backslash (A \cap B) \subset A \vartriangle B.$$

Comecemos pela primeira inclusão. Se $A \vartriangle B = \varnothing$, a inclusão é trivialmente válida. Suponhamos então $A \vartriangle B \neq \varnothing$. Tomemos $x \in A \vartriangle B$ e provemos que $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Temos:

$$x \in A \vartriangle B \Rightarrow x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

$$x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \Rightarrow x \in (A \backslash B) \text{ ou } x \in (B \backslash A)$$

Suponha, sem perda de generalidade, $x \in A \backslash B$ (o caso $x \in B \backslash A$ é análogo).

$$x \in A \backslash B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B$$

Como $x \in A$ e $A \subset A \cup B$, então $x \in A \cup B$. E como $A \cap B \subset B$ e $x \notin B$, então $x \notin A \cap B$. Dessas últimas duas, concluímos que

$x \in A \cup B$, mas $x \notin A \cap B$, o que significa que $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Passemos à segunda inclusão: $(A \cup B) \backslash (A \cap B) \subset A \vartriangle B$. Como feito anteriormente, se o conjunto à esquerda for vazio, a inclusão é válida. Se não for vazio, tomemos $x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ e provemos que $x \in A \vartriangle B$. Temos:

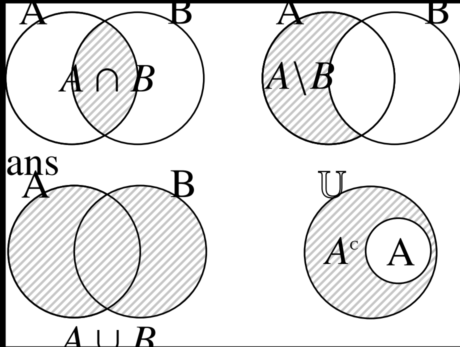
$$x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) \Rightarrow x \in A \cup B \text{ e } x \notin A \cap B$$

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in A$ (o caso $x \in B$ é análogo). Como $x \notin A \cap B$ e $x \in A$, resulta $x \notin B$. Assim, $x \in A \backslash B$, e como $A \backslash B \subset (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, podemos concluir que

$x \in A \vartriangle B.$ $\square$

Diagramas de Venn-Euler. Uma forma gráfica para representar conjuntos é dada pelos *diagramas de Venn-Euler*, através dos quais cada conjunto é representado por uma região plana limitada e a relação entre tais conjuntos é representada pela posição relativa dessas regiões. A figura abaixo ilustra alguns exemplos:


A
B
$A \cap B$
A
B
$A \backslash B$
ans
A
B
$\mathbb{U}$
A^c
A
$A \cup B$

Produto cartesiano. Sejam dados dois conjuntos *não vazios* A e B. Define-se o **produto cartesiano** de A e B, denotado por $A \times B$ como sendo o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B, isto é

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

Nunca é demais lembrar que um par ordenado (a, b), como objeto matemático, é *diferente* do conjunto $\{a, b\}$. Este último caracteriza-se unicamente por conter os elementos a e b, enquanto que o par ordenado (a, b) impõe uma *ordem* entre os elementos. Em breve, tem-se que $\{a, b\} = \{b, a\}$, mas $(a, b) \neq (b, a)$ (exceção feita, evidentemente, ao caso em que $a = b$).

Exemplos 2.17 Mais uma vez, tomemos os conjuntos A, B, C e D do Exemplo 2.3. Tem-se:

- $A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5)\}$
- $B \times A = \{(1,1),(3,1),(5,1),(1,2),(3,2),(5,2),(1,3),(3,3),(5,3)\}$
- $A \times C = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$
- $C \times A = \{(4,1),(5,1),(6,1),(4,2),(5,2),(6,2),(4,3),(5,3),(6,3)\}$
- $A \times D = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

- $D \times A = \{(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(2,3),(3,3)\}$
- $B \times C = \{(1,4),(1,5),(1,6),(3,4),(3,5),(3,6),(5,4),(5,5),(5,6)\}$
- $C \times B = \{(4,1),(5,1),(6,1),(4,3),(5,3),(6,3),(4,5),(5,5),(6,5)\}$
- $B \times D = \{(1,2),(1,3),(3,2),(3,3),(5,2),(5,3)\}$
- $D \times B = \{(2,1),(3,1),(2,3),(3,3),(2,5),(3,5)\}$
- $C \times D = \{(4,2),(4,3),(5,2),(5,3),(6,2),(6,3)\}$
- $D \times C = \{(2,4),(3,4),(2,5),(3,5),(2,6),(3,6)\}$

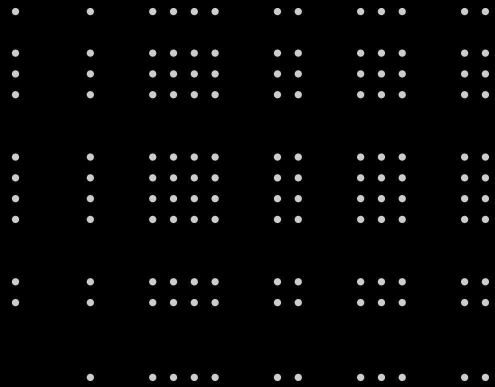


Figura 2.1: Produto Cartesiano de A e B

O conceito de produto cartesiano também se aplica a mais do que dois conjuntos[3]. Dados n conjuntos *não vazios* ($n \geq 2$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, define-se o produto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

como sendo o conjunto formado pelas n-uplas[4] ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde o primeiro elemento pertence a A_1, o segundo a A_2 e assim

[3] Na verdade, é possível definir produto cartesiano de uma família infinita de conjuntos. Tal conceito será visto mais adiante, como complemento ao capítulo sobre Funções.

[4] Lê-se *ênuplas*.

por diante, até o último elemento, que deve pertencer a A_n. Em símbolos:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in A_i, \forall\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Propriedades das operações. Sejam dados conjuntos quaisquer A, B e C. Valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cap B = B \cap A$

3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5. $C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$

6. $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$

Nas próximas três propriedades, suponha A, B, C não vazios.

10. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

11. Se $B \cap C \neq \emptyset$, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

12. Se $B \backslash C \neq \emptyset$, então $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

Além disso, seja $\mathbb{U}$ um superconjunto de A, B e C e considere a operação de complementar relativo a $\mathbb{U}$. Então:

13. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

14. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Exercício.

Ex. 2.6 — Prove as propriedades acima.

Das propriedades 3, 4 e 5 acima, podemos considerar, sem incorrer em ambiguidade, as seguintes operações com uma terna de conjuntos A, B e C:

- $A \cup B \cup C$
- $A \cap B \cap C$
- $A \triangle B \triangle C$

Exercícios

Ex. 2.7 — Considere o conjunto universo $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e sejam os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ B &= \{x \in \mathbb{U} : (x-2)^2(x-3) = 0\} \\ C &= \{x \in \mathbb{U} : x \text{ é par}\} \end{aligned}$$

Para esses subconjuntos determine:

a) $A \cup B$

b) $A \cap (B \cup C)$

c) $C \cup A^c$

d) $(A \cup C)^c$

e) $A^c \cap C^c$

f) $frm{-}eB$

Ex. 2.8 — Dados quaisquer conjuntos A, B e C, mostre que:

a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

c) $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A$ e $C \subset B$

d) $C \backslash (B \backslash A) = (A \cap C) \cup (C \backslash B)$

e) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$

f) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$

g) $A \subset B \Leftrightarrow A \backslash B = \varnothing$

h) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \backslash A = B$

Ex. 2.9 — Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que:

a) $A \subset B \Leftrightarrow B^{\mathrm{c}} \subset A^{\mathrm{c}}$

b) $A^{\mathrm{c}} \cap B = B \backslash A$

c) $A \cup B^{\mathrm{c}} = (B \backslash A)^{\mathrm{c}}$

Ex. 2.10 — Sejam dados dois conjuntos quaisquer A e B. Mostre que:

a) $frm{-}eA \cap B = frm{-}eA \cap frm{-}eB$

b) $frm{-}eA \cup B \supset frm{-}eA \cup frm{-}eB$

Ex. 2.11 — Dê um exemplo de conjuntos A e B de modo que *não* valha a inclusão $frm{-}eA \cup B \subset frm{-}eA \cup frm{-}eB$.

Ex. 2.12 — Dados conjuntos A, B, C, mostre que $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$ (cf. Exercício 2.4.

Ex. 2.13 — Ao tentar provar a propriedade $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle$

$(B \vartriangle C)$ (veja exercício acima), um estudante, primeiramente, provou a inclusão

$$(A \vartriangle B) \vartriangle C \subset A \vartriangle (B \vartriangle C)$$

Em seguida, para provar a outra inclusão, procedeu do seguinte modo:

$$A \vartriangle (B \vartriangle C) = (B \vartriangle C) \vartriangle A =$$

$$= (C \vartriangle B) \vartriangle A \subset C \vartriangle (B \vartriangle A) =$$

$$= (B \vartriangle A) \vartriangle C = (A \vartriangle B) \vartriangle C$$

Está correto o argumento do estudante?

Exercícios Suplementares.

Ex. 2.14 — Dados A, B, C conjuntos. Prove as seguintes afirmações

a) $A \cap A = A$

b) $A \cup A = A$

c) $A \cap B \subset B$

d) $A \subset A \cup B$

e) $A \cap B \subset A \cup B$

f) $A \cup \emptyset = A$

g) $A \cap \emptyset = \emptyset$

h) $A \cup (A \cap B) = A$

i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

j) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

k) $frm{-}eA \cap frm{-}eB = frm{-}eA \cap B$

Ex. 2.15 — Dado um conjunto $\mathbb{U}$, sejam A e B subconjuntos quaisquer de $\mathbb{U}$. Tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, mostre que:

a) $A \subset B^{c}$ se e somente se $A \cap B = \emptyset$

b) $A \cup B^{c} = (B \backslash A)^{c}$

c) $(A^c)^c = A$

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ex. 2.16 — Dados A, B, C, D subconjuntos. Prove as seguintes afirmações:

a) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

b) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $A \cup C \subset B \cup D$.

c) Se $frm{-}eA = frm{-}eB$ então $A = B$.

d) $A \subset B$ se e somente se $A \cup B = B$.

e) $A \subset B$ se e somente se $frm{-}eA \subset frm{-}eB$.

f) Se $A \cap B = A \cap C$ e $A \cup B = A \cup C$ então $B = C$.

g) $A \backslash B \subset B$ se e somente se $A \backslash B = \emptyset$.

Ex. 2.17 — Suponha A, B, C não vazios. Mostre que:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) Se $B \cap C \neq \varnothing$, então $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

c) Se $B \backslash C \neq \varnothing$, então $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

3 Conjuntos Numéricos

Nesta seção, tratamos dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais. O enfoque não é construtivo, isto é, não serão *definidos* tais conjuntos. Apenas destacam-se suas principais *propriedades*, com particular atenção às propriedades dos números naturais e dos números reais.

3.1 Números naturais, inteiros e racionais

Supõem-se conhecidos os conjuntos $\mathbb{N}$ (naturais), $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{Q}$ (racionais), descritos abaixo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\
\mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}
\end{aligned}$$

É de uso comum a seguinte notação para alguns subconjuntos de

$\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}^* &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \neq 0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \geq 0\} \\
\mathbb{Z}_- &= \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq 0\} \\
\mathbb{Z}_+^* &= \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x > 0\} \\
\mathbb{Z}_-^* &= \mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x < 0\}
\end{aligned}
$$

Com significado análogo, usa-se a notação $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+^*$ e $\mathbb{Q}_-^*$.

3.1.1 Soma e multiplicação

Em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ estão bem definidas as operações de *soma* e *multiplicação*. Algumas propriedades básicas dessas operações são apresentadas abaixo (onde a, b e c denotam números naturais, inteiros ou racionais):

1. $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
2. $a.b = b.a$ (comutatividade da multiplicação)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade da soma)
4. $(a.b).c = a.(b.c)$ (associatividade da multiplicação)
5. $0 + a = a$ (elemento neutro da soma)
6. $1.a = a$ (elemento neutro da multiplicação)
7. $a.(b + c) = a.b + a.c$ (distributiva)

As propriedades acima são importantes para a manipulação algébrica de equações que envolvem números ou variáveis numéricas. Entretanto, há mais uma propriedade necessária para o cálculo algébrico que não tem o mesmo comportamento nos três conjuntos acima. Trata-se da existência de elementos inversos:

(+) Para cada número a, existe o *oposto* de a, isto é, um número que somado a a resulta no elemento neutro 0.

(·) Para cada número $a \neq 0$, existe o *inverso* de a, isto é, um número que multiplicado por a resulta no elemento neutro 1.

Evidentemente, as afirmações acima podem ser verdadeiras ou falsas, dependendo de qual conjunto numérico estamos falando. No caso do conjunto dos naturais, nenhuma das afirmações é verdadeira, uma vez que nenhum número natural possui oposto (a exceção do elemento neutro 0) nem inverso (a exceção do elemento neutro 1). Os inteiros tampouco possuem elementos inversos, mas em compensação, possuem elementos opostos:

$$\forall\ z \in \mathbb{Z},\ \ \exists\ -z \in \mathbb{Z} \mid z + (-z) = 0.$$

Por fim, no conjunto dos números racionais, ambas as afirmações são verdadeiras:

$$\forall\ q \in \mathbb{Q},\ \ \exists\ -q \in \mathbb{Q} \mid q + (-q) = 0$$
$$\forall\ q \in \mathbb{Q}^*,\ \ \exists\ q^{-1} \in \mathbb{Q} \mid q.q^{-1} = 1$$

3.1.2 Potenciação

Se a e n são números naturais, fica bem definida a operação de *potência*

$$a^n = \begin{cases} a.a.\cdots.a \qquad (n \text{ vezes}), \quad \text{se} \quad n \neq 0 \\ 1 \quad \text{se} \quad n = 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Note que a "operação" 0^0 não é definida. O motivo disso será visto, possivelmente, na seção dedicada a limites de funções.

Nomenclatura. Na expressão a^n, o número a é chamado de **base**, enquanto n é chamado de **expoente**.

É imediato verificar as propriedades abaixo (onde $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{N}$):

1. $a^n.a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $(a.b)^n = a^n.b^n$

Para estender a potenciação para expoentes inteiros, de modo a manter as propriedades acima, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}^* \text{ e todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, tomando $a \in \mathbb{N}^*$ e $n, m \in \mathbb{Z}$, temos, além das anteriores, a seguinte propriedade:

4. $a^{n-m} = \dfrac{a^n}{a^m}$

Por fim, observe que as mesmas definições acima fazem sentido para o caso da base ser um número racional. Além disso, as quatro propriedades já enunciadas continuam valendo para esse caso, juntamente com a seguinte propriedade (onde $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$ e $n \in \mathbb{Z}$):

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Observação. Mais adiante, poderemos definir a operação de potência para expoentes racionais. Mas isso só será possível, de modo adequado, no contexto dos números reais.

3.2 Princípio de Indução Finita

Uma propriedade particularmente importante dos números naturais é expressa pelo *Princípio de Indução Finita* (PIF). Nesta seção, serão formulados dois enunciados diferentes (mas equivalentes) para o PIF. O objetivo de se ter duas versões diferentes para um mesmo princípio é poder escolher qual delas mais se presta a cada caso estudado. No que se segue, $P(n)$ denota uma propriedade genérica, atribuível ao número natural genérico n. Se n satisfaz a propriedade $P(n)$, dizemos que $P(n)$ é *verdadeira* (caso contrário, que é *falsa*).

Pode ser cômodo, para compreender o PIF, ter em mente a seguinte *analogia do dominó*. Imagine que possuímos um certo número de peças de dominó e que resolvemos dispô-las em pé (i.e. apoiadas em suas faces menores) e enfileiradas. Se empurrarmos a primeira peça da fila (na direção da peça que lhe segue) e se a distância entre cada peça e a seguinte for suficientemente pequena, então, inevitavelmente, todas as peças serão derrubadas.

A analogia com o PIF é clara: a primeira peça do dominó a ser empurrada corresponde ao número natural n_o da primeira condição do PIF (em geral, n_o é o primeiro número natural para o qual a propriedade P é verdadeira, i.e. é o "primeiro número da fila"); a condição de que a distância entre cada peça e a seguinte seja suficientemente pequena pode ser expressa na forma "se uma peça cai, a seguinte também cai", e isso corresponde à segunda condição do PIF (claro que, para que a analogia funcione bem, devemos imaginar uma coleção infinita de peças de dominó).

Segundo o PIF, para provarmos a validade de uma propriedade, devemos verificar as duas condições PIF 1 e PIF 2. A primeira delas, em geral, é a mais simples, pois trata-se somente de acharmos um número natural que satisfaz a propriedade. A segunda, normalmente, é o cerne da demonstração. Para verificar a validade da condição PIF 2, deve-se: (i) tomar um número natural genérico[1] k; (ii) assumir que a propriedade P vale para esse número, i.e. que $P(k)$ é verdadeira (nos referimos a isso como sendo a *hipótese indutiva*); (iii) usando a hipótese indutiva (e eventualmente outras propriedades já conhecidas), provar que o número $k+1$ (i.e. o sucessor de k) também satisfaz a propriedade P, ou seja, que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Exercício Resolvido 3.1 . Considere a seguinte propriedade: a

[1] Não custa lembrar que ao dizer que o número é *genérico*, queremos dizer que ele deve representar qualquer número possível, não devendo assumir um valor específico.

soma dos primeiros n números naturais positivos é $n(n+1)/2$. Em símbolos:

$$P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solução: Comecemos com verificar a condição PIF 1. Para isso, basta encontrar um número positivo n que torne a propriedade $P(n)$ verdadeira. Basta tomar $n = 1$. De fato, a soma à esquerda na expressão acima é 1, enquanto o termo à direita é

$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Logo, $P(1)$ é verdadeira. Para verificar a condição PIF 2, devemos tomar um número natural positivo qualquer $k \in \mathbb{N}$ e mostrar que vale a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Em outras palavras, devemos supor que $P(k)$ é verdadeira (hipótese indutiva) e mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira. Logo, a nossa hipótese indutiva é

$$P(k) : 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Temos então

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}$$

Assim, verificamos que, se $P(k)$ é verdadeira, também o é $P(k+1)$. Donde, pelo PIF, concluímos que $P(n)$ é verdadeira para todo natural $n \geq 1$, i.e. para todo natural positivo. $\square$

Exercício Resolvido 3.2 Mostrar por indução a propriedade

$P(n) : 2^n \geq 1 + n.$

Solução: Para $n = 0$ a propriedade é verdadeira, pois $2^0 = 1 \geq 1 + 0$. Assim, é satisfeita condição 1 do PIF. Para provar a condição 2, tomemos qualquer $k \in \mathbb{N}$ e assumamos a hipótese indutiva

$$2^k \geq 1 + k$$

Queremos mostrar que $P(k+1)$ é válida, i.e. que $2^{k+1} \geq 1+(k+1)$. Temos

$$2^{k+1} = 2.2^k \geq 2.(1 + k) \quad \text{(usamos a hipótese indutiva)}$$

$$= 2 + 2k \geq 2 + k = 1 + (k + 1)$$

A condição PIF 2, portanto, também é válida. Logo, pelo PIF, a propriedade P vale para todo número natural. $\square$

Nunca é demais ressaltar que, ao usar o PIF para demonstrar a validade de uma propriedade, é necessário cumprir ambas as condições 1 e 2. A título de exemplo, considere as propriedades abaixo:

1. $P(n) : n = 1$ (isto é, todo número natural é igual ao número 1)

2. $Q(n) : n > n+1$ (isto é, todo número natural é maior que seu sucessor)

Tais propriedades são evidentemente falsas. Se fôssemos tentar prová-las usando o PIF, observaríamos que a propriedade $P(n)$

satisfaz a condição PIF 1, pois $P(1)$ é verdadeira, mas não satisfaz a condição PIF 2, pois se $P(n)$ é verdadeira, então $n = 1$ e, consequentemente, $n + 1 = 2 \neq 1$, i.e. $P(n + 1)$ é falsa. Além disso, observaríamos que a propriedade $Q(n)$ não satisfaz a condição PIF 1, mas satisfaz a condição PIF 2 (se $n > n + 1$, então, somando 1 a cada membro, resulta $n + 1 > n + 2$).

Exercícios

Ex. 3.1 — Considere a propriedade $P(n) : n^2+n$ é ímpar. Mostre que a propriedade P verifica a condição PIF 2. Discuta a afirmação: $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 3.2 — Lembrando a definição de *coeficiente binomial*:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

prove o *Teorema Binomial* : para cada $n \in \mathbb{N}^*$, vale a expressão

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Sugestão: será necessário usar a fórmula

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Muitas vezes, tentar mostrar uma implicação do tipo

$$P(k) \text{ é verdadeira} \Rightarrow P(k+1) \text{ é verdadeira}$$

não é tão simples, ou até mesmo impossível. Desse modo, é útil ter à disposição a seguinte versão do PIF:

A diferença dessa versão para a primeira está na condição 2, mais especificamente, na hipótese indutiva. Na versão 1, a hipótese indutiva pode ser reformulada como "a propriedade é válida para o antecessor do número n". Já na versão 2, a hipótese indutiva é "a propriedade é válida para todos os números que antecedem n".

Exercício Resolvido 3.3 Considere a propriedade $P(n)$: n é primo ou é produto de números primos. Vamos provar que $P(n)$ é verdadeira para todo $n > 1$ (isto é, vamos provar que todo número natural maior que 1 é primo ou é produto de números primos). A condição PIF é trivialmente satisfeita, pois $P(2)$ é verdadeira. Adotando a segunda versão do PIF, vamos verificar a condição 2. Fixado $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), nossa hipótese indutiva é:

se $2 \leq k < n$, então k é primo ou é produto de primos.

Solução: Queremos mostrar que n é primo ou é produto de primos. Evidentemente, n é primo ou não é. Se for primo, então $P(n)$ é verdadeira. Se n não é primo, então deve existir um número primo p que divide n, isto é,

$$n = p.k$$

para um certo $k \in \mathbb{N}$. Ora, como $k > 1$ (pois $p \neq n$) e $k < n$ (pois $p > 1$), podemos usar a hipótese indutiva para o número k: k é primo ou é produto de primos. Consequentemente, $n = p.k$ é um produto de primos, ou seja, $P(n)$ é verdadeira. Assim, pelo PIF (2^a versão), a propriedade P vale para todo natural maior que 1. $\square$

Exercício.

Ex. 3.3 — Tente perceber a dificuldade em se provar a propriedade acima usando a primeira versão do PIF.

Observação 3.4 *Até agora, falamos somente em propriedades dos números naturais. Mas pode-se usar o PIF para provar propriedades dos números inteiros ou até mesmo racionais, desde que devidamente formuladas em termos de números naturais. Na verdade, em qualquer contexto, mesmo quando os objetos considerados não são numéricos, se uma propriedade (verdadeira) puder ser formulada em termos de números naturais, então ela pode, ao menos em princípio, ser demonstrada através do PIF. A seguir, um exemplo interessante que pode ser resolvido com o PIF.*

Exercícios

Ex. 3.4 — Calcule :

a) a soma dos n primeiros números pares.

b) a soma dos n primeiros números ímpares.

Ex. 3.5 — Prove que para todo inteiro positivo n vale:

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Ex. 3.6 — Demonstre que para todo inteiro positivo n vale:

a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.

b) $1 + 2(\frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2})^2 + \cdots + n(\frac{1}{2})^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

c) $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

d) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

e) $n < 2^n$.

f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

Ex. 3.7 — Dados a e r dois números inteiros, $r \neq 1$. A sequência $a_1 = a, a_2 = ra, a_3 = r^2a, \cdots, a_n = r^{n-1}a, \cdots$ é denominada

progressão geométrica de razão r. Prove que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é:

$$S_n = \frac{r^n a - a}{r - 1}.$$

Ex. 3.8 — Prove que $2n + 1 < 2^n$ para todo $n > 3$.

Ex. 3.9 — Seja x um inteiro positivo. Demonstre que:

$$(1 + x)^n > 1 + nx, \text{para todo } n \geq 2.$$

Ex. 3.10 — Prove que

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Ex. 3.11 — Prove que para qualquer inteiro positivo n o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

Ex. 3.12 — Prove que um caixa eletrônico pode entregar ao usuário qualquer valor maior ou igual a R$4 usando apenas notas de dois e de cinco reais.

* **Ex. 3.13 —** Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$.

Ex. 3.14 — Use indução para mostrar que um conjunto finito com n elementos possui 2^n subconjuntos.

* **Ex. 3.15 —** Sejam $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ conjuntos com relação a um conjunto universo $\mathbb{U}$ fixado.

a) Prove por indução que

$$X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \cdots \cup (X \cap X_n).$$

b) Prove por indução que

$$(X_1 \cup X_2 \cup \cdots X_n)^C = (X_1^C) \cap (X_2^C) \cap \cdots \cap (X_n)^C.$$

* **Ex. 3.16 —** Prove que para todo $n \geq 9$,

$$n! \geq (2n)^2$$

.

* **Ex. 3.17 —** Prove para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

Prob. 3.18 — **Problema do Circuito**

Em um circuito fechado (por exemplo, uma pista de corrida), são distribuídos, aleatoriamente, um certo número de galões de gasolina. Não se conhece a quantidade de gasolina em cada galão (pode até haver galões vazios), mas sabe-se que a quantidade total de gasolina é suficiente para efetuar *exatamente* uma volta nesse circuito (e cada galão tem capacidade para conter toda essa quantidade de gasolina, se for o caso). O piloto escolhe, como ponto de partida, qualquer ponto do circuito onde se encontra um galão. O carro é colocado nesse ponto, com o tanque vazio. Em seguida, coloca-se no tanque o conteúdo desse galão. Se, com essa quantidade de gasolina, o carro não chegar ao próximo galão, ele para em pane seca. Mas se conseguir chegar ao próximo galão, acrescenta ao tanque o conteúdo desse novo galão e prossegue na pista em direção ao próximo galão. Seguindo esse procedimento, há duas possibilidades: o carro completa a volta ou para em pane seca em algum lugar da pista antes de completar a volta. A questão é: será sempre possível escolher um oportuno galão inicial de modo a completar a volta da pista? (Atenção: o problema consiste em decidir se é *possível* fazer tal escolha, e não em *como* fazer tal escolha) [Solução no Apêndice].

3.3 Números reais

Como dissemos anteriormente, está fora de nossos propósitos fazer uma *construção* do conjunto dos números reais. Interessa-nos, isso sim, aprofundarmos o conhecimento das suas *propriedades*. Em outras palavras, nosso enfoque será voltado à *estrutura* do conjunto dos números reais.

Entretanto, pode ser cômodo ter em mente algum modelo ou representação dos números reais, de modo a facilitar a apreciação de sua estrutura, foco de nossa discussão. Nesse sentido, as representações mais comuns são a representação decimal e a reta real, qualquer uma delas pode servir ao escopo[2]. Destaque-se, porém, mais uma vez, que essas ou quaisquer outras representações servem somente como *suporte* à compreensão da estrutura dos reais. Tudo o que se segue é independente de tais representações e estas não serão novamente mencionadas no desenrolar desta seção.

[2]Voltaremos a falar dessas representações mais adiante. Por ora, supomos que sejam conhecidas. Aliás, se não o forem, não terão nenhuma valia nesta seção, uma vez que é justamente a intimidade com tais representações o fator que pode ajudar a compreender a descrição da estrutura que aqui será feita.

3.3.1 Apresentação axiomática dos números reais

O conjunto dos números reais, denotado por $\mathbb{R}$, é um conjunto que satisfaz os assim chamados *axiomas de corpo, de ordem e de completude*. A seguir, trataremos cada grupo de axiomas separadamente.

Axiomas de Corpo

O conjunto $\mathbb{R}$ é dotado de duas operações, *soma* e *multiplicação*, denotadas respectivamente pelos símbolos "+" e ".", satisfazendo as seguintes propriedades[3]:

A1. Propriedade associativa da soma

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

[3]Como já é costume, a multiplicação $a.b$ será, em geral, simplesmente denotada por ab.

A2. Propriedade comutativa da soma

$$a + b = b + a \qquad \forall\, a, b, \in \mathbb{R}$$

A3. Existência do elemento neutro da soma

$$\text{Existe } 0 \in \mathbb{R} \mid a + 0 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

A4. Existência de oposto

$$\text{Para todo } a \in \mathbb{R},\ \exists(-a) \in \mathbb{R} \mid a + (-a) = 0$$

A5. Propriedade associativa da multiplicação

$$(ab)c = a(bc) \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

A6. Propriedade comutativa da multiplicação

$$ab = ba \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

A7. Existência do elemento neutro da multiplicação

$$\text{Existe } 1 \in \mathbb{R} \,|\, a.1 = a \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

A8. Existência de inverso

$$\text{Para todo } a \in \mathbb{R}^*,\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \,|\, a.a^{-1} = 1$$

A9. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à soma

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Observação. Há outros conjuntos numéricos que também possuem operações de soma e multiplicação, satisfazendo as propriedades acima. É o caso, por exemplo, do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números complexos. Nesse sentido, o conjunto de axiomas acima é insuficiente para caracterizar univocamente o conjunto dos números reais.

Exercícios. A partir dos axiomas A1, ..., A9 acima, prove as seguintes propriedades:

1. O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.

2. O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

3. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a.0 = 0$

4. O oposto de um número real é único.

5. O inverso de um número real (não nulo) é único.

6. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, resulta $a(-b) = -ab$.

7. Para quaisquer números reais a e b, tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \,\text{ou}\, b = 0.$$

A título de exemplo, provemos a quarta e a última dessas propriedades. Comecemos pela quarta propriedade. Dado um número real a, sejam $a', a'' \in \mathbb{R}$ números tais que $a + a' = 0$ e $a + a'' = 0$. Então, usando oportunamente os axiomas acima, temos

$$a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$$

Em outras palavras, provamos que só há um único número real que cumpre o papel de oposto de a.

Provemos agora a última das propriedades acima. Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ quaisquer. Devemos mostrar que, se $ab = 0$, então ao menos um dos números a e b deve ser igual a 0. Se $a = 0$, não temos nada a provar. Suponhamos então que $a \neq 0$. Então, pela propriedade A8, existe a^{-1} tal que $a.a^{-1} = 1$. Assim, de $ab = 0$, multiplicando ambos os membros por a^{-1}, obtemos

$$a^{-1}(ab) = a^{-1}.0$$

O lado direito, pela propriedade 3 do exercício acima (que supomos já ter sido provada), é igual a 0. Quanto ao lado direito, usando A5, A8 e A7, temos:

$$a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b$$

Logo, voltando a juntar os lados direito e esquerdo, temos que $b = 0$. $\square$

Axiomas de Ordem

Em $\mathbb{R}$ está definida uma *relação de ordem total*, denotada por $\leq$ (que se lê "menor ou igual"), satisfazendo as seguintes propriedades:

A10. Dados quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

1. $a \leq a$ (reflexiva)
2. Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (anti-simétrica)
3. Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva)
4. Necessariamente, é $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ordem total)

A11. Compatibilidade com a soma

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$

A12. Compatibilidade com a multiplicação

$$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ e } 0 \leq c \Rightarrow ac \leq bc$$

Observação. O conjunto $\mathbb{Q}$ ainda satisfaz os axiomas A10, A11 e A12[4]. Assim, os axiomas A1, ..., A12 continuam sendo insuficientes para caracterizar de modo unívoco o conjunto dos números reais.

Notação. Para facilitar a leitura, é comum adotar o símbolo $\geq$

[4] O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos também pode ser dotado de uma relação de ordem total. Entretanto, não é possível definir tal ordem de modo a satisfazer as condições de compatibilidade com a soma e a multiplicação.

("maior ou igual") no sentido oposto ao de $\leq$, i.e.

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$$

Além disso, também utiliza-se o símbolo $<$ (resp. $>$) para denotar a desigualdade estrita:

$$a < b(\text{resp.}\, a > b) \Leftrightarrow a \leq b(\text{resp.}\, a \geq b)\,\text{e}\, a \neq b.$$

Exercícios. Com base nos axiomas A1, ..., A12, prove as seguintes propriedades relativas às desigualdades:

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se

$$a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -a$$

2. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$$

3. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$a \leq c \text{ e } b \leq d \Rightarrow a + b \leq c + d$$

4. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se

$$a \leq b \text{ e } c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$$

Provemos a última dessas propriedades. Suponhamos dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ como no enunciado, i.e. satisfazendo as hipóteses

$$a \leq b \quad \text{e } c \leq 0.$$

Pelo item 1 deste exercício (que supomos já ter sido demonstrado), temos que $0 \leq -c$. Usando o axioma A12, obtemos

$$a(-c) \leq b(-c)$$

ou seja (usando um dos itens do exercício anterior)

$$-ac \leq -bc$$

Pelo axioma A11, podemos somar a ambos os membros o número $ac + bc$, mantendo a desigualdade, i.e.

$$-ac + (ac + bc) \leq -bc + (ac + bc)$$

donde, usando oportunamente os axiomas, obtemos $bc \leq ac$, i.e. $ac \geq bc$. □

Discussão prévia a respeito da necessidade do Axioma de Completude . O conteúdo desta seção é objeto de vasta literatura. Evidentemente, está fora de nossos propósitos tratar este tema com o mesmo grau de profundidade, longe disso. Entretanto, parece válido delinear algumas questões motivadoras do próximo (e último) axioma que introduziremos para poder finalmente caracterizar univocamente os números reais.

Até agora, como observamos acima, os doze axiomas introduzidos não dão conta de diferenciar o conjunto dos números racionais daquele dos números reais. Mais do que isso, porém, há o fato de que um corpo ordenado[5] não constitui um instrumento adequado às necessidades do cálculo diferencial e integral (ou, de modo mais apropriado, à Análise). O que falta, dito de modo

[5] Denomina-se assim um conjunto que satisfaça os axiomas A1, ..., A12. Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de corpos ordenados.

ainda impreciso, é a propriedade da *continuidade*.

Para apreciar ao menos em parte o significado disso, comecemos por ver a ausência dessa propriedade em $\mathbb{Q}$. Provemos, como exemplo, a seguinte proposição:

Proposição 3.5 *Não existe nenhum número racional q tal que $q^2 = 2$.*

Demonstração: Para demonstrar isso, seguiremos a "redução ao absurdo": negando a tese, chegamos a uma contradição, o que nos permite concluir que a tese deve ser de fato verdadeira. Tomemos então um número racional q tal que $q^2 = 2$ (note que estamos negando a tese de que tal número não existe). Como q é um número racional, devem existir número inteiros $n, m \in \mathbb{Z}$, primos entre si[6], tais que

$$q = \frac{n}{m}$$

Como $q^2 = 2$, tem-se que $n^2 = 2m^2$. Como o membro à direita é par, assim deve ser n^2. Logo, n é par ($\because$ um número inteiro e

[6] Dois inteiros são primos entre si quando não possuem nenhum divisor comum, à exceção do número 1. Um número racional sempre pode ser expresso como razão de dois inteiros primos entre si.

seu quadrado têm a mesma paridade). Podemos então escrever $n = 2k$ para um certo inteiro k, obtendo

$$2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

Mas isso significa que $m^2 = 2k^2$ é par, e portanto m também é par. Logo, o número 2 é um divisor comum de n e m, contradizendo o fato de que tais números são primos entre si. Resumindo: a hipótese de existência de um número racional q cujo quadrado é igual a 2 leva a uma contradição. Disso, concluímos que tal racional não existe, provando assim a proposição. $\square$

A proposição acima é um exemplo de como os axiomas A1, ..., A12 não dão conta sequer de permitir uma operação algébrica tão simples quanto a extração de raiz quadrada. O Axioma de Completude virá fornecer a resposta adequada a essa questão da continuidade, fazendo com que o conjunto dos números reais "preencha as lacunas deixadas pelos racionais".

Axioma de Completude

Apesar de ser possível enunciar o Axioma de Completude com o que já temos à disposição, nos parece mais efetivo, sob o ponto de vista didático, apresentar alguns conceitos preliminares intimamente ligados a tal axioma.

No que se segue, seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto *não vazio*. Dizemos que A é **limitado superiormente**, se existe um número real x tal que

$$a \leq x \qquad \forall\ a \in A$$

Caso exista tal número x, este é chamado de **majorante** do conjunto A. Note que no caso em que A possua algum majorante, possuirá infinitos majorantes.

De modo similar, dizemos que A é **limitado inferiormente** se existir algum número real y tal que

$$y \leq a \qquad \forall\ a \in A$$

Tal número y, caso exista, é chamado de **minorante** . Caso A possua algum minorante, possuirá infinitos minorantes.

Exemplos 3.6. Tome os conjuntos $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x \leq 3\}$.

- O conjunto A possui minorantes (qualquer número não positivo é um minorante de A), mas não possui majorantes, i.e. A é um conjunto limitado inferiormente, mas não superiormente.

- O conjunto B não possui nem minorantes nem majorantes (não é limitado).

- Já o conjunto C é limitado inferiormente e superiormente (qualquer número menor ou igual a 1 é um minorante, qualquer número maior ou igual a 3 é um majorante)

Definição 3.7 *Um número $s \in \mathbb{R}$ é chamado de* ***supremo*** *de A se valem as seguintes condições:*

S1. $a \leq s \qquad \forall\, a \in A$

S2. Se x é um majorante de A, então $s \leq x$

Em outras palavras, um modo simples de colocar a definição acima é: o supremo de um conjunto A é o menor dos majorantes de A.

De modo totalmente similar, definimos o conceito de ínfimo.

Definição 3.8 *Um número $r \in \mathbb{R}$ é chamado de* ***ínfimo*** *de A se valem as seguintes condições:*

I1. $r \leq a \qquad \forall\, a \in A$

I2. Se y é um minorante de A, então $y \leq r$

Em outras palavras, o ínfimo de um conjunto A é o maior dos minorantes de A.

É possível provar (faça-o como exercício) que tanto o supremo quanto o ínfimo de um conjunto, casos existam, são únicos. Isso justifica adotar uma notação para cada um deles: $\sup A$ para o supremo de A e $\inf A$ para o ínfimo de A.

Nos exemplos acima, temos: $\inf A = 0$, $\inf C = 1$ e $\sup C = 3$ (note que A não possui supremo e B não possui nem ínfimo nem supremo). Assim, há casos em que o supremo (ou o ínfimo) pode não existir. O Axioma de Completude diz que isso só poderá ocorrer com conjuntos ilimitados.

Axioma de Completude:

A13. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado superiormente, possui supremo.

Apesar de não fazer menção ao ínfimo, o Axioma de Completude é equivalente à seguinte propriedade:

A13'. Todo subconjunto de $\mathbb{R}$, não vazio e limitado inferiormente, possui ínfimo.

Exercício. Prove a propriedade A13'. [Sugestão: dado um conjunto A limitado inferiormente, considere o conjunto $B = \{-a \,|\, a \in A\}$ e mostre que: i) B é limitado superiormente; ii) $\inf A = -\sup B$]

Pela apresentação que demos ao Axioma de Completude, ficou claro que tal axioma não seria satisfeito pelo conjunto $\mathbb{Q}$. Mostremos que de fato isso ocorre. Considere o seguinte conjunto:

$$A = \{q \in \mathbb{Q}_+ \,|\, q^2 < 2\}$$

Note que $A \neq \varnothing$ (por exemplo, $0 \in A$) e é um conjunto limitado superiormente (por exemplo, 3 é um majorante de A). Se o axioma A13 fosse válido em $\mathbb{Q}$, deveria existir $p \in \mathbb{Q}$ tal que $p = \sup A$. Se provarmos que para tal p, deve valer $p^2 = 2$, poderemos concluir que p não pode ser racional (em função da Proposição 3.5). Consequentemente, teremos concluído que não existe o supremo de A em $\mathbb{Q}$.

Mostraremos, na verdade, uma propriedade mais geral, da qual poderemos concluir a afirmação acima. Referimo-nos à *existência da raiz quadrada de um número real positivo*:

Proposição 3.9 *Seja $b \in \mathbb{R}$ um número positivo. Então existe um único número real positivo a tal que $a^2 = b$. O número a é chamado de* raiz quadrada *de b e é denotado por $\sqrt{b}$.*

Demonstração: Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 < b\}$$

O conjunto A é não vazio, uma vez que $0 \in A$. Além disso, tomando $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 1$ e $y > b$, resulta $y^2 > y > b$, logo A possui majorantes. Pelo Axioma de Completude, existe $a = \sup A$. É evidente que $a > 0$. Queremos mostrar que $a^2 = b$. A ideia, para tanto, é mostrar que não pode ocorrer nem $a^2 < b$, nem $a^2 > b$, só restando a possibilidade que nos interessa. Para descartar cada uma dessas duas desigualdades, verificaremos que: (i) supor que $a^2 < b$ contradiz o fato de a ser um majorante (condição S1 do supremo); (ii) supor que $a^2 > b$ contradiz o fato de a ser o menor dos majorantes (condição S2 do supremo). Pois bem, se fosse $a^2 < b$, poderíamos tomar um número natural $n > 1$ tal que

$$n > \frac{2a+1}{b-a^2}$$

donde obtemos

$$\frac{2a+1}{n} < b - a^2$$

Assim, tomando o número $c = a + 1/n$, seguiria:

$$c^2 = (a + \frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} <$$

$$< a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} < a^2 + b - a^2 = b$$

Isso significa que $c \in A$ e $a < c$, contrariando a condição S1 do supremo. Portanto, está descartada a possibilidade de ser $a^2 < b$. Suponhamos agora que valha $a^2 > b$. De modo semelhante ao que foi feito acima, poderíamos tomar $c = a - 1/n$, onde n é um inteiro tal que

$$n > \frac{2a}{a^2 - b}$$

Da desigualdade acima, segue que

$$\frac{2an - 1}{n^2} < \frac{2an}{n^2} = \frac{2a}{n} < a^2 - b$$

donde obtemos

$$c^2 = (a - \frac{1}{n})^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} = a^2 + \frac{1 - 2an}{n^2} > a^2 + b - a^2 = b$$

Desse modo, c seria um majorante de A com $c < a$, contrariando a condição S2 do supremo. Descartamos, assim, também a possibilidade de ser $a^2 > b$, podendo concluir, portanto, que $a^2 = b$. Por fim, para provarmos a unicidade da raiz quadrada, basta observar que se um número positivo $m \in \mathbb{R}$ é tal que $m^2 = b$, então m tem que ser o supremo de A (prove por exercício). Pela unicidade do supremo, deve ser $m = a$. $\square$

Voltando à questão formulada antes da Proposição 3.9, é imediato agora verificar que se $p \in \mathbb{Q}$ é tal que $p = \sup A$, então $p^2 = 2$. Logo, pelo que já foi dito anteriormente, concluímos que o conjunto dos racionais não satisfaz o Axioma de Completude.

O fato de $\mathbb{R}$ satisfazer os axiomas A1, ..., A13 é expresso dizendo que $\mathbb{R}$ é um *corpo ordenado completo*. Acabamos de ver que $\mathbb{Q}$, apesar de ser um corpo ordenado, não é completo. Dessa forma, podemos agora dizer que os axiomas A1, ..., A13 caracterizam o conjunto dos números reais[7].

---

[7]Na verdade, caberia aprofundar tal "caracterização", mas o que foi dito até

3.3.2 Potenciação de números reais

Na Seção 3.1.2, tratamos da operação de potenciação com base racional positiva e expoente inteiro. Queremos agora estender tal operação para os casos em que a base é um número real positivo e o expoente é um número real. No que se segue, seja a um número real positivo fixado.

Se $m \in \mathbb{Z}$, então a potência a^m é definida em termos da operação de multiplicação:

---

aqui é suficiente para os propósitos deste curso.

- Se $m > 0$, $a^m = a. \cdots .a$ (m vezes)
- Se $m < 0$, $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$
- Por fim, $a^0 = 1$

Para definir a potência com expoente racional, definamos antes a operação $a^{\frac{1}{n}}$ quando $n \in \mathbb{N}^*$. Isto é feito dizendo que $a^{\frac{1}{n}}$ é o número real positivo cuja n-ésima potência é igual ao número a, i.e.

$$b = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b > 0 \text{ e } b^n = a$$

A definição acima parece boa, mas esconde uma questão: fixados a e n, será que existe tal número real b? A resposta a essa questão é similar ao caso da existência da raiz quadrada de um número real positivo. De fato, tal número b existe e é definido por

$$b = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^n \leq a\}$$

De modo análogo ao que foi feito no caso da raiz quadrada de um número real positivo, pode-se provar que tal número real satisfaz as condições desejadas (i.e. $b > 0$ e $b^n = a$).

Observação. A potência $a^{\frac{1}{n}}$ também é denotada por $\sqrt[n]{a}$ e chamada de *raiz n-ésima* de a.

Se $q \in \mathbb{Q}$, podemos escrever

$$q = \frac{m}{n}$$

com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos, então

$$a^q := (a^{\frac{1}{n}})^m$$

Note que cada uma das operações acima (primeiro a potência por $1/n$, seguida pela potência por m) já foram definidas anteriormente. O problema que poderia aparecer aqui tem a ver com a falta de unicidade da representação do número racional q como sendo uma razão de números inteiros. De fato, a fração m/n é somente uma das infinitas representações possíveis de q. Como garantir que, se tomarmos qualquer outra, o resultado da operação de potência não se altera? Felizmente, é possível provar que a potência a^q acima definida é, de fato, independente da particular razão m/n que tomarmos para representar o número racional q (tal prova será, porém, omitida).

Finalmente, seja $x \in \mathbb{R}$.

- Se $a \geq 1$, então

$$a^x := \sup\{a^q \mid q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

- Se $0 < a < 1$, então

$$a^x := \inf\{a^q \,|\, q \in \mathbb{Q} \text{ e } q \leq x\}$$

Com as definições acima, estendemos a operação de potência ao conjunto dos números reais. Tal operação, além disso, continua satisfazendo as propriedades já vistas na Seção 3.1.2, que aqui reproduzimos. Dados quaisquer $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$, tem-se:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$

2. $(a^x)^y = a^{xy}$

3. $(a\,b)^x = a^x b^x$

4. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

A demonstração de tais propriedades foge aos escopos deste texto e será portanto omitida.

3.3.3 Representações dos números reais

Como dissemos anteriormente, a estrutura do conjunto dos números reais é independente da forma que usamos para representar tais números. Entretanto, ao lidar com eles, sempre lançamos mão de alguma representação. Nesta e na próxima seções, voltaremos nossa atenção para duas dessas representações, a representação decimal e a reta real.

Antes, porém, de tratar cada uma delas em sua especificidade, vale a pena gastar algumas palavras sobre o que queremos dizer quando falamos em "representação"dos números reais. Na seção anterior, definimos $\mathbb{R}$ como um conjunto dotado de duas operações ("+" e ".")) e uma relação de ordem total ("$\leq$"), satisfazendo os treze axiomas A1, ..., A13. Assim, uma representação de $\mathbb{R}$

deve conter todos esses elementos: um conjunto, uma operação +, uma operação "."e uma relação de ordem total $\leq$, evidentemente de modo a satisfazer os axiomas.

Na discussão que se segue sobre a representação decimal e a reta real não descreveremos todos esses elementos em detalhes, pois optamos por dar destaque aos aspectos que nos parecem mais importantes no contexto deste curso. Mas, de um modo ou de outro, faremos menção a todos esses elementos da representação.

Representação decimal dos números reais

É comum dizer-se que os números reais são os números que podem ser escritos em forma decimal. Mas o que significa isso, realmente? Quando trabalhamos com números inteiros, usamos a notação posicional em base 10, o que significa que cada posição corresponde a uma dada potência de 10: a unidade é a potência 10^0, a dezena é a potência 10^1, a centena é 10^2 e assim por diante. Por exemplo,

$$14302 = 1.10^4 + 4.10^3 + 3.10^2 + 0.10^1 + 2.10^0$$

Já para representar números não inteiros, precisamos lançar mão das "casas decimais", i.e. de algarismos à direita da vírgula. Mas aqui também a notação posicional se relaciona com as potências de 10, com a única diferença de que as casas à direita da vírgula referem-se a potência *negativas* de 10. Por exemplo,

$$23,496 = 2.10^1 + 3.10^0 + 4.10^{-1} + 9.10^{-2} + 6.10^{-3}$$

Enquanto lidamos com números que possuem um número finito de casas decimais (não nulas), a expressão acima não causa nenhuma estranheza. Entretanto, para interpretarmos uma representação decimal com um número infinito de casas decimais não nulas, nos deparamos com um soma infinita de (múltiplos) de potências de 10. Qual o significado de tal soma?

Para uma resposta adequada, precisaremos do conceito de *série numérica*, o que só será visto na seção dedicada às Sequências. Mas podemos desde já tentar dar uma interpretação aceitável por ora. Tomemos o número

$$r = 1,23857572047657368856 92....$$

(na verdade, as reticências fazem com que não saibamos exatamente de que número se trata, mas isso não importa para nosso exemplo). Vamos interpretar a soma infinita representada pela representação decimal seguindo um método de aproximação. Comecemos tomando $x = 1$. Então x é um número próximo de r e a diferença[8] entre eles é

$$r - x = 0,2385757204765736885692...$$

Em seguida, tomemos $x = 1,2$. A diferença desse novo valor de

[8]Quando falamos em representação decimal, as operações de soma e multiplicação (logo, de subtração e quociente) seguem os algoritmos clássicos para operar com números inteiros. Similarmente, a relação de ordem também deriva da ordem natural entre inteiros.

x para r caiu para

$$0,03857572047657368856 92...$$

Continuamos tomando agora $x = 1,23$, vendo a diferença novamente cair para

$$0,00857572047657368856 92...$$

E assim por diante, vamos tomando para x valores "truncados" de r:

$$1,238 \quad 1,2385 \quad 1,23857 \quad 1,238575...$$

Nenhum desses valores de x coincide efetivamente com r (a menos que r possua um número finito de casas decimais não nulas). Mas se observarmos a diferença entre esses valores e o número original r, veremos que essa diferença vai se aproximando de zero. Em outras palavras, podemos aproximar o valor real de r com o erro que quisermos, i.e. um erro tão pequeno quanto desejarmos.

Nesse sentido, pode-se ler a representação decimal como um "processo de aproximação" de número real r. Como veremos no momento oportuno, essa interpretação não está longe daquela formalmente mais correta.

Outra dificuldade que se encontra quando lidamos com representação decimal de um número real está relacionada com a seguinte questão: os números

$$1 \qquad \text{e} \qquad 0,999999999999....$$

são diferentes?

Por um lado, não há dúvidas quanto ao fato de que as representações decimais acima são diferentes. Mas isso pode levar o leitor incauto a afirmar que os números que tais expressões representam também são diferentes. Será que são mesmo? Usando mais uma vez uma linguagem informal (deixando a resposta formal para quando tratarmos das séries numéricas), podemos comparar o número 1 com os números

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad 0,9999 \quad \ldots$$

Esses últimos, no sentido que vimos acima, representam aproximações cada vez melhores do número $0,999$..... Assim, se observarmos as diferenças entre 1 e esses valores truncados de $0,999$..., podemos chegar à resposta correta da questão acima.

Pois bem, tais diferenças são

$$0,1 \quad 0,01 \quad 0,001 \quad 0,0001 \quad \ldots$$

Conforme nos aproximamos do valor real de $0,999...$, a diferença com o número 1 vai se aproximando de zero. Assim, somos obrigados a concluir que tais representações decimais, apesar de diferentes, referem-se, na verdade, ao mesmo número real (i.e. o número 1)[9].

[9]Uma outra maneira de perceber isso, um tanto ingênua mas funcional, é a seguinte: se tais números fossem diferentes, seria possível encontrarmos um outro número real que estivesse entre eles. Você consegue escrever na forma decimal tal número?

Representação geométrica de $\mathbb{R}$: a reta real

A representação geométrica de $\mathbb{R}$ consiste na identificação da reta geométrica com o conjunto dos números reais. Em uma reta r tomemos dois pontos distintos O e A (o segmento OA será usado como unidade de medida). Por simplicidade, diremos que um ponto P da reta r (distinto de O) está à *direita* de O, se P e A estão do mesmo lado relativamente ao ponto O. Caso contrário, diremos que P está à *esquerda* de O.

O ponto O é identificado ao número real 0. Um ponto P à direita de O é identificado com o número real *positivo* x tal que

$$x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$$

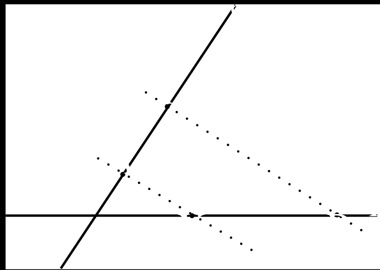
Um ponto P à esquerda de O é identificado com o número real *negativo* x tal que

$$x = -\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}$$

Desse modo, todo ponto da reta geométrica r está associado a um único número real e vice-versa (omitiremos aqui a demonstração dessa afirmação). Essa identificação, porém, não esgota a representação de $\mathbb{R}$. Como já observamos acima, é necessário definir operações de soma e multiplicação na reta geométrica r, assim como uma relação de ordem total, de modo a satisfazer os axiomas dos números reais. A relação de ordem é bastante natural (está, na verdade, embutida nas expressões "à direita de O" e "à esquerda de O"), assim como a operação de soma (que se traduz, essencialmente, em somar comprimentos de segmentos). Não nos parece necessário entrar em maiores detalhes nesses casos. Já a operação de multiplicação não é tão natural como os demais elementos da representação. Como efetuar a multiplicação na reta geométrica?

A operação de multiplicação é baseada no clássico Teorema de Tales. Sejam dados dois números reais x e y (podemos supor que sejam ambos positivos, é fácil adaptar a construção abaixo aos outros casos). Na reta r, marque o ponto X, correspondente ao número real x. Para auxiliar a construção, tome uma reta s que intercepte a reta r no ponto O. Nesta reta, marque o ponto A, correspondente à mesma "unidade de medida" usada para a reta r, e marque também o ponto Y, correspondente ao número real y. Trace pelo ponto Y a reta paralela ao segmento AX e obtenha o ponto P de intersecção dessa reta com a reta r. O Teorema de

Tales garante que o ponto P corresponde ao número real xy. A figura abaixo ilustra essa construção.



3.3.4 Valor absoluto de um número real

É comum identificar o módulo de um número real como sendo um "número sem sinal". Essa caracterização, além de ser imprecisa, é também pouco útil em problemas que envolvem direta ou indiretamente o conceito de módulo. De modo mais apropriado, temos a seguinte definição:

Definição 3.10 *O **valor absoluto** de um número real x, tam-*

bém chamado de módulo *de x, é denotado por* $|x|$ *e dado por*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Uma primeira leitura da definição acima corrobora a interpretação ingênua do módulo como sendo um "número sem sinal". Afinal, tem-se, por exemplo: $|2| = 2$ e $|-2| = -(-2) = 2$. Enquanto lidamos com quantidades conhecidas, como no exemplo anterior, não há problema nenhum em adotar essa visão ingênua. Mas quando há quantidades incógnitas ou variáveis envolvidas, essa concepção é insuficiente e pode até levar a cometer deslizes do tipo "o módulo de x e $-x$ é sempre x".

Uma leitura mais adequada da definição acima leva a ter em mente que ela abre, em geral, dois casos a serem analisados, dependendo do sinal da quantidade encerrada dentro do módulo. Vejamos como se dá essa leitura através de alguns exemplos.

Problema: Determine os números reais que satisfazem a igualdade abaixo

$$|x+1| = 3$$

Solução: Note que não se pode determinar *a priori* se o número

$x + 1$ é ou não negativo. Isso significa que devemos considerar ambas as possibilidades. Seguindo a definição acima, consideremos, separadamente, os casos: (i) $x + 1 \geq 0$; (ii) $x + 1 < 0$.

Caso (i): suponha $x + 1 \geq 0$. Então $|x + 1| = x + 1$. Logo, a equação que queremos estudar se torna

$$x + 1 = 3$$

Note, porém, que agora buscamos uma solução para essa equação somente dentre os números reais que satisfazem a condição $x + 1 \geq 0$. E encontramos a solução $x = 2$.

Caso (ii): suponha agora $x + 1 < 0$. Nesse caso, tem-se $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$. Assim, a equação original torna-se

$$-x - 1 = 3$$

A solução para essa equação (procurada no conjunto dos números reais que satisfazem a condição $x + 1 < 0$) é $x = -4$.

Dos dois casos analisados, obtemos o conjunto-solução $S = \{-4, 2\}$. $\square$

Problema: Determine os números reais que satisfazem a desigualdade

$$|x+2| \leq 2x+3$$

Solução: Mais uma vez, seguindo a definição de valor absoluto, consideraremos dois casos, dependendo do sinal de $x+2$.

Caso (i): suponha $x+2 \geq 0$. Tem-se, então, $|x+2| = x+2$ e a desigualdade assume a forma

$$x+2 \leq 2x+3$$

As soluções que nos interessam, portanto, devem satisfazer tanto a condição $x+2 \geq 0$ quanto a desigualdade $x+2 \leq 2x+3$. Encontramos o conjunto-solução $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Caso (ii): suponha agora $x + 2 < 0$. Então $|x + 2| = -x - 2$ e a desigualdade passa a ser

$$-x - 2 \leq 2x + 3$$

Para que um número x satisfaça essa última desigualdade, deveria valer $x \geq -5/3$. Entretanto, para tal x não valeria a condição $x + 2 < 0$. Logo, esse segundo caso não possui solução.

Com base nas duas análises acima, obtemos o conjunto-solução para o problema inicial: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$. $\square$

Observação. É importante destacar um cuidado que tivemos ao resolver os problemas acima e que talvez passe despercebido. Pela natureza da definição de valor absoluto, tivemos que estudar a equação (no primeiro problema) e a desigualdade (no segundo) em dois casos separados. Ao fazer isso - e aqui está o cuidado ao qual nos referimos - devemos perceber que, em cada um dos casos analisados, estamos *restringindo o universo no qual se busca a solução* do problema. Esse cuidado se fez sentir, particularmente, no segundo problema, quando, ao analisar o caso em que $x + 2 < 0$ (segundo caso), fomos obrigados a descartar as soluções da desigualdade $-x - 2 \leq 2x + 3$, pois estas se encontravam *fora* do universo considerado naquele caso.

Propriedades

(No que se segue, x e y são números reais quaisquer)

1. $|x| \geq 0$

2. $|x| = \sqrt{x^2}$

3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4. $|-x| = |x|$

5. $-|x| \leq x \leq |x|$

6. $|xy| = |x|\,|y|$

7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)

8. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

9. Se $c > 0$, então:

$$|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

10. Se $c > 0$, então:

$$|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c \text{ ou } x \geq c$$

Exercícios

Ex. 3.19 — Demonstre as seguintes propriedades do módulo;

a) $|-x| = |x|$

b) $|x - y| = |y - x|$

c) $|x| = c \Leftrightarrow x = \pm c$

d) $|x \cdot y| = |x|\,|y|$

e) $\left|x^2\right| = x^2$

f) Se $c \geq 0$ então $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$

g) $-|x| \leq x \leq |x|$

h) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdade Triangular)

i) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Ex. 3.20 — Discuta se vale ou não a seguinte desigualdade (para um número real arbitrário x):

$$-x \leq |x| \leq x$$

3.3.5 Introdução à Topologia da reta

O objetivo desta seção é o de introduzir uma linguagem e uma notação que serão úteis, mais adiante, no estudo das funções reais de uma variável real. Em boa parte, trata-se de linguagem e notação conhecidas, como é o caso dos intervalos abertos e fechados. A expressão "topologia da reta", de certo modo, refere-se a propriedades dos números reais (ou das funções reais) que se expressam nessa linguagem[10].

---

[10] A Topologia, na verdade, é uma área ampla da Matemática que se ocupa, dentre outras coisas, do estudo das funções contínuas. Tais funções, e

São dois os conceitos que estão na base do que se entende por topologia da reta: *distância* e *intervalo* (na verdade, eles estão interrelacionados, mas explorar essa interrelação foge ao nosso escopo). Na representação geométrica dos números reais como a *reta real*, ambos os conceitos estão relacionados com aquele

---

consequentemente seu estudo, se dão em contextos bem mais gerais do que aquele das funções reais de uma variável real, que é o que nos interessa aqui. Por tal motivo, não aprofundaremos o significado da expressão "topologia da reta". Na verdade, poderíamos mesmo ter omitido tal referência à Topologia, mas por que fazê-lo se, de fato, é disso que esta seção trata?

de *segmento*.

A **distância** entre dois números reais x e y é dada por

$$d(x, y) := |x - y|$$

Note que, vista na reta real, a noção de distância corresponde ao comprimento do segmento de reta cujos extremos são os pontos com abscissas x e y.

Dados dois números reais $a < b$, um **intervalo** de extremos a e b é um dos subconjuntos abaixo:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ (intervalo aberto)
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ (intervalo fechado)
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$

A **medida** de um intervalo de extremos a e b é a distância entre esses extremos, i.e. $|a - b|$. Note que um intervalo de extremos a e b corresponde, na reta real, ao segmento cujos extremos têm abscissas a e b. A medida desse intervalo é a medida (comprimento) do segmento correspondente.

Sobre notação. Em alguns textos, a notação para intervalos abertos (ou semi-abertos) usa o colchete invertido. Por exemplo, $]a, b[$ denota o que, aqui, denotamos por (a, b). Não adotaremos essa notação do colchete invertido, mas somente aquela do parênteses, explicitada acima.

Quando falamos em intervalos, uma notação particularmente útil é aquela de intervalo centrado em um dado número real. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$ e dado $r > 0$, o **intervalo centrado em a com**

raio r é o intervalo

$$(a - r, a + r)$$

Nesse caso, dizemos que a é o centro desse intervalo. Observe que vale a seguinte propriedade (prove-a por exercício):

$$x \in (a - r, a + r) \Leftrightarrow |x - a| < r$$

Isso significa, em particular, que os números desse intervalo são aqueles que distam de a menos do que r. Dito de outra forma, um intervalo do tipo $(a - r, a + r)$ pode ser interpretado como o conjunto dos números que "aproximam" o número a, com um "erro" menor do que r.

Uma notação semelhante àquela de intervalo é usada para denotar semi-retas, lançando mão também dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, tem-se

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$

Note que não faz sentido usar o colchete no extremo infinito, uma vez que nem $-\infty$ nem $+\infty$ são números reais. Por simplicidade, às vezes usaremos o termo "intervalo" também para semiretas como as acima.

De modo semelhante ao feito para intervalos, podemos falar em *conjunto aberto* e *conjunto fechado*. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto qualquer de números reais. Dizemos que A é **aberto** se vale a seguinte propriedade: todo ponto $x \in A$ é centro de um intervalo contido em A. Dito de modo menos preciso (mas talvez mais significativo): para todo número pertencente ao conjunto

A, variações suficientemente pequenas dele continuam dentro do conjunto A. Com linguagem formal, temos:

$$A \text{ é aberto} \Leftrightarrow \text{para todo } x \in A \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } (x - r, x + r) \subset A$$

Por outro lado, um conjunto $B \subset \mathbb{R}$ é **fechado** se o seu complementar (relativamente ao conjunto $\mathbb{R}$) é aberto, i.e.

$$B \text{ é fechado} \Leftrightarrow \mathbb{R} \backslash B \text{ é aberto}$$

Exemplos 3.11

- Qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto. De fato, dado qualquer $x \in (a, b)$, tomando r como sendo a menor das distâncias $|x-a|$ e $|x-b|$, resulta que $(x-r, x+r) \subset (a, b)$.

- Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a)$ ou $(a, +\infty)$ é aberto. De fato, dado qualquer x em uma dessas semi-retas, tomando $r = |x-a|$, resulta que $(x-r, x+r)$ está contido na semi-reta considerada.

- A união de conjuntos abertos é um conjunto aberto. [Prove por exercício]

- Qualquer intervalo fechado $[a, b]$ é um conjunto fechado. De fato, seu complementar é $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, que é aberto (pois é união de dois conjuntos abertos).

- Qualquer intervalo do tipo $(-\infty, a]$ ou $[a, +\infty)$ é fechado, pois seus complementares são semi-retas abertas.

- O conjunto $\mathbb{R}$ é aberto.

- Um intervalo do tipo $[a, b)$ não é nem aberto, nem fechado. De fato, nenhum intervalo centrado em a está contido em $[a, b)$ (descartando que este seja aberto) e nenhum intervalo centrado em b está contido no complementar de $[a, b)$ (descartando que $[a, b)$ seja fechado).

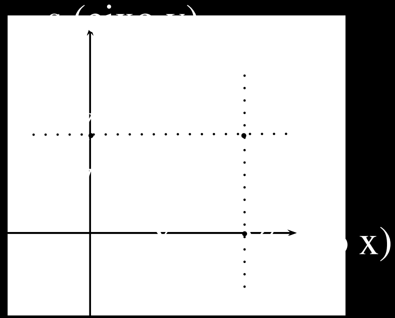
- De modo análogo, um intervalo do tipo $(a, b]$ não é nem aberto, nem fechado.

Os dois últimos exemplos mostram que os conceitos de "aberto" e "fechado" não são conceitos opostos. Isto é, se um dos atributos não vale para um dado conjunto, não se pode concluir que o outro atributo deve ser válido para esse conjunto.

Observação. Sob o ponto de vista formal, convém atribuir ao conjunto vazio a propriedade de ser um conjunto aberto (na verdade, o conjunto vazio satisfaz a condição de ser aberto, acima definida, por vacuidade). Isso significa, também, que o seu complementar é fechado. Mas o complementar de $\varnothing$ é $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{R}$ é aberto e também fechado. E sendo $\mathbb{R}$ aberto, temos que seu complementar é fechado, i.e. o conjunto vazio $\varnothing$ também é aberto e fechado. Esses são os únicos conjuntos simultaneamente abertos e fechados.

3.3.6 O Plano Cartesiano

Um modelo que será muito útil no estudo de funções reais de uma variável real é o *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$, que nada mais é do que uma representação geométrica do produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O plano cartesiano é constituído por duas retas reais que se encontram perpendicularmente na origem (que é, portanto, comum a ambas as retas). Para identificar o plano geométrico com o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, procedemos como segue (acompanhe o procedimento na figura abaixo):



- Tome um ponto P qualquer do plano.
- Construa a reta r' paralela a r, passando por P.
- Construa a reta s' paralela a s, passando por P.
- Chame de X o ponto de intersecção de s' com r.

- Chame de Y o ponto de intersecção de r' com s.
- Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ os números reais associados, respectivamente, aos pontos X e Y.
- Identifique o ponto P com o par ordenado (x, y).

Tendo em mente o procedimento acima, o número x é chamado de *abscissa* do ponto P e o número y é chamado de *ordenada* do ponto P. Ambos são chamados de *coordenadas* de P. A reta r é chamada de *eixo das abscissas* (ou mais popularmente "eixo x") e a reta s de *eixo das ordenadas* (ou popularmente "eixo y").

Esses eixos são chamados também de *eixos coordenados*.

Os dois eixos coordenados dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. A menos de pontos pertencentes aos eixos, temos:

- Primeiro quadrante: pontos com ambas as coordenadas positivas
- Segundo quadrante: pontos com abscissa negativa e ordenada positiva
- Terceiro quadrante: pontos com ambas as coordenadas nega-

tivas

- Quarto quadrante: pontos com abscissa positiva e ordenada negativa

Exercícios

Ex. 3.21 — Considere os seguintes conjuntos. Diga quais são limitados superiormente e quais são limitados inferiormente. E se existir encontre o supremo e o ínfimo desses conjuntos:

a) $A = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$

b) $B = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $C = \{1 - n! : n \in \mathbb{N}\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x < 2\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$

g) $G = \{\frac{n}{1+n} : n \in \mathbb{N}\}$

h) $H = \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

i) $I = \{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

j) $J = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

Ex. 3.22 — A partir dos axiomas A1, ..., A9 dos números reais prove as seguintes propriedades:

a) O número 0 (zero) é o único elemento neutro da soma.

b) O número 1 é o único elemento neutro da multiplicação.

c) Dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, resulta $a.0 = 0$

d) Para quaisquer números reais a e b, tem-se que:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Ex. 3.23 — Mostre, utilizando propriedades básicas, que:

a) Se $ax = a$ para algum $a \neq 0$ então x=1.

b) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

c) Se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

e) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

f) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$.

g) Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$.

h) Se $a \leq b$ e $c \leq d$ então $a + c \leq b + d$.

Ex. 3.24 — (Não existência de Infinitesimais) Mostre que se $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ para todo ε então $x = a$.

Complementares

Ex. 3.25 — Mostre que:

a) Se $a \leq b$ então $-b \leq -a$.

b) Se $a \leq b$ e $c \geq d$, então $a - c \leq b - d$.

c) Se $a \leq b$ e $c \geq> 0$, então $ac \leq bc$.

d) Se $a > 1$ então $a^2 > a$.

e) Se $0 < a < 1$ então $a^2 < a$.

f) Se $0 \leq a < b$ e $0 \leq c < d$, então $ac < bd$.

g) Se $0 \leq a < b$ então $a^2 < b^2$.

h) Se $a, b > 0$ e $a^2 < b^2$ então $a < b$.

4 $\star$ Complementos sobre Conjuntos

4.1 Famílias de Conjuntos

4.1.1 Sobre índices

O uso de índices é bastante comum em matemática, pois proporciona um modo eficaz e econômico de descrever uma determinada coleção de objetos, sem exigir uma grande variedade de símbolos. Por exemplo, poderíamos descrever um elenco de 20 objetos usando letras distintas

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t$$

mas seria muito melhor denotá-los com uma única letra (digamos a) e 20 índices

$$a_1, a_2, ..., a_{20}.$$

A validade do uso de índices fica ainda mais evidente quando lidamos com conjuntos infinitos, como por exemplo uma sequência de números

$$x_1, x_2, ..., x_n, ...$$

Nesse caso, seria impossível usar letras ou qualquer outro conjunto finito de símbolos para descrever tal sequência.

Os dois exemplos acima podem ser expressos de um modo mais sintético. Para isso, considere os conjuntos $J = \{1, 2, ..., 20\}$ e $\mathbb{N}^*$. Então, podemos escrever:

$$\{a_\iota\}_{\iota \in J} = \{a_1, a_2, ..., a_{20}\}$$

e

$$\{x_\iota\}_{\iota\in\mathbb{N}^*} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$

Em outras palavras, se A é um conjunto cujos elementos queremos indexar com um certo conjunto de índices J, indicamos isso com a notação

$$A = \{a_\iota\}_{\iota\in J}.$$

Uma característica importante desse processo de indexação é a seguinte: o uso de índices pode ser descrito através da linguagem de funções. De fato, indexar os elementos de um conjunto A através de um conjunto de índices J significa, simplesmente, escolher uma função $f : J \to A$. Se quisermos indexar todos os elementos de A, a função f deve ser sobrejetora. Se quisermos que elementos distintos de A tenham índices distintos, então a função f deve ser injetora. Se quisermos ambas as propriedades, a função deve ser bijetora.

Observação. Note que, adotando o ponto de vista acima, fica claro que todo conjunto pode ser usado, potencialmente, como um conjunto de índices. Para vermos um exemplo pouco usual de uso de índices, considere a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(z) = \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0 \\ -2z - 1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

Desse modo, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros está sendo usado para indexar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, i.e.

$$\mathbb{N} = \{n_\iota\}_{\iota \in \mathbb{Z}}$$

onde $n_\iota = f(\iota)$, para cada $\iota \in \mathbb{Z}$.

Exercício. Usando a indexação acima de $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}$, determine os elementos n_0, n_1, n_{-1}, n_2, n_{-2}.

4.1.2 Operações com famílias de conjuntos

Nesta seção, lidaremos com *famílias (ou classes) de conjuntos*, isto é, conjuntos cujos elementos são, por sua vez, também conjuntos. Queremos estender a essa situação algumas operações entre conjuntos, assim como descrever algumas propriedades.

Seja dada uma família $\mathcal{F}$ de conjuntos, i.e.

$$\mathcal{F} = \{A_\iota\}_{\iota \in J}$$

onde J é um qualquer conjunto de índices e cada A_ι é um conjunto. A **união** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *ao menos um* dos conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcup_{\imath \in J} A_\imath = \{x \mid x \in A_\jmath \text{ para algum } \jmath \in J\}$$

A **intersecção** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *todos* os conjuntos de $\mathcal{F}$, i.e.

$$\bigcap_{\imath \in J} A_\imath = \{x \mid x \in A_\jmath \text{ para todo } \jmath \in J\}$$

Dentre as propriedades mais importantes, destacamos as seguintes: dada uma família $\mathcal{F} = \{A_\imath\}_{\imath \in J}$ de conjuntos e dado um conjunto qualquer B, tem-se:

$$B \cap \left(\bigcup_{\iota \in J} A_\iota \right) = \bigcup_{\iota \in J} (B \cap A_\iota)$$

$$B \cup \left(\bigcap_{\iota \in J} A_\iota \right) = \bigcap_{\iota \in J} (B \cup A_\iota)$$

Além disso, se $\mathbb{U}$ é um conjunto que contém todos os conjuntos A_ι, então, tomando o complementar relativamente a $\mathbb{U}$, tem-se:

$$(\bigcup_{\iota \in J} A_\iota)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{\iota \in J} A_\iota^{\mathrm{c}}$$

$$\left(\bigcap_{\iota \in J} A_\iota\right)^c = \bigcup_{\iota \in J} A_\iota^c$$

Complemento.
A título de contemplar os mais curiosos, citamos aqui outra operação que pode ser estendida a qualquer família de conjuntos: o produto cartesiano. Tal operação vai muito além do que qualquer curso de cálculo exige, podendo ser sumariamente ignorada pelos mais "pragmáticos". Aos que não resistem à beleza do pensamento abstrato, boa leitura.

Como primeiro passo, vejamos como definir o produto cartesiano de uma quantidade qualquer (mas finita) de conjuntos. Dados n conjuntos não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é o conjunto dos elementos na forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onde para cada $1 \leq \imath \leq n$ tem-se que $x_\imath \in A_\imath$. Em símbolos:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_\imath \in A_\imath, 1 \leq \imath \leq n\}.$$

Os elementos na forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são chamados de *n-upla ordenada* (que se lê "ênupla"ordenada).

Note-se que o produto cartesiano de n conjuntos é muito semelhante ao produto cartesiano de dois conjuntos, só diferindo, de fato, pelo número de conjuntos envolvidos.

Nosso propósito, agora, é contemplar famílias quaisquer de conjuntos, eventualmente infinitas. Para tanto, não é difícil perceber que a descrição acima não é adequada. Para chegar a um outro modo de tratar o produto cartesiano, pode ser útil revermos, sob outro olhar, o produto cartesiano que nos é já conhecido (vamos considerar o caso mais simples, com somente dois conjuntos). Dados dois conjuntos não vazios A_1 e A_2 (o uso de índices aqui é proposital), podemos identificar um par ordenado (x_1, x_2) do produto cartesiano $A_1 \times A_2$ com a função $f : \{1, 2\} \to (A_1 \cup A_2)$ dada por

$$f(1) = x_1 \quad \text{e} \quad f(2) = x_2$$

Pode parecer um modo exageradamente complicado para descrever um par ordenado e, se fosse esse o único objetivo dessa descrição, seria realmente algo despropositado. Mas essa linguagem apenas traduz a ideia de que um par ordenado nada mais é do que uma particular escolha, simultânea, de um elemento de um conjunto e um de outro. E cada função f como aquela acima descreve exatamente uma particular escolha desse tipo.

A vantagem dessa linguagem, porém, está no fato de permitir que se defina o produto cartesiano para uma família qualquer de conjuntos. De fato, seja dada uma família de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{A_\iota\}_{\iota \in J}$$

onde J é um qualquer conjunto de índices. O **produto cartesiano** dos conjuntos da família $\mathcal{F}$ é o conjunto das funções

$$f : J \to \bigcup_{\iota \in J} A_\iota$$

tais que $f(\jmath) \in A_\jmath$ para todo $\jmath \in J$. Em símbolos:

$$\prod_{\imath \in J} A_\imath = \{f : J \in \bigcup_{\imath \in J} A_\imath \mid f(\jmath) \in A_\jmath,\ \forall\ \jmath \in J\}.$$

5 Generalidades sobre Funções

5.1 Conceitos básicos

O termo *função* é usualmente associado à seguinte ideia: se duas quantidades (variáveis) x e y estão relacionadas de modo que, a cada valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra (implícita ou explícita), um valor a y, dizemos que y é função de

x. Esse enfoque é, em geral, suficiente para qualquer curso inicial de cálculo diferencial e integral em uma variável. Entretanto, tal ideia não compreende toda a abrangência que o conceito de função passou a ter a partir do desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos. Com esse arcabouço teórico à disposição, uma função, mais do que ser vista como uma relação entre variáveis, passou a ser vista como uma relação entre conjuntos.

Sob o ponto de vista matemático, mas ainda de modo informal, uma *relação* entre conjuntos é uma escolha do tipo: certos elementos de um dos conjuntos está relacionado com alguns elementos do outro. De modo mais preciso: uma **relação entre dois conjuntos** A **e** B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplo 5.1 Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$. Então

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

Tome $R = \{(1, x), (2, x), (2, y)\}$. O subconjunto R estabelece uma relação entre A e B, na qual:

- 1 está relacionado a x, pois $(1, x) \in R$

- 2 está relacionado a x, pois $(2, x) \in R$
- 2 está relacionado a y, pois $(2, y) \in R$
- Não há mais nenhuma outra relação entre elementos de A e B

$\square$

Note que cada escolha de um subconjunto de $A \times B$ determina uma relação diferente entre esses conjuntos.

Não é nosso interesse aprofundar o conceito de relação. Se o introduzimos aqui foi apenas para contextualizar adequadamente o conceito de função, já que esta é um caso particular de relação entre conjuntos. Temos, de fato, a seguinte definição:

Definição 5.2 *Dados dois conjuntos A e B, uma* ***função de A em B*** *é um subconjunto f de $A \times B$ (portanto, uma relação entre A e B) satisfazendo a seguinte propriedade:*

$$\text{para todo } x \in A, \text{ existe um único elemento } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in f.$$

Notação. Apesar de definir o conceito de função dentro do contexto mais geral de relação, a notação que adotaremos é aquela mais adequada às necessidades do cálculo diferencial e integral, além de ser mais familiar àqueles que se iniciam em tal estudo. Segundo a definição acima, uma função é caracterizada por uma terna de elementos (A, f, B), onde A e B são conjuntos e f é uma relação entre eles (satisfazendo as condições para ser função). Denota-se isso por

$$f : A \to B,$$

que se lê *f é uma função de A em B*. Se f relaciona um elemento $x \in A$ com um elemento $y \in B$ (i.e. se $(x, y) \in f$), tal relação é denotada por $f(x) = y$.

Exemplos 5.3

- $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$, dada por $f(1) = a$, $f(2) = a$, $f(3) = b$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$
- $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x + 1$
- $\phi : \{n \in \mathbb{N} | n > 1\} \to \mathbb{N}$, onde $\phi(n)$ denota o número de inteiros positivos menores que n que são co-primos com n.

Nos exemplos acima, temos alguns comportamentos diferentes que valem a pena serem observados. No primeiro exemplo, os valores da função são explicitados, um a um. Nos demais, isso não seria possível, uma vez que precisaríamos, para isso, de uma lista infinita de valores. Nos três exemplos intermediários, a função é descrita a partir de uma expressão algébrica, enquanto no último exemplo isso não seria possível. Neste, a função é descrita através do procedimento, por assim dizer, para determinar o valor da função para cada variável assumida. Por fim, note ainda que o terceiro e quarto exemplos parecem tratar da mesma função, uma vez que usam a mesma expressão algébrica, mas em cada um dos casos os conjuntos envolvidos são diferentes.

Antes de voltarmos nossa atenção ao contexto que mais nos interessa, vejamos um pouco de nomenclatura para funções. Para isso, tomemos uma função qualquer $f : A \to B$. O conjunto A é chamado de **domínio** de f e é denotado por $\operatorname{Dom} f$. Já o conjunto B é chamado de **contradomínio** (não há uma notação para o contradomínio). Dado um elemento x do domínio, então, pela própria definição de função, deve existir um elemento y do contradomínio tal que $y = f(x)$ (e esse elemento, lembre-se, é único). Dizemos, nesse caso, que y é *imagem* de x[1]. O conjunto

[1]Note que, embora o elemento x só possa ter uma única imagem, a sua imagem y pode também ser imagem de outros elementos do domínio.

de todas as imagens dos elementos do domínio, i.e. o conjunto dos elementos de B que estão relacionados a algum elemento de A, é chamado de **imagem** de f e denotado por $\operatorname{Im} f$, isto é

$$\operatorname{Im} f := \{y \in B \,|\, y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$$

que também pode ser descrito por

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Em outras palavras, para que um elemento y do contradomínio B pertença à imagem de f, ele deve ser imagem de algum elemento do domínio A, i.e. deve existir algum elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Outra situação de interesse ocorre quando se quer descrever a imagem de elementos de um *subconjunto* do domínio. Dado um subconjunto $X \subset A$, o conjunto de todas as imagens dos elementos de X é chamado de **imagem do conjunto X através da função** f e é denotado por $f(X)$. Assim:

$$f(X) := \{y \in B \,|\, y = f(a) \text{ para algum } a \in X\},$$

ou, alternativamente,

$$f(X) = \{f(a) \,|\, a \in X\}.$$

Note, em particular, que faz sentido falar em $f(A)$, uma vez que $A \subset A$. Nesse caso, apenas reencontramos a imagem de f, i.e. $f(A) = \operatorname{Im} f$.

Uma vez que a cada elemento do domínio A associamos a sua imagem em B, cabe a questão "recíproca": dado $y \in B$, qual o conjunto de elementos do domínio que têm y como imagem? Tal conjunto (que pode ser vazio) é chamado de *pré-imagem* de y. De modo mais geral, dado um subconjunto $Y \subset B$, definimos a **pré-imagem** de Y como sendo o conjunto que se obtém fazendo a união das pré-imagens dos elementos de Y. Tal conjunto é denotado por $f^{-1}(Y)$ e pode ser descrito por

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Com a notação acima, a pré-imagem de um elemento $y \in B$ pode ser expressa por

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}.$$

Observação. A notação usada acima, com o símbolo f^{-1}, é a mesma usada para o conceito de *função inversa* (que será visto mais adiante). Tal uso poderia gerar confusão entre esses diferentes conceitos, mas deve-se notar que o argumento entre parênteses, no caso em que a notação f^{-1} se refere a uma pré-imagem (caso acima), é um *conjunto*, enquanto que no caso dessa mesma notação ser usada para funções inversas, o argumento entre parênteses, como veremos, é um *elemento* do contradomínio.

Retomemos os exemplos acima. No que se refere ao domínio, contradomínio e imagem, temos:

Exemplos 5.4

- Dom $f = \{1, 2, 3\}$, Im $f = \{a, b\}$ e o contradomínio é $\{a, b\}$.

- Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

- Dom $f = \mathbb{R}$, Im $f = \mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

- Dom $f = [0, 1]$, Im $f = [1, 2]$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

- Dom $\phi = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n > 1\}$ e o contradomínio é $\mathbb{N}$. Sabe determinar Im ϕ? Se souber, publique!

Ainda considerando os exemplos acima, vejamos algumas pré-imagens:

Exemplos 5.5

- $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(\{b\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$
- $f^{-1}(\{3\}) = \{2\}$, $f^{-1}((-1, 5]) = (-2, 4]$, $f^{-1}([2, +\infty)) = [1, +\infty)$
- $f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$, $f^{-1}((-1, 5]) = [0, 1]$, $f^{-1}([2, +\infty)) = \{1\}$
- $\phi^{-1}(\{1\}) = \{2\}$, $\phi^{-1}(\{2\}) = \{3, 4, 6\}$ (sabe provar essas afirmações?)

Exercício. Seja dada uma função $f : A \to B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B, então:

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

2. $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

3. $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$

4. $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$

Para finalizar esta seção, vamos introduzir uma nomenclatura que pode ser útil em alguns contextos. Em alguns casos, duas funções podem diferir somente pelos seus domínios, sendo um deles um subconjunto do outro. Nesse caso, falamos em *restrição* ou em *extensão* de uma função. Mais especificamente:

- Se $f : A \to B$ é uma função e $C \subset A$, a função $g : C \to B$ dada por $g(x) = f(x)$ é chamada de **restrição de f a C**. Usualmente, denotamos a função g pelo símbolo $f_{|_C}$ (no qual a barra | designa a "restrição").

- Se $g : A \to B$ é uma função e $C \supset A$, uma função $f : C \to B$ para a qual valha $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$, é chamada de **extensão de g a C**.

Não há uma notação específica para uma extensão de uma função, até mesmo porque tal extensão não é em geral única. Entretanto, observe que vale a seguinte propriedade (onde supõe-se

$X \subset Y$):

$$f : Y \to Z \text{ é uma extensão de } g : X \to Z \text{ se, e somente se, }$$
$$g = f_{|X}.$$

5.2 Propriedades

Dada uma função $f : A \to B$, sabemos que cada elemento do domínio possui uma única imagem, mas tal imagem pode ser comum a mais elementos do domínio. Além disso, nem todos os elementos do contradomínio são imagem de algum elemento do domínio. Essas duas características têm uma certa relevância no estudo das funções, tanto que foram introduzidos os conceitos de *injetividade* e *sobrejetividade*.

Definição 5.6 *Uma função* $f : A \to B$ *é* ***injetora*** *se para qualquer par de elementos distintos do domínio, suas imagens são também distintas. Em outras palavras, uma função é injetora quando cada elemento da imagem da função é imagem de um único elemento do domínio.*

Apesar da definição acima ser suficientemente clara, não é, em geral, muito "operacional". Uma forma equivalente, mas mais operacional, de se caracterizar as funções injetoras é a seguinte:

Uma função $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, para todo par de elementos $u, v \in A$, vale:

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v.$$

Veremos mais adiante, em alguns exemplos, como usar a caracterização acima para provar que uma função é injetora. Antes, vejamos outro conceito:

Definição 5.7 *Uma função* $f : A \to B$ *é* ***sobrejetora*** *se a conjunto imagem* $\operatorname{Im} f$ *coincide com o contradomínio* B*, i.e., se todo elemento de* B *é imagem de algum elemento de* A*.*

Exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - x$. Tal função é sobrejetora, pois para todo número real y, existe um número real x tal que $x^3 - x = y$. De fato, o polinômio $x^3 - x - y$ (na variável x) sempre possui ao menos uma raiz real, uma vez que seu grau é ímpar. Por outro lado, f não é uma função injetora, já que $f(1) = f(0)$, i.e., dois elementos distintos do domínio possuem imagens iguais.

Exemplo. A função $g : [0, 1] \to [0, 2]$, dada por $g(x) = x^2$, não é sobrejetora, pois não existe nenhum número real $x \in [0, 1]$ cujo quadrado seja igual a 2. Na verdade, é fácil verificar que $\operatorname{Im} g = [0, 1]$, a qual está contida propriamente no contradomínio. Por outro lado, a função g é injetora. Para verificarmos isso, utilizaremos a última caracterização que demos das funções injetoras. A ideia é mostrar que se u e v são tais que $g(u) = g(v)$, então necessariamente deve ser $u = v$. Sejam então $u, v \in [0, 1]$ tais que $u^2 = v^2$. Dessa igualdade, segue que $u = \pm v$. Mas, tendo em mente que ambos são não negativos, deve necessariamente ser $u = v$.

Observação. Note, em ambos os exemplos, que a injetividade e a sobrejetividade de uma função não depende somente da relação algébrica explicitada. De fato, a função f poderia se tornar injetora se tomássemos como domínio, por exemplo, a semireta $[2, +\infty)$[2]. Por outro lado, a função g também poderia se tor-

[2]Esse tipo de estudo é fácil de se fazer com as ferramentas do cálculo diferencial. Nesse caso, inclusive, poderíamos ter escolhido uma semi-reta ainda maior, $[\sqrt{3}/3, +\infty)$, de modo a ter f injetora. Mas tal ferramenta não será desenvolvida neste curso.

nar sobrejetora se tomássemos como contradomínio o conjunto $[0, 1]$. Assim, qualquer discussão em torno da injetividade e/ou sobrejetividade de uma função deve levar em consideração também seu domínio e contradomínio, além, é claro, da relação entre eles.

Quando uma função $f : A \to B$ é injetora e sobrejetora simultaneamente, faz sentido dizer que cada elemento da imagem da função está relacionado a um único elemento do domínio. De fato, tal relação existe, graças à sobrejetividade, e é única, graças à injetividade. Em outras palavras, podemos *inverter* os papéis dos conjuntos A e B nessa relação. Nesse caso, falamos em *bijeção*:

Definição 5.8 *Uma função* $f : A \to B$ *é* ***bijetora*** *se é, simultaneamente, injetora e sobrejetora.*

Na esteira do que foi dito no parágrafo acima, dada uma função bijetora $f : A \to B$, definimos a **função inversa** $f^{-1} : B \to A$, através da seguinte relação:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Assim, nesse caso, se um elemento x de A está associado a um elemento y de B através da função f (que, lembre, estamos supondo bijetora), então o elemento y está associado ao elemento x pela função inversa f^{-1}.

Exemplo 5.9 Considere a função $f : [0, 1] \to [1, 3]$ dada por

$f(x) = 2x + 1$. Tal função é bijetora (verifique por exercício) e, portanto, possui inversa $f^{-1} : [1, 3] \to [0, 1]$. Para determinar a expressão de f^{-1}, usa-se a relação que a define, i.e.

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Assim, a partir de $y = 2x + 1$, devemos obter a expressão de x

em função de y (ou seja, $x = f^{-1}(y)$), o que se obtém facilmente isolando a variável x:

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1}{2}(y - 1)$$

$\square$

Observação. Mais adiante, ao falarmos em composição de funções, veremos com o conceito de função inversa está relacionado, em algum modo, à operação inversa de uma certa operação sobre funções (justamente, a operação de composição). Isso permitirá uma compreensão ainda melhor da relação entre uma função e sua inversa (quando esta existir, claro).

Exercícios

Ex. 5.1 — Dados os conjuntos $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, diga qual das relações abaixo definem uma função $f : A \to B$.

a) $R = \{(e, 1), (o, 2)\}$

b) $R = \{(a, 1), (e, 1), (i, 1), (o, 2), (u, 2)\}$

c) $R = \{(a, 1), (e, 2), (i, 3), (o, 4), (u, 5)\}$

d) $R = \{(a, 1), (e, 1), (e, 2), (i, 1), (u, 2), (u, 5)\}$

e) $R = \{(a, 3), (e, 3), (i, 3), (o, 3), (u, 3)\}$

f) $R = \{(a, 1), (e, 3), (i, 3), (o, 2), (u, 2)\}$

g) $R = \{(a, 2), (e, 1), (i, 4), (o, 5), (u, 3)\}$

Ex. 5.2 — Para cada função que aparece no exercício acima, diga se é injetora, sobrejetora e/ou bijetora.

Ex. 5.3 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

Ex. 5.4 — Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$g(n) = f(n) + f(n + 1)$.

Ex. 5.5 — Seja A um conjunto (não vazio) com n elementos e seja B um conjunto qualquer. Mostre cada uma das seguintes afirmações:

a) Se existe uma função injetora $f : A \to B$, então B possui *pelo menos n* elementos.

b) Se existe uma função sobrejetora $f : A \to B$, então B possui *no máximo n* elementos.

c) Conclua, das afirmações acima, a seguinte propriedade: dois conjuntos finitos[3] possuem o mesmo número de elementos se, e somente se, existe uma função bijetora entre tais conjuntos.

Ex. 5.6 — Para cada uma das seguintes funções, prove ou dê contra-exemplos que elas são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras.

[3]Dizem-se finitos os conjuntos que possuem um número finito de elementos. Voltaremos a discutir essa definição mais adiante, com mais propriedade.

a) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

b) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $g : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \neq 7 \\ f(7) = 1 & \text{se } x = 7. \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(n) = n - |n|$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$.

g) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

h) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$.

j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x, x)$.

k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ f(x) = (x, |x|)$.

l) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x - |y|$.

m) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x, y^3)$.

Ex. 5.7 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = (-1)^n n.$$

Ex. 5.8 — Considerando a função f do exercício anterior, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n + 1)$.

Ex. 5.9 — Para cada uma das seguintes funções, calcule $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1$

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 1$.
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - |(x + 2)^2 - 1|$.
c) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$.
d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$.

Ex. 5.10 — Seja dada uma função $f : A \to B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B, mostre que:
a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

c) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

d) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

e) Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$.

f) Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

g) Se $V \subset W$ então $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$.

h) $X \subset f^{-1}(f(X))$.

i) Se f é injetora então $X = f^{-1}(f(X))$.

Para refletir: Hotel de Hilbert

Na exata junção das fronteiras dos estados de SP, RJ e MG, há um hotel diferente de todos os outros já vistos (e ainda por ver) pelo mundo. Trata-se do Hotel Hilbert, um hotel com nada mais, nada menos, do que infinitos aposentos! Um para cada número natural $0, 1, 2, \ldots$ (o quarto número 0, na verdade, é ocupado pela gerência do hotel). No último feriado de carnaval, o hotel estava totalmente ocupado por uma legião de turistas paulistas. Não havia uma vaga sequer disponível.

Quando a noite do sábado de carnaval já se transformava em madrugada, um solitário turista carioca, desesperado para fugir dos ares da Sapucaí, procurou por uma vaga no Hotel Hilbert. Quando se dirigiu ao gerente do hotel, ao contrário do que poderíamos esperar, ouviu como resposta: "Aguarde alguns minutinhos, já já providenciamos um quarto para o senhor". Como o gerente solucionou o problema?

Na terça-feira de carnaval, um imenso grupo de turistas mineiros chegou ao Hotel Hilbert. Quando dizemos "imenso", assim é: infinitos mineiros chegaram pleiteando (silenciosa e educadamente, como é costume lá pelas gerais) por acomodações em quartos individuais para aquela última noite de delírio e festa.

Ocorre que nenhum dos hóspedes paulistas - e tampouco o solitário hóspede carioca - haviam deixado o hotel. O gerente, mais uma vez e ainda mais satisfeito com a perspectiva de lucro carnavalesco, respondeu gentilmente aos seus novos clientes: "Por favor, aguardem somente um punhadinho de minutinhos e logo serão levados aos seus respectivos quartos". E agora, o que fez o gerente para acomodar tanta gente?

Ao cair da tarde da quarta-feira de cinzas, com o hotel novamente vazio (à exceção, claro, do quarto número 0 da gerência), o habilidoso gerente, feliz com seu pé-de-meia recheado, pensou, perplexo: "Mas afinal, em qual dia houve mais movimento de hóspedes? Qual grupo de turistas era maior? Será o grupo dos paulistas? Ou o grupo dos paulistas acrescido do solitário carioca? Provavelmente, deve ser o grupo de todos os turistas, paulistas, carioca e mineiros. Será?"A essa altura, porém, o cansaço por ter lidado tão brilhantemente com o infinito já tomava conta do pobre (no sentido figurado) gerente e este caiu no sono. Antes que ele acorde, alguém saberia desvendar seu dilema?

6 Funções Reais a Variáveis Reais

Após apresentarmos o conceito de função dentro do contexto mais geral das relações entre conjuntos, voltemos nossa atenção ao âmbito que nos interessa especificamente, qual seja, aquele das funções reais de uma variável real[1]. Com tal expressão, entendemos funções do tipo $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. De agora em diante, salvo menção em contrário, consideraremos somente funções desse tipo.

Recuperando a ideia de função como variação de uma quanti-

[1]A contextualização mais ampla que aqui foi feita não deve ser vista como mera nota cultural. Ao contrário, convém ter sempre em mente esse enfoque sobre as funções, pois permite uma compreensão geralmente mais satisfatória dos conceitos e questões pertinentes.

dade em dependência de outra, é comum adotar os termos *variável independente* e *variável dependente*. O primeiro se refere aos elementos do domínio de uma função, enquanto o segundo se refere às suas imagens. Assim, se vale uma relação do tipo $y = f(x)$, para alguma função $f : A \to B$ entre subconjuntos A e B de números reais, dizemos que x é a variável independente e y é a variável dependente.

Em geral, trabalharemos com funções expressas através de relações algébricas, como $f(x) = x^2$, $f(x) = x + 1$ etc. Tais expressões são também chamadas de *expressão analítica* da função considerada. A rigor, constitui somente uma parte da função (afinal, o domínio e o contradomínio também compõem o objeto matemático chamado "função"). Entretanto, é comum identificar a função com sua expressão analítica. E assim aqui também o faremos, desde que lembremos, sempre que necessário, do real significado do conceito "função".

Ao identificar uma função com sua expressão analítica, parece que perdemos a visão de função como um subconjunto do produto cartesiano entre domínio e contradomínio. Mas tal ideia é recuperada, em sua essência, através da noção de *gráfico* de uma função:

Definição 6.1 *Dados dois conjuntos A e B de números reais e dada uma função* $f : A \to B$*, o* ***gráfico*** *de* f*, aqui denotado por* $\mathrm{Graf}(f)$*, é o conjunto*

$$\mathrm{Graf}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$$

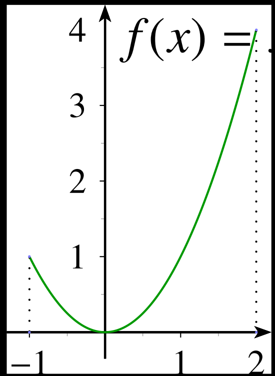
o qual também pode ser expresso por

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$$

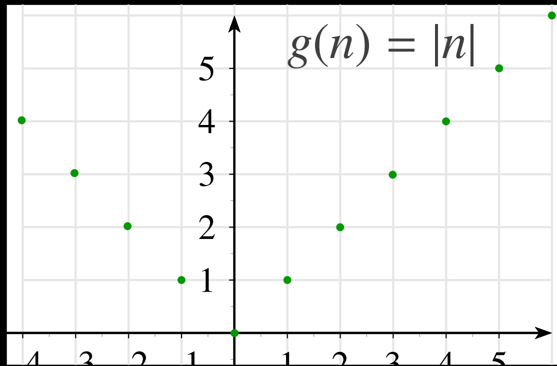
Note que o gráfico de uma função é um subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Se observarmos que $\mathrm{Graf}(f) \subset A \times B \subset \mathbb{R}^2$, percebemos como o gráfico de f representa a função f novamente como relação entre conjuntos.

Exemplos 6.2

- $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

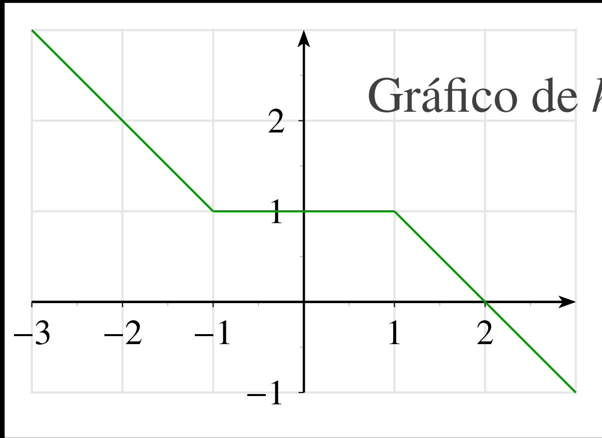


- $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = |n|$

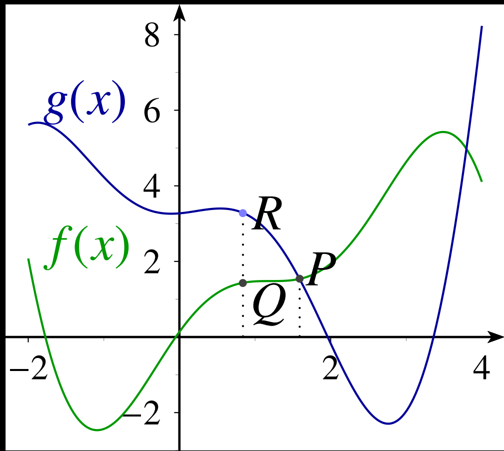


- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 & \text{se} \quad -1 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



Uma aplicação simples, mas útil, de gráficos é para compararmos duas funções (em um domínio comum). Representando os gráficos dessas funções em um mesmo plano cartesiano, podemos identificar (ao menos graficamente) os pontos do domínio nos quais as funções são iguais ou uma função supera a outra. Na figura abaixo, o ponto P de abscissa a é comum aos dois gráficos. Assim, as suas coordenadas escrevem-se como $(a, f(a))$, uma vez que P pertence ao gráfico de f, mas também como $(a, g(a))$, pois P pertence ao gráfico de g. Daí conclui-se que tanto $f(a)$ quanto $g(a)$ representam a ordenada do ponto P, ou seja, $f(a) = g(a)$. Por outro lado, se compararmos os pontos Q e R, ambos com abscissa b, percebemos que a ordenada de R é maior que a ordenada de Q. Como Q é um ponto do gráfico de f e R é um ponto do gráfico de g, concluímos que $f(b) < g(b)$.



8
6
4
2
−2
−2
2
4
g(x)
f(x)
R
P
Q

6.1 Transformações do gráfico de uma função

Gráficos são muito úteis para se analisar o comportamento e outras propriedades de uma função. Torna-se interessante, então, obter ferramentas que facilitem o esboço de um gráfico. É com esse intuito que trataremos agora de translações, homotetias, reflexões.

6.1.1 Translações

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e dada uma constante $c \in \mathbb{R}$, definamos duas funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacionadas com a função f da seguinte maneira:

$$g(x) := f(x) + c \qquad h(x) := f(x + c)$$

Qual a relação entre os gráficos das funções g e h com o da função f? Note-se que para calcular o valor de $g(x)$, calcula-se o valor de $f(x)$ e, *após*, soma-se a constante c. Ao contrário, para se calcular o valor de $h(x)$, soma-se *antes* a constante c (à abscissa x) e só então calcula-se o valor da função f no ponto $x + c$.

Assim, no primeiro caso, a constante c opera na ordenada do ponto do gráfico da função f, enquanto que no segundo caso, a constante c opera na abscissa do ponto do gráfico da f. Vejamos como essa diferença se reflete nos gráficos de g e h.

Os pontos do gráfico da função g têm coordenadas dadas por $(x, g(x))$, ou seja, $(x, f(x) + c)$. Assim, para obter um ponto do gráfico de g, basta tomar o ponto de mesma abscissa do gráfico de f e *transladar verticalmente* esse ponto por uma distância $|c|$ (para cima, se $c > 0$, para baixo, se $c < 0$). Conclui-se que o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f por uma **translação**

vertical correspondente a uma distância $|c|$ (para cima, se $c > 0$, para baixo, se $c < 0$).

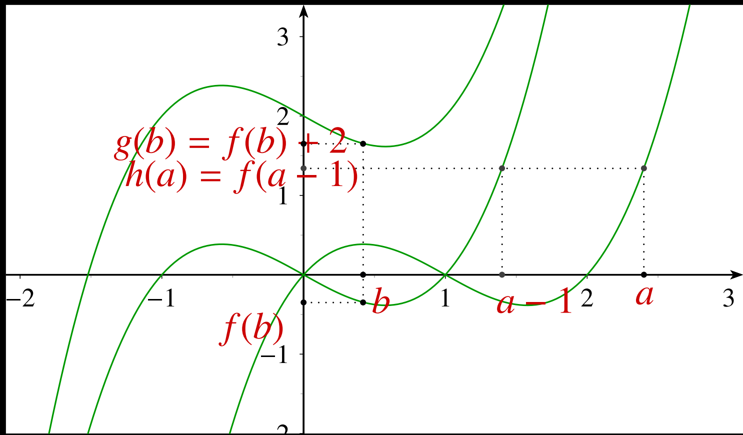
Já os pontos do gráfico da função h têm coordenadas $(x, h(x))$, i.e. $(x, f(x + c))$. Para obter o ponto do gráfico de h correspondente à abscissa x, basta tomar o ponto de abscissa $x + c$ do gráfico de f e *transladar horizontalmente* esse ponto por uma distância $|c|$ (para a esquerda, se $c > 0$, para a direita, se $c < 0$). Em outras palavras, o gráfico de h é obtido a partir do gráfico de f por uma **translação horizontal** correspondente a uma distância $|c|$ (para a esquerda, se $c > 0$, para a direita, se $c < 0$).

Exemplo 6.3 Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$.

Tomemos as funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$g(x) = x^3 - x + 2 \qquad h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = f(x-1)$$

- □ Os gráficos dessas funções estão representados abaixo:



Observação. Em um primeiro momento, pode parecer anti-intuitivo o deslocamento horizontal se dar para a esquerda, quando a constante é positiva, ou para a direita, quando é negativa. Entretanto, observando com um pouco mais de cuidado, pode-se entender o que está ocorrendo. Tomemos uma função $h(x) = f(x + c)$, com $c > 0$. Para marcar no gráfico de h o ponto de abscissa x, copia-se o ponto do gráfico de f com abscissa $x + c$, o qual está mais à direita de x. Assim, se o ponto do gráfico de f está mais á direita do seu correspondente no gráfico de h, este último estará mais à esquerda. Isso explica por que, nesse caso, o gráfico de h é um deslocamento à esquerda. Uma situação análoga ocorre quando $c < 0$, produzindo uma translação horizontal à direita.

Uma outra observação é importante, dessa vez a respeito dos domínios das funções. Se a partir de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, obtemos uma translação vertical $g(x) = f(x)+c$, o domínio de g é o mesmo de f. Mas se obtemos uma translação horizontal $h(x) = f(x+c)$, então o domínio de h deve também ser "deslocado", i.e.

$$\operatorname{Dom} h = \{x \in \mathbb{R} \mid x + c \in A\}$$

Exercício. Mostre que vale a relação abaixo:

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + \frac{4c - b^2}{4}$$

e conclua que toda parábola do tipo $y = x^2+bx+c$ pode ser obtida a partir da parábola $y = x^2$ através de uma translação horizontal, seguida de uma translação vertical.

6.1.2 Homotetias

Deixemos provisoriamente de lado o plano cartesiano para nos concentrar na reta real. Nesta, denotemos por O a origem e por U o ponto correspondente à unidade. Tomemos um ponto genérico P de abscissa x. Se $c \in \mathbb{R}$ é uma constante *positiva* fixada, onde se encontra o ponto P' de abscissa cx? Sem perda de generalidade, suponhamos que P esteja do lado direito de O, ou seja, suponhamos $x > 0$. Tendo em mente que, nesse caso, a abscissa de um ponto representa a distância ao ponto O, concluímos que o ponto P' encontra-se mais à direita de P, se $c > 1$, ou mais à esquerda, se $0 < c < 1$ (e também $P' = P$ se $c = 1$, mas esse caso não apresenta interesse). Além disso, se Q é um ponto de abscissa $y > 0$ e Q' tem abscissa cy, então vale a proporção

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = c$$

donde concluímos que: se $c > 1$, os segmentos da reta sofrem uma **dilatação**; se $0 < c < 1$, os segmentos da reta sofrem uma

contração. Em ambos os casos, falamos em **homotetia por um fator** c. Pode-se interpretar uma homotetia como sendo uma mudança homogênea de escala na reta real.

Queremos usar as homotetias nos eixos do plano cartesiano e observar o efeito dessas transformações no gráfico de uma função. Sejam dadas então uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante positiva c. Definamos as funções $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) := c\, f(x) \qquad h(x) := f(cx)$$

O valor da função g em x é o resultado de uma homotetia por um fator c sobre o valor da função f em x. Em termos dos gráficos dessas funções, a ordenada do ponto de abscissa x do gráfico de g é o resultado de uma homotetia por um fator c sobre a ordenada do ponto de abscissa x do gráfico de f. Dizemos, nesse caso, que o gráfico de g se obtém do gráfico de f por uma **homotetia vertical**.

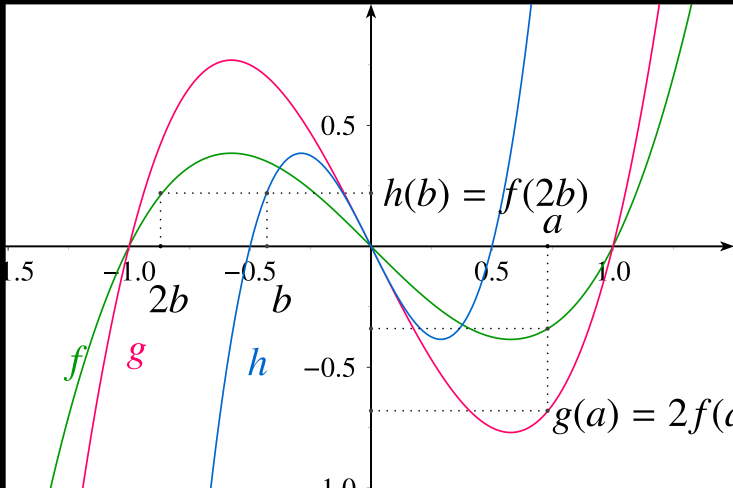
Já com relação à função h, a homotetia é aplicada antes do cálculo do valor de f. Em outras palavras, o valor da função h em x é obtido aplicando uma homotetia por um fator c à variável x para, em seguida, calcular o valor de f no ponto obtido. Em termos dos gráficos dessas funções, o ponto $(x, h(x))$ do gráfico de h é obtido copiando o valor da função f no ponto de abscissa cx, o qual é resultado de uma homotetia por um fator c aplicada a x. Dizemos, nesse caso, que o gráfico de h é obtido do gráfico de f por uma **homotetia horizontal**.

Exemplo 6.4 Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, defina as funções

$g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = 2f(x) = 2x^3 - 2x \qquad h(x) = f(2x) = 8x^3 - 2x$$

□ Os gráficos dessas funções estão representados abaixo:



Observação. Em ambos os casos, é usual adotar os termos *dilatação* (horizontal ou vertical) ou *contração* (horizontal ou vertical). Entretanto, similarmente ao que ocorre com a translação, as homotetias horizontal e vertical se comportam de modos diferentes. No caso das homotetias verticais, é imediato verificar que o gráfico da função $cf(x)$ é uma dilatação (vertical) do gráfico de f, se $c > 1$, ou uma contração (vertical) se $0 < c < 1$. No caso das homotetias horizontais, ocorre o oposto: o gráfico de uma função $f(cx)$ é uma contração (horizontal) se $c > 1$, ou uma dilatação (horizontal), se $0 < c < 1$ (verifique por exercício).

Exercício. Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ e dada uma constante positiva c, defina as funções $g(x) = c\,f(x)$ e $h(x) = f(cx)$. Qual é o domínio das funções g e h, se comparados ao domínio A de f?

6.1.3 Reflexões

As últimas transformações que queremos tratar são as reflexões relativas aos eixos coordenados. Dado um ponto P de coordenadas (x, y), dizemos que:

- O ponto de coordenadas $(x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo x.

- O ponto de coordenadas $(-x, y)$ é o ponto simétrico de P relativamente ao eixo y.
- O ponto de coordenadas $(-x, -y)$ é o ponto simétrico de P relativamente à origem O.

A **reflexão relativa ao eixo** x é a transformação que leva cada ponto do plano em seu simétrico relativamente ao eixo x. Similarmente, a **reflexão relativa ao eixo** y é a transformação que leva cada ponto do plano em seu simétrico relativamente ao eixo y. Se aplicarmos uma das reflexões acima, seguida da outra, obtemos uma **reflexão relativa à origem**, ou seja, uma transformação que leva cada ponto do plano em seu simétrico relativamente à origem.

Qual o efeito das reflexões no gráfico de uma função? Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tome um ponto $P = (x, f(x))$ do seu gráfico. Então, após uma reflexão relativa ao eixo x, o ponto P é levado ao ponto $(x, -f(x))$. Após uma reflexão relativa ao eixo y, o ponto P é levado ao ponto $(-x, f(x))$. Conclui-se que:

- Após uma reflexão relativa ao eixo x, o gráfico de f torna-se o gráfico da função $g(x) = -f(x)$.

- Após uma reflexão relativa ao eixo y, o gráfico de f torna-se o gráfico da função $h(x) = f(-x)$.

Exemplo 6.5 Dada a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, defina

$$g(x) = -f(x) = -x^2 + 3x - 2 \qquad h(x) = f(-x) = x^2 + 3x + 2$$

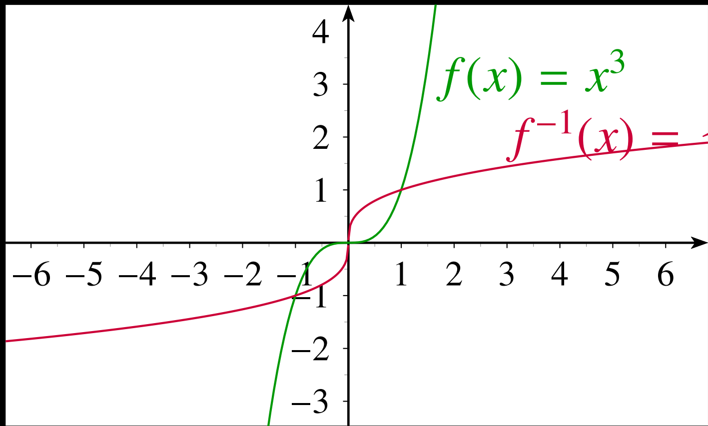
Os gráficos dessas funções estão representados abaixo: $\square$

Exercício. Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$, defina as funções $g(x) = -f(x)$ e $h(x) = f(-x)$. Qual é o domínio das funções g e h, se comparados ao domínio A de f?

6.2 Gráfico da função inversa

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora, i.e. uma função inversível. Qual a relação do gráfico de f^{-1} com o gráfico de f? Se um ponto (x, y) do plano está no gráfico de f é porque $y = f(x)$. Isso equivale a dizer que $x = f^{-1}(y)$. Logo, o ponto (y, x) está no gráfico de f^{-1}. Como os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos relativamente à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes, concluímos que os gráficos de f e f^{-1} também são simétricos relativamente à bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes. Em outras palavras, o gráfico de uma delas é obtido a partir do gráfico da outra, através de uma reflexão em relação à reta $x = y$.

Exemplo 6.6 A função $f(x) = x^3$ é injetora e sobrejetora, logo, inversível. O gráfico de f e o de f^{-1} estão representados abaixo:
□



$f(x) = x^3$
$f^{-1}(x) =$

6.3 Simetrias do gráfico de uma função

Quando o gráfico de uma função apresenta algum tipo de simetria, seu esboço torna-se uma tarefa mais simples. Para o que nos interessa, estudaremos dois casos de simetria: aquela relativa ao eixo y e aquela relativa à origem.

Dizemos que uma figura F do plano é simétrica em relação ao eixo y se vale a seguinte condição: para cada ponto P da figura, o ponto P' simétrico de P relativamente ao eixo y também pertence à figura. Outro modo de dizer o mesmo é: uma figura F é simétrica em relação ao eixo y se, ao fazermos um reflexão do plano relativamente ao eixo y, a figura resta invariada (dizemos, nesse caso, que tal figura é *invariante por reflexão relativa ao eixo* y).

Dizemos que uma figura F do plano é simétrica em relação à origem se vale a seguinte condição: para cada ponto P da figura, o ponto P' simétrico de P relativamente à origem também pertence à figura. Outro modo de dizer o mesmo é: uma figura F é simétrica em relação ao eixo y se, ao fazermos um reflexão do plano relativamente à origem, a figura resta invariada (dizemos, nesse caso, que tal figura é *invariante por reflexão relativa à origem*).

O gráfico de uma função f, sendo uma figura do plano, pode ser simétrico em relação ao eixo y, simétrico em relação à origem ou mesmo não possuir nenhum tipo de simetria. No primeiro caso, dizemos que a função f é **par**. No segundo, que f é **ímpar**.

Além dessa caracterização geométrica, há uma caracterização analítica das funções pares e ímpares. Tomemos inicialmente uma função f par. Como seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y, então para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f, o ponto de coordenadas $(-x, f(x))$ tem que pertencer também ao gráfico (uma vez que $(-x, f(x))$ é o simétrico de $(x, f(x))$ relativamente ao eixo y). Mas o ponto do gráfico de f correspondente ao valor $-x$ da abscissa é, por definição de gráfico, o ponto de coordenadas $(-x, f(-x))$. Como os pares de coordenadas $(-x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$ representam o mesmo ponto, suas coordenadas devem ser iguais. Logo, deve valer $f(-x) = f(x)$, para todo x no domínio da f. É imediato verificar, reciprocamente, que se $f(-x) = f(x)$, para todo x no domínio da f, então a função f é par (faça por exercício).

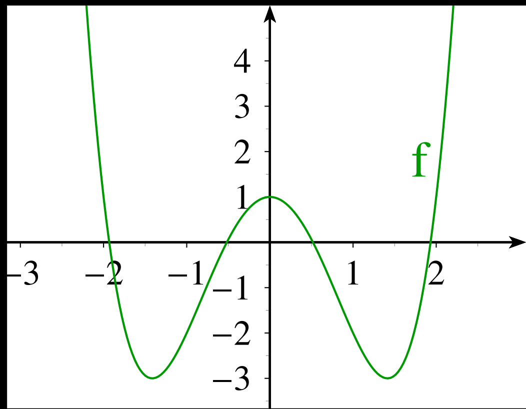
Seja agora dada uma função f ímpar. Sendo seu gráfico simétrico em relação à origem, então para cada ponto $(x, f(x))$ do gráfico de f, o ponto de coordenadas $(-x, -f(x))$ tem que pertencer também ao gráfico (uma vez que $(-x, -f(x))$ é o simétrico de $(x, f(x))$ relativamente à origem). Mas o ponto do gráfico de f correspondente ao valor $-x$ da abscissa é, por definição de gráfico, o ponto de coordenadas $(-x, f(-x))$. Como os pares de coordenadas $(-x, -f(x))$ e $(-x, -f(x))$ representam o mesmo ponto, suas coordenadas devem ser iguais. Logo, deve valer $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio da f. É imediato verificar, reciprocamente, que se $f(-x) = -f(x)$, para todo x no domínio da f, então a função f é ímpar (faça por exercício).

Em suma, temos a seguinte caracterização: dada uma função $f : A \to B$, então

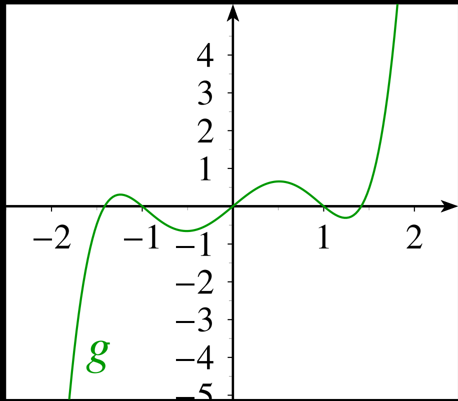
- f é *par* se, e somente se $f(-x) = f(x)$, para todo x em A;
- f é *ímpar* se, e somente se $f(-x) = -f(x)$, para todo x em A.

Exemplos 6.7

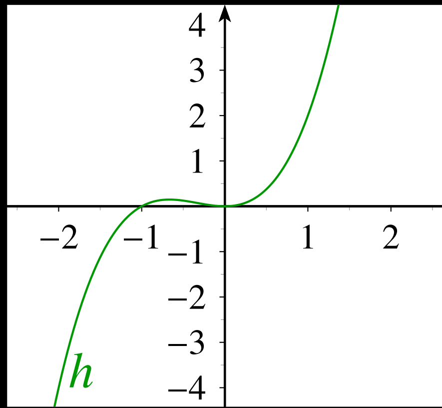
- A função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ é par.



- A função $g(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ é ímpar.



- A função $h(x) = x^3 + x^2$ não é nem par, nem ímpar.



Exercícios

1. Seria possível considerar gráficos simétricos em relação ao eixo x? Por que?

2. O que se pode dizer do domínio de uma função par ou ímpar?

3. Existe uma função que seja simultaneamente par e ímpar? Quantas funções desse tipo existem?

4. Dadas duas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defina as funções:

   a) $a(x) := f(x) + g(x)$

   b) $b(x) := f(x)g(x)$

   Discuta a paridade (isto é, se são pares, ímpares ou não possuem esse tipo de simetria) das funções a e b em termos da paridade das funções f e g.

5. Seja f uma função par e seja g uma função ímpar. Fixada uma constante $k \in \mathbb{R}$, discuta a paridade das funções abaixo:

   a) $r(x) := k\,f(x)$

   b) $s(x) := k\,g(x)$

   c) $t(x) := f(x) + k$

   d) $u(x) := g(x) + k$

   e) $v(x) := |f(x)|$

   f) $w(x) := |g(x)|$

6.3.1 Simetria translacional: funções periódicas

Quando se fala em simetria, é usual associá-la à ideia de reflexão. Mas o conceito de simetria é muito mais abrangente do que isso. Não entraremos no mérito específico desse conceito aqui, mas queremos lançar mão de um tipo de simetria que também contribui a facilitar a tarefa de traçar o esboço de um gráfico. Trata-se da simetria *translacional*: uma figura possui simetria translacional quando é possível transladá-la em uma certa direção, de modo a fazer com que essa figura transladada coincida com a figura original.

No caso de gráficos de funções, o que nos interessa destacar são as translações horizontais, i.e. paralelas ao eixo x. Se, ao transladar horizontalmente o gráfico de uma função, por uma distância positiva T, obtivermos o mesmo gráfico, então a função é dita *periódica*. Analiticamente, tal situação é expressa pela seguinte definição:

Definição 6.8 *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* ***periódica*** *se existe* *um número real positivo r tal que*

$$f(x + r) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Se f é uma função periódica, faz sentido considerar o conjunto dos números reais positivos r para os quais a condição da definição acima é satisfeita. Nesse caso, se f não é uma função constante, então tal conjunto possui um elemento mínimo, i.e. um número real positivo T tal que:

1. $f(x + T) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$

2. T é o menor dos números positivos que satisfazem a condi-

ção acima.

O número T é chamado de **período** da função f.

Os exemplos clássicos de funções periódicas são as funções trigonométricas. Deixaremos, porém, para tratá-las mais adiante, quando da seção dedicada a essas funções. Por ora, vejamos o seguinte exemplo: seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x - [\![x]\!]$$

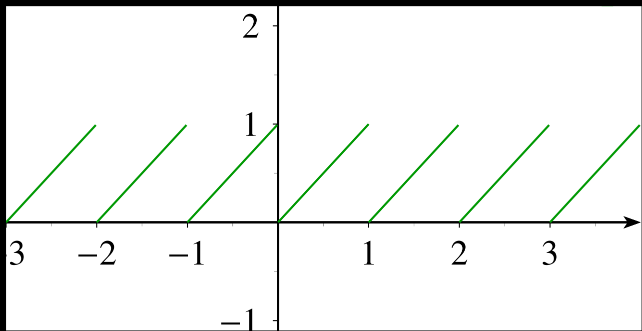
onde $[\![x]\!]$ denota a função *maior inteiro menor ou igual a* x, i.e.

$$[\![x]\!] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

A função f é periódica, pois para todo inteiro n, resulta

$$f(x+n) = (x+n) - [\![x+n]\!] = x+n-([\![x]\!]+n) = x - [\![x]\!] = f(x)$$

Em particular, f tem período $T = 1$. O gráfico de f está representado abaixo:



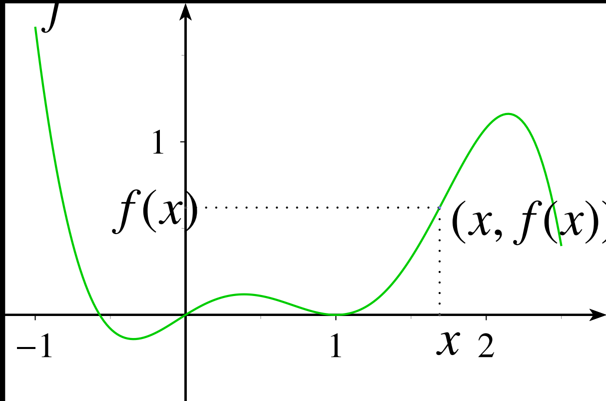


Figura 6.1: Gráfico de $f(x)$

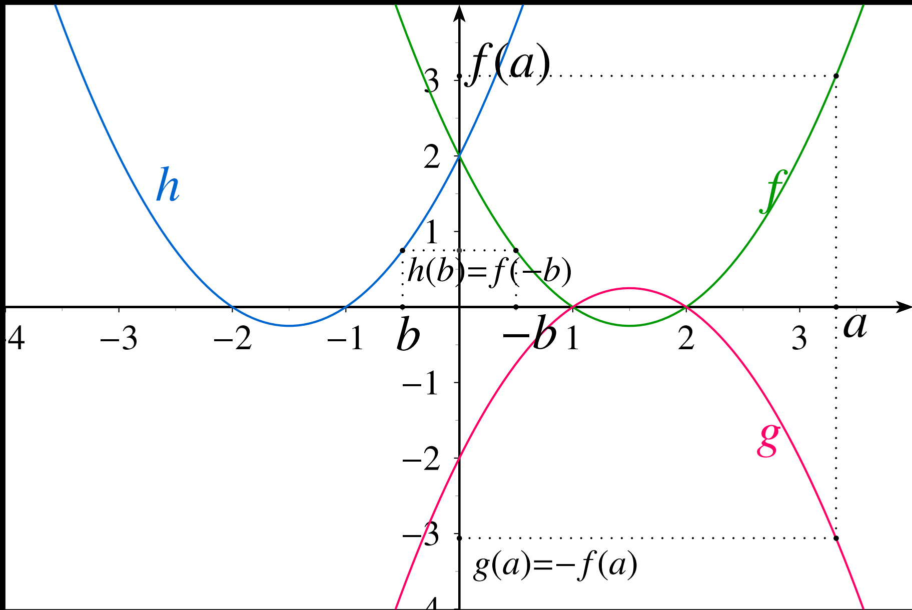


Figura 6.2: Gráficos das funções obtidas através de reflexões em relação aos eixos coordenados.

6.4 Exemplos clássicos de funções e seus gráficos - I

Nesta seção, apresentaremos os exemplos mais comuns de funções, a maioria delas usualmente desenvolvidas já no ensino médio. Além disso, apesar de não possuir todas as ferramentas adequadas para traçar os gráficos dessas funções, apresentaremos seus esboços, complementando, quando for o caso, com algumas informações e análises.

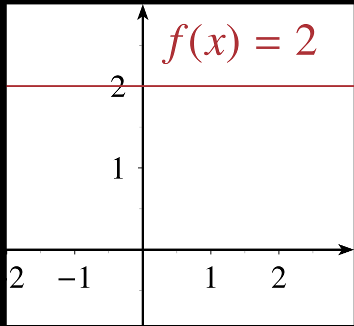


Figura 6.3: Gráfico da função constante $f(x) = 2$

6.4.1 Funções constantes

São funções do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = c$, onde c é uma constante arbitrária. O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, uma vez que todos os pontos do gráfico têm coordenadas do tipo (x, c).

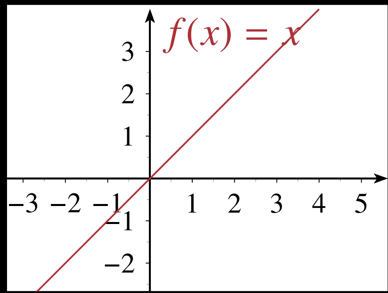


Figura 6.4: Gráfico da função identidade $f(x) = x$

6.4.2 Função Identidade

A função identidade é a função $\iota : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada simplesmente por $\iota(x) = x$. Mais adiante, quando falarmos em composição de funções, veremos que a função identidade desempenha o papel do elemento neutro dessa operação.

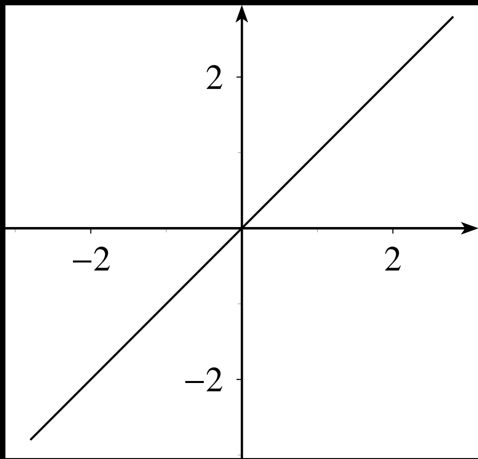


Figura 6.5: Gráfico da função identidade $f(x) = x$

6.4.3 Função módulo

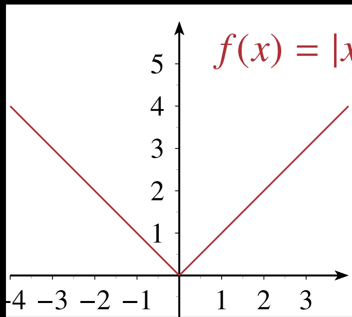
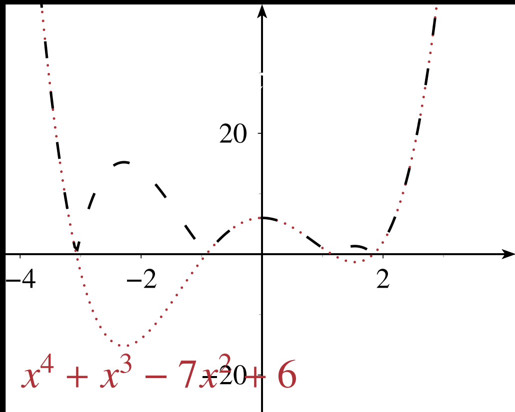


Figura 6.6: Gráfico da função módulo $f(x) = |x|$

Por uma lado, a função módulo é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Pela definição de módulo, temos que o gráfico de $|x|$ coincide com o da função identidade, quando $x \geq 0$. Já quando $x < 0$, o gráfico de $|x|$ coincide com o gráfico da função $-x$, i.e. com o oposto da função identidade.

Por outro lado, dada qualquer função $f : A \to B$, pode-se considerar a função $g : A \to B$ dada por $g(x) = |f(x)|$. O gráfico de g coincide com o de f quando esta é positiva. Já quando f é negativa, o gráfico de g é o seu reflexo relativo ao eixo x. Na figura abaixo, estão representados os gráficos das funções

$$f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 6 \text{ e } g(x) = |x^4 + x^3 - 7x^2 + 6|.$$

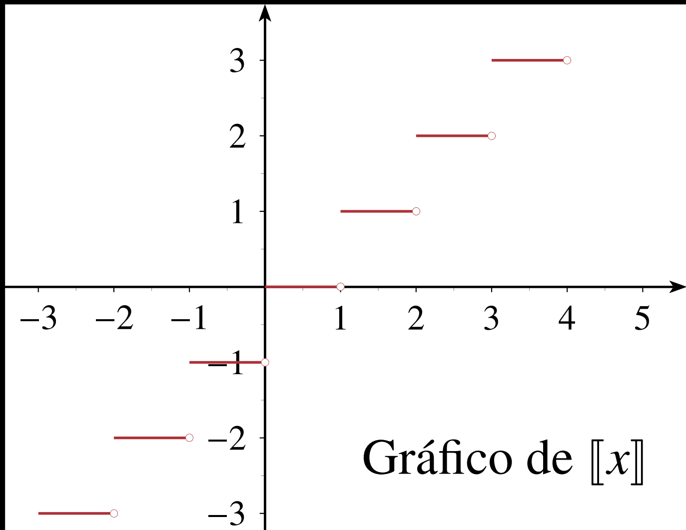


6.4.4 Funções do tipo escada

Considere a função *maior inteiro menor ou igual a* x, vista na seção anterior, i.e.

$$[\![x]\!] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Dado qualquer inteiro n, temos que $[\![n]\!] = n$. Além disso, para todo número real x, com $n \leq x < n+1$, tem-se que $[\![x]\!] = n$. Assim, o gráfico de $[\![x]\!]$ tem a aparência de uma escada:


3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3
Gráfico de ⟦x⟧

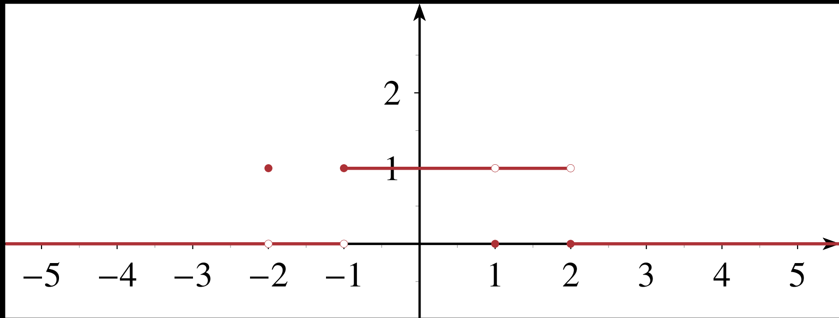
6.4.5 Funções características

Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ fixado, defina a função $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}$$

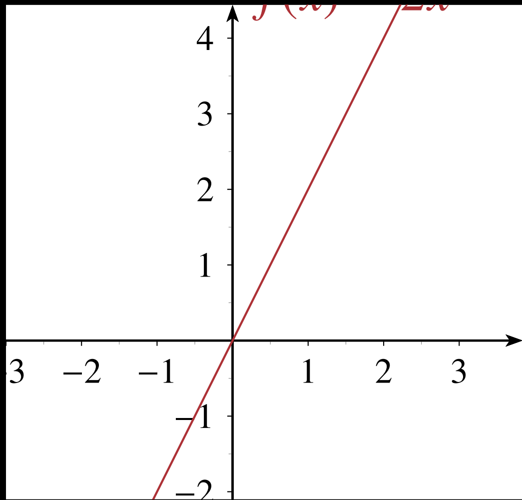
Tal função é chamada de *função característica* do conjunto A, uma vez que cumpre o papel de dizer quais elementos pertencem a A, quais não. Note que, para cada subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ há uma função característica diferente. A figura abaixo representa o gráfico da função característica do conjunto $A = \{-2\} \cup [-1, 1) \cup$

$(1, 2)$.



6.4.6 Funções lineares

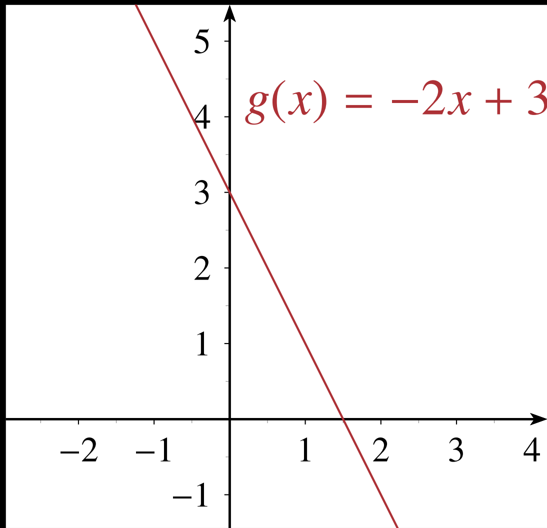
São funções do tipo $f(x) = ax$, onde a é uma constante. O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem. Abaixo, o gráfico de $f(x) = 2x$.



Note que também entram nessa categoria a função identidade e a função constante $f(x) = 0$.

6.4.7 Funções afins

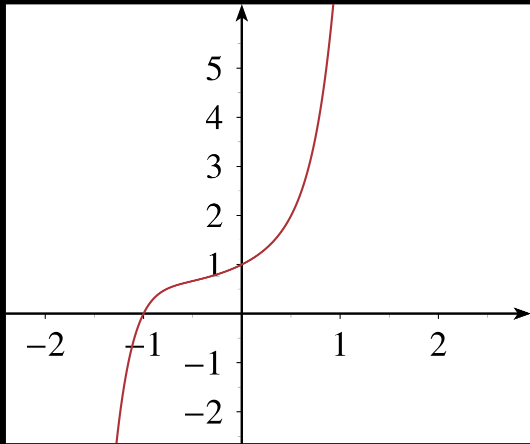
Semelhantes às funções lineares, as funções afins são funções do tipo $f(x) = ax + b$, onde a, b são constantes. O gráfico de uma função afim também é um reta, embora não necessariamente passante pela origem. Abaixo, o gráfico da função $f(x) = -2x + 3$.



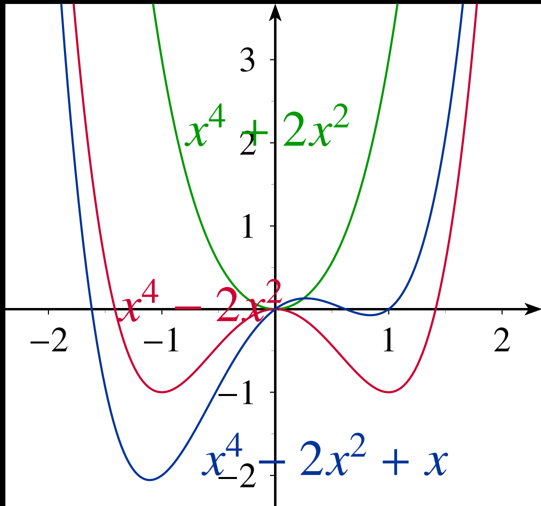
Note que as funções lineares e as funções constantes são casos particulares de funções afins.

6.4.8 Funções polinomiais

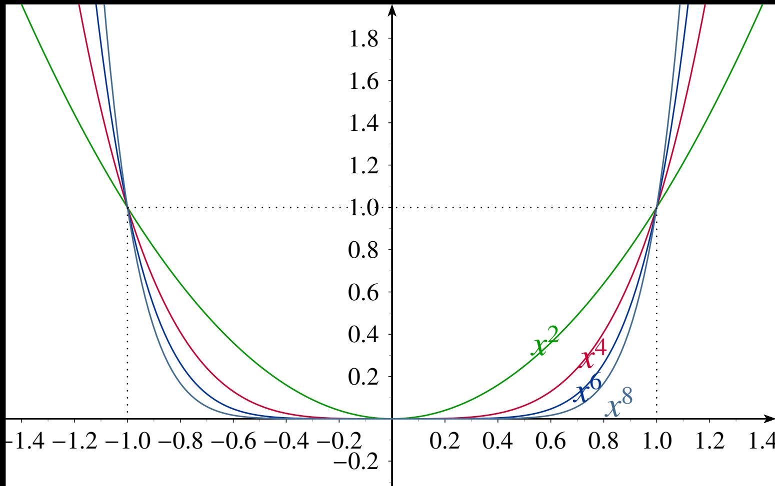
Uma categoria que engloba as funções afins é aquela das funções polinomiais, ou seja, funções cujo expressão analítica é dada por um polinômio. No caso das funções afins, tal polinômio é de primeiro grau. As funções polinomiais podem ter qualquer grau. Na figura abaixo, está representado o gráfico da função polinomial $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

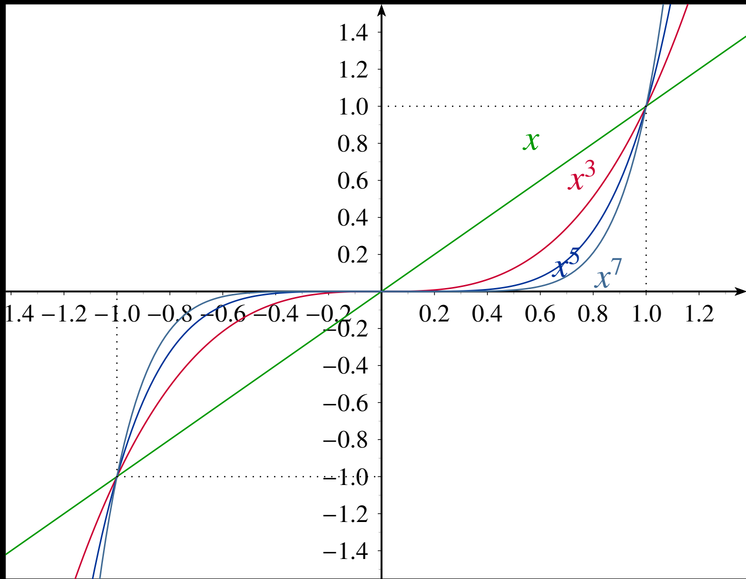

5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
−1
−2

riáveis em suas formas globais. Veja-se, por exemplo, as funções polinomiais abaixo, todas de quarto grau, e seus gráficos:



Entretanto, para o esboço de gráficos de funções polinomiais quaisquer pode ser útil conhecer o comportamento das funções polinomiais em sua forma mais simples, a saber, $f(x) = x^n$. Nas figuras abaixo estão representados os gráficos das funções x^n nos casos em que n é par e em que n é ímpar.


x^2
x^4
x^6
x^8
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−1.4 −1.2 −1.0 −0.8 −0.6 −0.4 −0.2
0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4



1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
−1.2
−1.4
1.4 −1.2 −1.0 −0.8 −0.6 −0.4 −0.2
0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2
x
x3
x5
x7

6.4.9 Funções racionais

São funções do tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios[2]. O domínio de uma função racional depende da eventual existência de raízes reais do denominador. Assim, na expressão acima, se ζ_q denota o conjunto

---

[2] Se o grau de $q(x)$ é zero, então a função f é, na verdade, uma função polinomial. Os casos mais interessantes, portanto, se dão quando $q(x)$ tem grau positivo.

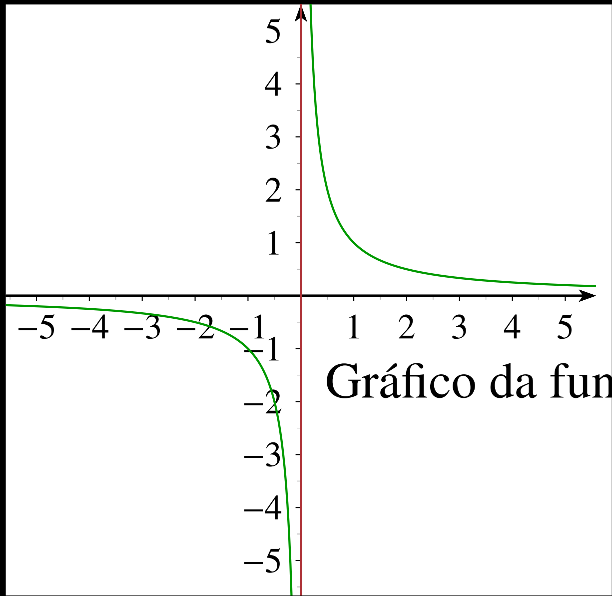
das raízes reais de $q(x)$ (eventualmente, esse conjunto pode ser vazio), então

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \backslash \zeta_q.$$

Alguns exemplos de funções racionais são

$$\frac{x^2 - x + 3}{x^4 + x^3 - 2x - 1}, \qquad \frac{3}{x^2}, \qquad \frac{5x^5 - 3x^3 + x}{x^4}$$

O gráfico de uma função racional pode variar muito em sua forma global. Entretanto, um comportamento bastante recorrente das funções racionais pode ser observado no exemplo abaixo:


5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5
Gráfico da fun

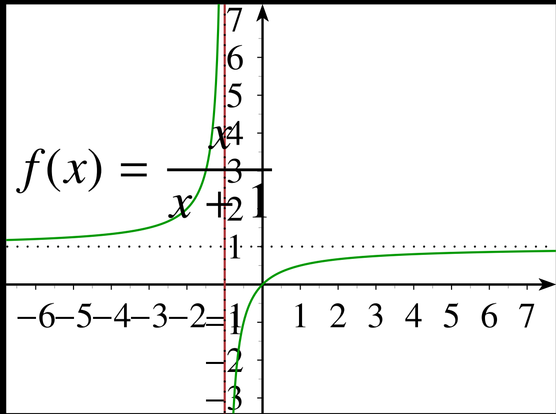
gem e assíntotas nos eixos coordenados. Mas o que é importante destacar é o comportamento do gráfico de $1/x$ para valores da abscissa próximos a $x = 0$, assim como para valores "muito grandes" ou "muito pequenos" de x. O que queremos dizer com isso?

Por enquanto, faremos uma análise somente intuitiva, deixando o formalismo para a seção que trataremos de limites de funções. Observando o gráfico de $1/x$, percebe-se que este se aproxima do eixo y conforme o valor da abscissa se aproxima de 0. Aproximando-se de 0 pela direita (isto é, com valores positivos de x), o valor da função tende a crescer indefinidamente. Aproximando-se pela esquerda (isto é, com valores negativos de x), o valor da função tende a decrescer ilimitadamente. Por outro lado, percebe-se também que quando x cresce indefinidamente, o valor da função tende a se aproximar de 0, por valores positivos. Similarmente, quando x decresce indefinidamente, o valor da função também tende a se aproximar de 0, dessa vez por valores negativos.

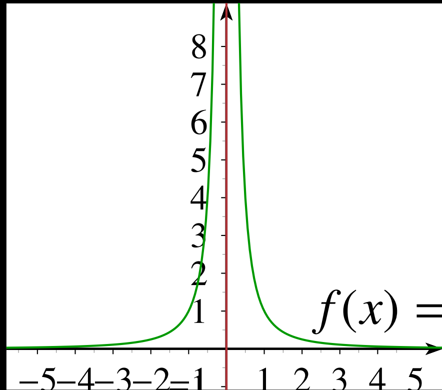
Os comportamentos descritos acima, chamados de *assintóticos*, são comuns em funções racionais. Retas verticais que "aproximam" o gráfico de uma função são chamadas de *assíntotas verticais* (como a reta $x = 0$ no exemplo anterior). Retas horizontais que "aproximam"o gráfico de uma função são chamadas de *assíntotas horizontais* (como a reta $y = 0$ no exemplo acima). Eventualmente, podem existir também assíntotas oblíquas (i.e. nem verticais, nem horizontais).

Exemplos 6.9

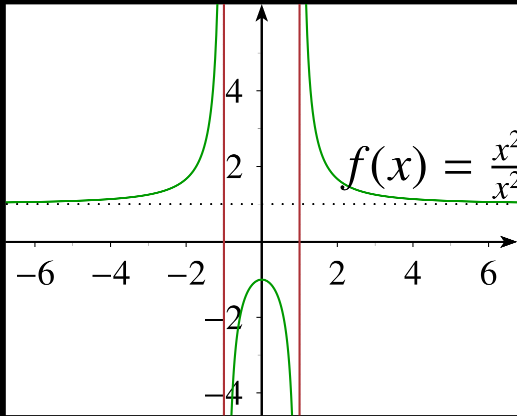
- $f(x) = \frac{x}{x+1}$



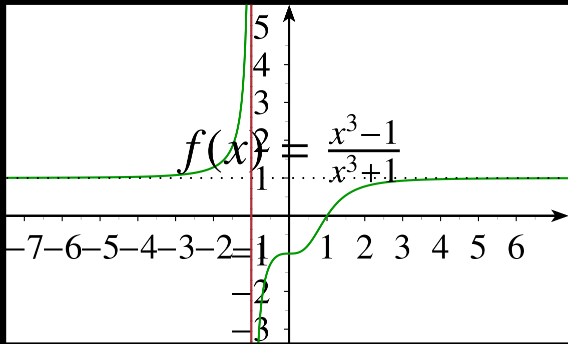
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$



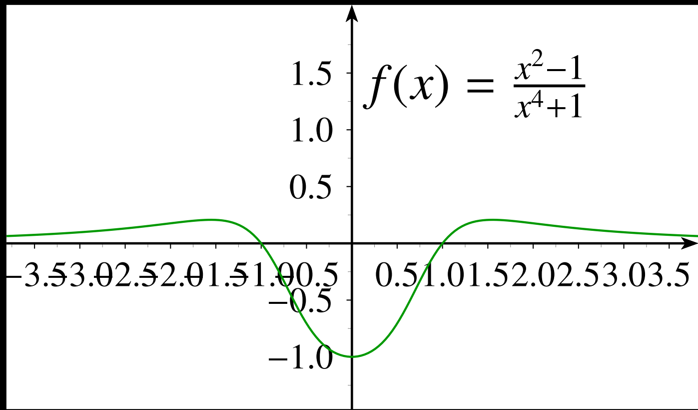
- $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$



- $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$



- $f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$


$f(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$
1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−3.5 3.0 2.5 2.0 1.5 1.0 0.5
0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5

6.5 Funções monótonas

Antes de continuarmos a ver exemplos clássicos de funções, dediquemos nossa atenção ao comportamento de uma função no que concerne ao seu crescimento e/ou decrescimento, isto é, o estudo do (de)crescimento da variável dependente, conforme cresce a variável independente. Temos as seguintes definições:

Definição 6.10 *Dada uma função f e dado um subconjunto $A \subset \mathrm{Dom}\, f$, dizemos que:*

- f *é* **crescente** *em* A *se, para todo* $a, b \in A$ *com* $a < b$, *resulta* $f(a) < f(b)$.

- f *é* **não-decrescente** *em* A *se, para todo* $a, b \in A$ *com* $a < b$, *resulta* $f(a) \leq f(b)$.

- f *é* **decrescente** *em* A *se, para todo* $a, b \in A$ *com* $a < b$, *resulta* $f(a) > f(b)$.

- f *é* **não-crescente** *em* A *se, para todo* $a, b \in A$ *com* $a < b$, *resulta* $f(a) \geq f(b)$.

Em qualquer um dos casos acima, dizemos que a função é **mo-**

nótona[3]. Em particular, quando a função é crescente ou decrescente, dizemos que é **estritamente monótona**.

Exemplos 6.11

- A função identidade é crescente em $\mathbb{R}$.
- A função x^2 é decrescente em $\mathbb{R}_-$ e crescente em $\mathbb{R}_+$.
- A função $[\![x]\!]$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$. A mesma função é crescente em $\mathbb{Z}$.

---

[3]É também usual na literatura o termo *monotônica*.

Exercício. Determine os intervalos nos quais a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ é monótona, dizendo o tipo de monotonia. É possível dizer que f é monótona em todo o seu domínio?

Exercício. Mostre que uma função estritamente monótona é injetora.

6.6 Exemplos clássicos de funções e seus gráficos - II

6.6.1 Funções exponenciais

Fixado um número real positivo a, sabemos o significado da expressão a^x quando x é um número real qualquer. Para isso, partimos da idéia de potência inteira e, com a ajuda do conceito de supremo, estendemos a operação de potência para expoentes racionais e, em seguida, expoentes reais. Assim, faz sentido estudar a variação da expressão a^x em termos do expoente.

Definição 6.12 *Fixado* $a \in \mathbb{R}$, *com* $0 < a \neq 1$, *a* ***função exponencial de base*** a *é a função* $f(x) = a^x$.

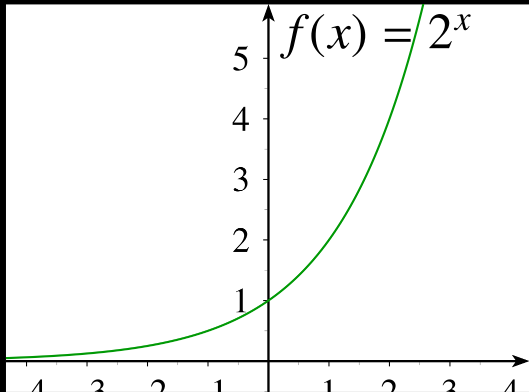
Das propriedades vistas para a operação de exponenciação, sabemos que $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso, pode-se mostrar que todo número real positivo y pode ser escrito como a^x, para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo, o conjunto imagem da exponencial (em qualquer base) é $(0, +\infty)$.

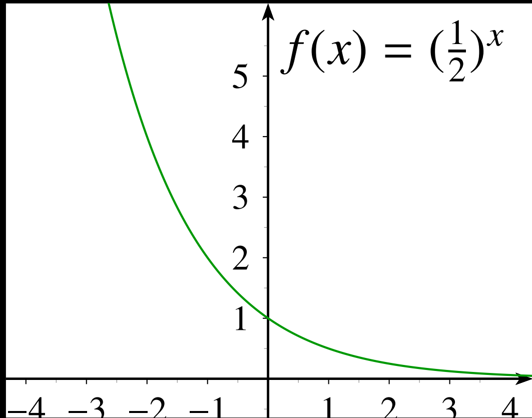
Ainda pelas propriedades da exponenciação, sabemos que:

- Se $a > 1$, então para todo $x' < x''$, resulta $a^{x'} < a^{x''}$.

- Se $0 < a < 1$, então para todo $x' < x''$, resulta $a^{x'} > a^{x''}$.

Desse modo, a função exponencial de base a é crescente, se $a > 1$, e decrescente, se $0 < a < 1$. Os gráficos das funções exponencias têm sempre a forma apresentada abaixo:


$f(x) = 2^x$
5
4
3
2
1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4



$f(x) = (\frac{1}{2})^x$
5
4
3
2
1
−4 −3 −2 −1
1 2 3 4

os gráficos de a^x e a^{-x}.

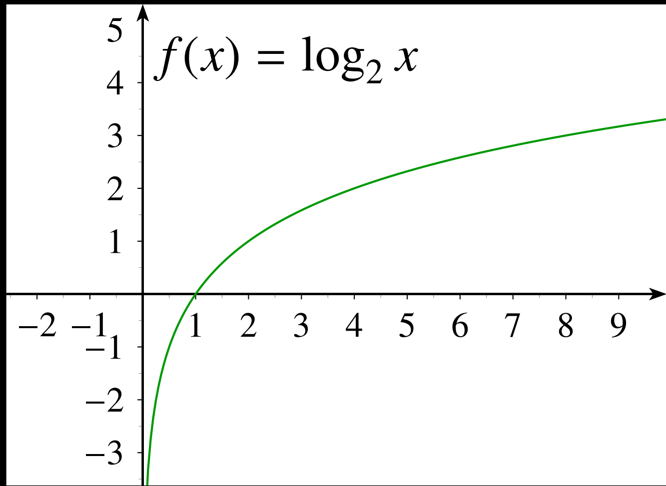
6.6.2 Funções logarítmicas

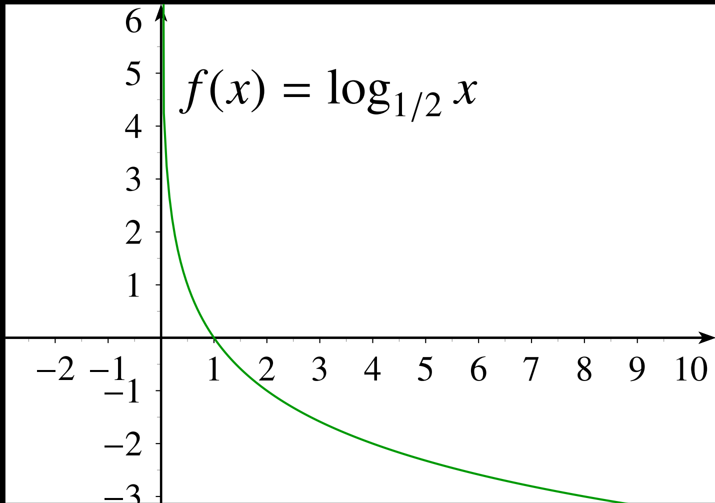
Fixada uma base a, vimos acima que a função exponencial de base a é estritamente monótona. Logo, é injetora. Assim, a função $a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é bijetora e podemos falar em sua inversa.

Definição 6.13 *Fixado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1$, a* ***função logarítmica de base*** *a é a função $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada* *pela regra*

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

O gráfico da função $\log_a$ é obtido a partir do gráfico da exponencial de base a, através da reflexão relativa à reta $x = y$. Dependendo do valor da base, obtemos os dois gráficos típicos abaixo:


$f(x) = \log_2 x$
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9


$f(x) = \log_{1/2} x$
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

$\log_a 1 = 0$. Isso significa que, quando $a > 1$, a função $\log_a$ é negativa em $(0, 1)$ e positiva em $(1, +\infty)$. Quando $0 < a \neq 1$, a função $\log_a$ é positiva em $(0, 1)$ e negativa em $(1, +\infty)$.

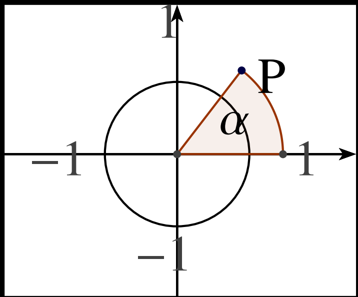
Relacionadas às propriedades da exponenciação, temos as seguintes propriedades dos logaritmos:

1. $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a x^y = y \log_a x$
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

6.6.3 Funções trigonométricas

Para falar em funções trigonométricas, precisamos, antes, relacionar os números reais com medidas de ângulos. Ângulos são objetos geométricos definidos a partir de semi-retas com origem comum. Para associar a cada número real um ângulo geométrico, comecemos tomando, no plano cartesiano, a circunferência de raio 1 centrada na origem. Se tomarmos um ângulo α com vértice na origem e uma das semi-retas coincidindo com o semi-eixo positivo das abscissas, a outra semi-reta encontrará a circunferência em um ponto P (veja Figura ???



Se A denota o ponto de encontro da circunferência com o semi-eixo positivo das abscissas, então o ângulo α determina o arco AP na circunferência (descrito, a partir de A, no sentido anti-horário). O comprimento desse arco nos dá a medida em *radianos* do ângulo α. Como o comprimento da circunferência unitária é 2π, esse procedimento estabelece uma relação entre ângulos geométricos e números reais do intervalo $[0, 2\pi)$. Reciprocamente, para cada número real $x \in [0, 2\pi)$, se tomarmos, a partir do ponto A e seguindo no sentido anti-horário, o ponto P que determina um arco de comprimento x, a semi-reta OP forma, com o semi-eixo positivo das abscissas, um ângulo geométrico de comprimento x radianos. Assim, a relação entre ângulos e números do intervalo $[0, 2\pi)$ é bijetora. Queremos estender essa relação a todos os números reais (evidentemente de maneira não bijetora), associando a cada um deles um ângulo geométrico ou, o que dá no mesmo (na interpretação acima), um ponto da circunferência unitária. Para isso, basta permitir que o ponto P "dê voltas"na circunferência. O que significa isso?

Inicialmente, tomemos números reais não-negativos. Dado $x \in \mathbb{R}_+$, seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - 2k\pi \in [0, 2\pi)$ (note que sempre existirá tal inteiro k). O número $x' = x - 2k\pi$ determina um ponto P na circunferência unitária, pelo procedimento descrito acima[4]. Por extensão, associamos a x o mesmo ponto P da circunferência. Desse modo, podemos interpretar x como sendo a medida do arco que percorremos a partir de A, dando k voltas na circun-

[4]O número real x' é chamado de *determinação principal* de x.

ferência, e seguindo até P.

Para o caso dos números negativos, na verdade, pode-se seguir exatamente o mesmo procedimento do parágrafo anterior: dado $x < 0$, tomar $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $x' := x - 2k\pi \in [0, 2\pi)$ e associar a x o mesmo ponto P associado a x'. A diferença com o caso anterior está na interpretação: se $x < 0$, então $|x|$ é a medida do arco que percorremos a partir de A, em *sentido horário*, dando $(k - 1)$ voltas na circunferência, e seguindo até P.

Uma vez estabelecida a relação entre números reais e ângulos geométricos, queremos estender as noções de *seno* e *cosseno*, já conhecidas quando aplicadas a ângulos, para números reais. A idéia é simples, baseada na seguinte observação (fácil de ser verificada): se um ponto P da circunferência unitária tem coordenadas (a, b), então o ângulo α associado ao ponto P é tal que $\operatorname{sen}\alpha = b$ e $\cos\alpha = a$.

Definição 6.14 *Dado um número real x, seja $P = (a, b)$ o ponto da circunferência unitária associado a x. Definimos en-*

tão as funções $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por:*

$$\operatorname{sen} x = b \quad \text{e} \quad \cos x = a$$

Lembrando que a equação da circunferência unitária é $x^2+y^2 = 1$ e observando que para todo número real x o ponto de coordenadas $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ está na circunferência unitária, reobtemos a relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Outras propriedades das funções seno e cosseno são apresentadas abaixo, sem demonstração:

1. $\operatorname{Im} \operatorname{sen} = [-1, 1]$

2. $\operatorname{Im} \cos = [-1, 1]$

3. $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$

4. $\cos(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$

5. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

6. $\cos(-x) = \cos(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

7. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \, \cos y \pm \operatorname{sen} y \, \cos x$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

8. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

Das duas últimas propriedades acima, temos que

$$\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$$

e

$$\operatorname{sen} x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

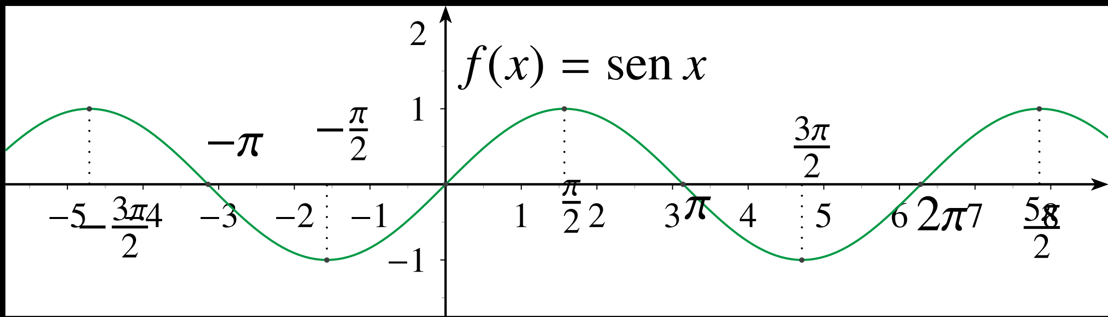
Disso segue que o gráfico da função cosseno pode ser obtido a partir do gráfico da função seno, através de uma translação horizontal para a esquerda (por uma distância $\pi/2$) ou, o que dá no mesmo, que o gráfico da função seno é obtido a partir daquele do cosseno por uma translação à direita (por uma distância $\pi/2$). Também observamos que a função seno é ímpar, enquanto a função cosseno é par.

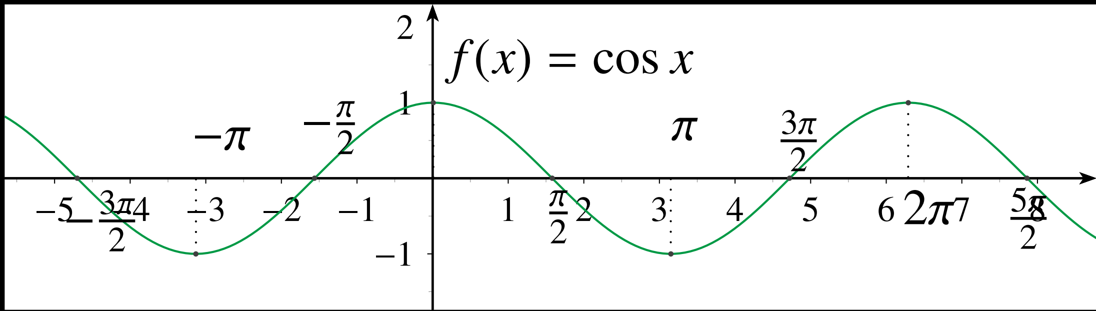
Ainda das propriedades acima, concluímos que as funções seno e cosseno são *periódicas de período* 2π (veja exercício abaixo). Assim, para traçar os gráficos dessas funções, basta estudar um intervalo de medida 2π, por exemplo, o intervalo $[0, 2\pi]$. Nesse intervalo, temos:

- A função $\operatorname{sen} x$ é crescente em $[0, \pi/2]$ e em $[3\pi/2, 2\pi]$ e é decrescente em $[\pi/2, 3\pi/2]$.

- A função $\cos x$ é decrescente em $[0, \pi]$ e é crescente em $[\pi, 2\pi]$.

Os gráficos das funções seno e cosseno são apresentados abaixo:





1. Usando a propriedade 7 acima, mostre que se $a \in \mathbb{R}$ é uma constante para a qual vale

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

então a é um múltiplo inteiro de 2π. Conclua, que a função seno é periódica de período 2π.

2. Seria possível chegar a essa conclusão a partir da propriedade 3 acima, somente?

3. Usando a relação entre os gráficos de seno e cosseno, conclua que a função cosseno também é periódica de período 2π.

As funções tangente e secante

A partir das funções seno e cosseno, definimos as funções

Tangente: $\tan x := \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Secante: $\sec x := \frac{1}{\cos x}$

Ambas as funções estão definidas no domínio $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. A função secante tem a mesma periodicidade da função cosseno, mas a tangente tem período π, uma vez que

$$\tan(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

A função secante, assim como a função cosseno, é par. Já a função tangente, sendo quociente de uma função ímpar e uma par, é uma função ímpar. Com relação à monotonia, a função secante tem o mesmo comportamento da função cosseno (verifique por exercício). Para estudar o comportamento da função tangente, é suficiente tomar um intervalo de medida π, por exemplo, o intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Dados $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, com $x < y$, temos que $0 < y - x < \pi$, logo

$$\operatorname{sen}(y - x) > 0$$

Temos então que

$$\operatorname{sen} y \cos x - \operatorname{sen} x \cos y > 0$$

ou

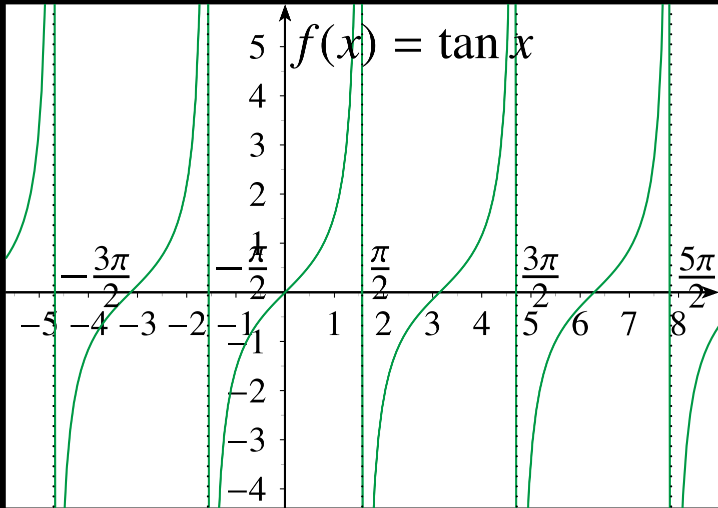
$$\operatorname{sen} y \cos x > \operatorname{sen} x \cos y$$

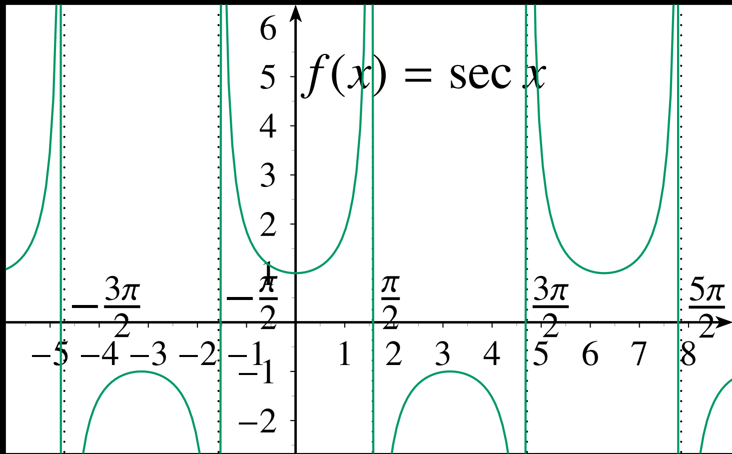
Como a função cosseno é positiva em tal intervalo, obtemos

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}$$

então que a função tangente é crescente no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Os gráficos das funções tangente e secante estão representados abaixo:


f(x) = tan x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7 8
−3π/2
−π/2
π/2
3π/2
5π/2


$f(x) = \sec x$
6
5
4
3
2
1
−1
−2
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$
−5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8

ção fundamental entre seno e cosseno:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

As funções cotangente e cossecante

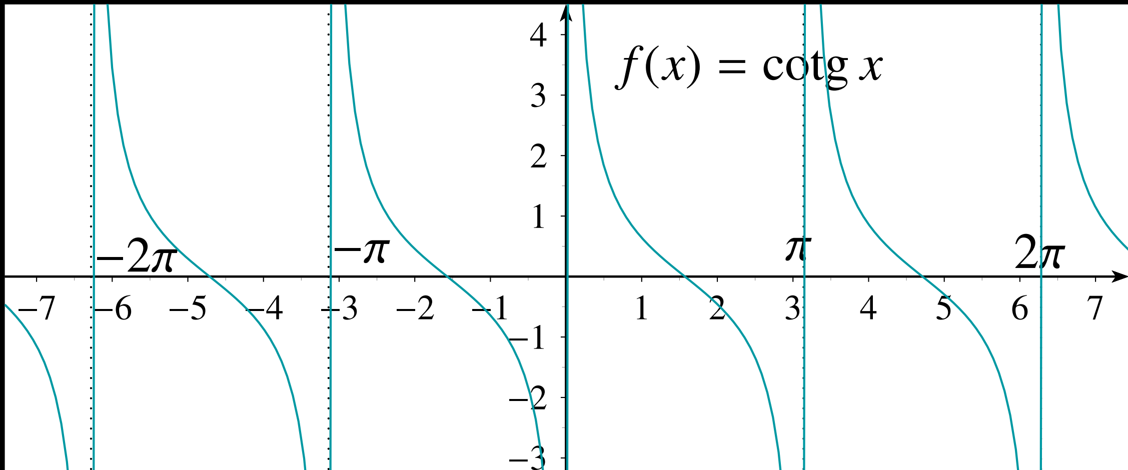
A partir das funções seno e cosseno, definimos as funções

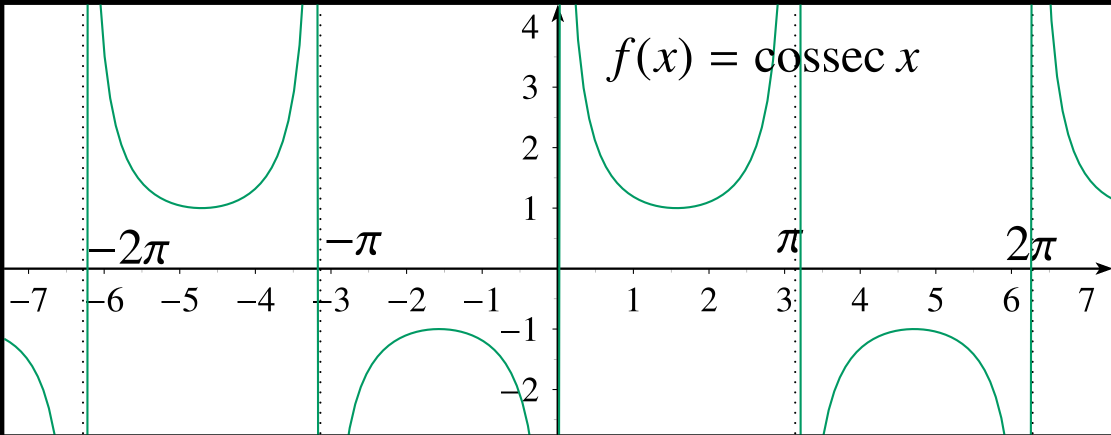
otangente: $\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

ossecante: $\operatorname{cossec} x := \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

Ambas as funções estão definidas no domínio $\mathbb{R} \backslash \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$. A função cossecante tem a mesma periodicidade da função seno, mas a cotangente tem período π (verifique por exercício).

Deixamos como exercício o estudo da paridade e da monotonia dessas funções. Limitamo-nos, aqui, a apresentar os seus gráficos:


$f(x) = \text{cotg}\, x$
-2π
$-\pi$
π
2π
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7
4 3 2 1 −1 −2 −3


$f(x) = \operatorname{cossec} x$
-2π
$-\pi$
π
2π
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7
4 3 2 1 −1 −2

6.6.4 Funções trigonométricas inversas

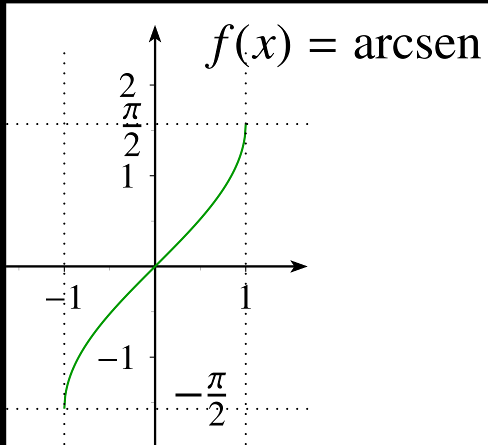
As funções trigonométricas definidas acima não são bijetoras em seus domínios. Entretanto, é possível falar em suas inversas, desde que tomemos domínios restritos. Apresentamos abaixo, sem maiores detalhes, as funções trigonométricas restritas a domínios nos quais são bijetoras e as respectivas funções inversas. Acompanham os respectivos gráficos.

Função arco seno

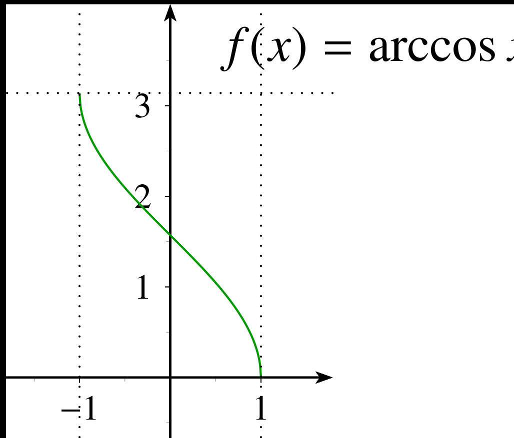
A função $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ tem por inversa a função

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{arcsen}\, y = x \Leftrightarrow \text{sen}\, x = y$$


$f(x) = \arcsen$
2
$\frac{\pi}{2}$
1
-1
1
-1
$-\frac{\pi}{2}$

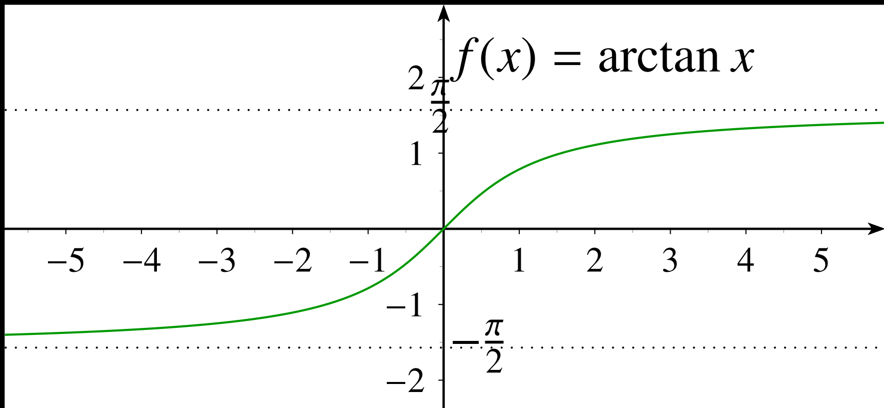
$$\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$$



A função $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ tem por inversa a função

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y$$

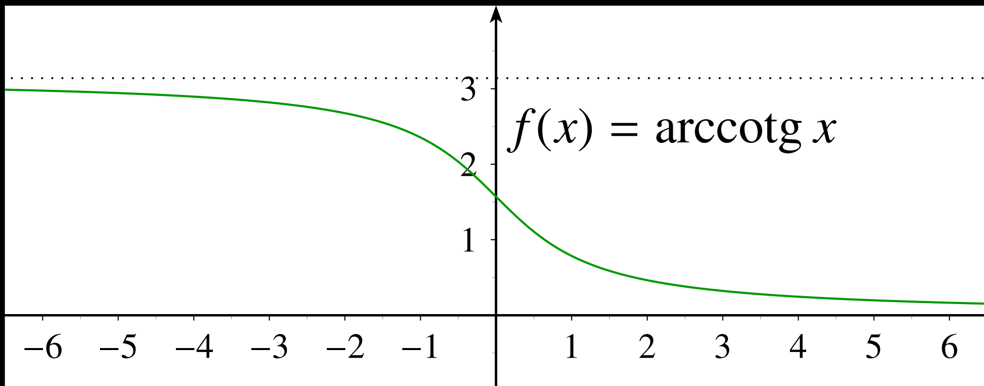


Função arco cotangente

A função $\operatorname{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ tem por inversa a função

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

$$\operatorname{arccotg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{cotg} x = y$$

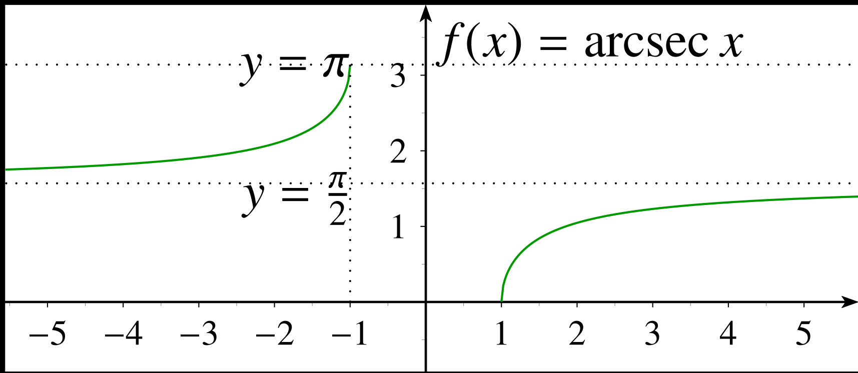


Função arco secante

A função $\sec : [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ tem por inversa a função

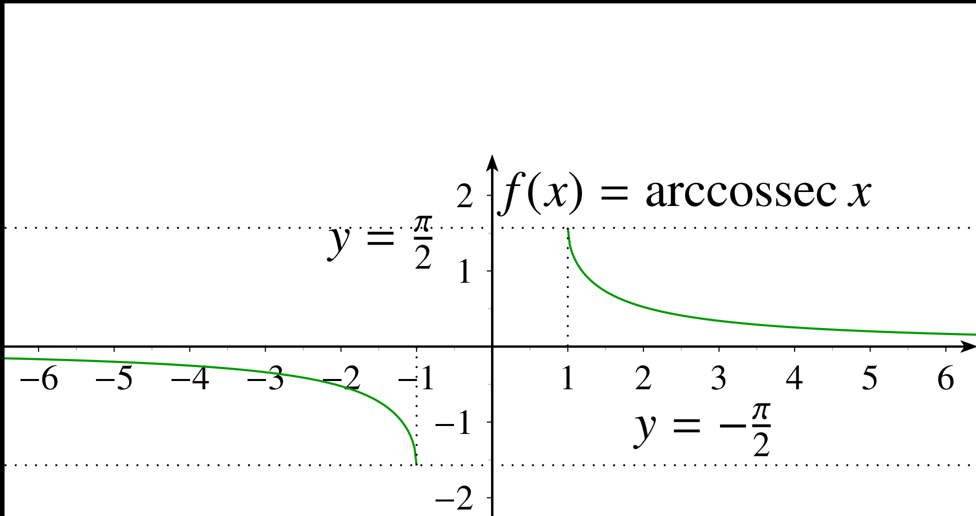
$$\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\operatorname{arcsec} y = x \Leftrightarrow \sec x = y$$



$f(x) = \operatorname{arcsec} x$
$y = \pi$
$y = \frac{\pi}{2}$
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5

$$\operatorname{arccossec} y = x \Leftrightarrow \operatorname{cossec} x = y$$



Exercício. Mostre que valem as seguintes propriedades:

1. $\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$

2. $\operatorname{arccossec} x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x}$

3. $\operatorname{arccotg} x = \arctan \frac{1}{x}$, para todo $x > 0$

4. $\operatorname{arccotg} x = \pi + \arctan \frac{1}{x}$, para todo $x < 0$

5. $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$

6. $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

7. $\sec(\arctan x) = \sqrt{1 + x^2}$

6.7 Operações com funções

O formalismo que apresentaremos a seguir tem muitos propósitos, mas para nosso escopo, um deles é preponderante: obter um modo de expressar uma dada função em termos de funções mais elementares (em algum sentido), de modo a estudar propriedades da função original a partir das mesmas propriedades nas funções elementares que a compõem.

Sejam dadas duas funções reais a uma variável real f e g. Definimos as funções:

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) := f(x) - g(x)$
- $(f\,g)(x) := f(x)\,g(x)$
- $(\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$

Os domínios das funções acima dependem, evidentemente, dos domínios das funções f e g, mas podem depender também da operação envolvida. De fato, a função f/g definida acima só faz sentido se o quociente $f(x)/g(x)$ também fizer sentido, o que só ocorre quando $g(x) \neq 0$. Temos, então:

- $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$
- $\mathrm{Dom}(f-g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$
- $\mathrm{Dom}(f\,g) = \mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g$
- $\mathrm{Dom}(\frac{f}{g}) = (\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}^*\, g)$, onde $\mathrm{Dom}^*\, g = \{x \in \mathrm{Dom}\, g \mid g(x) \neq 0\}$

Exemplo. Toda função polinomial pode ser obtida a partir da função identidade $\iota(x) = x$ e das funções constantes $f(x) = c$, através de operações como aquelas acima. De fato, usando produto de funções com a função ι, obtemos todas as funções do tipo $f(x) = x^n$. Novamente usando o produto de funções entre as funções constantes e as funções do tipo x^n, obtemos todos os possíveis monômios. Por fim, usando a soma de funções com os monômios, obtemos toda e qualquer função polinomial. Assim, todas as propriedades que valem para as funções constantes e para a função identidade, e que são preservadas pelas operações acima descritas, valerão automaticamente para todas as funções polinomiais. Um exemplo típico, é a continuidade, conceito que veremos mais adiante e de fundamental importância para o cálculo.

Exercício. Determinar condições sobre os domínios de f e g de modo a poder definir a função $(f^g)(x) := f(x)^{g(x)}$

Função composta

Dentre as operações entre funções, uma das mais importantes é, sem dúvida, a *composição*. Dadas duas funções f e g, definimos as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ por

$$(f \circ g)(x) := f\,(g(x)) \qquad \text{e} \qquad (g \circ f)(x) := g\,(f(x))$$

Em outras palavras, para calcular o valor da função $f \circ g$ em um ponto x do domínio, deve-se calcular o valor $g(x)$ e, após, calcular o valor de f correspondente ao valor $g(x)$ da variável. Procedimento semelhante deve ser feito para a composta $g \circ f$.

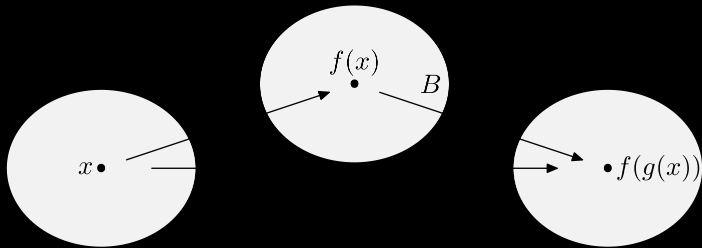


Figura 6.7: Função Composta

Exemplo. Seja $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Então

$$(f \circ g)(x) = 2^{\operatorname{sen} x}$$

Note que, para calcular o valor de $f \circ g$ em $x = \pi$, devemos antes calcular $g(\pi)$, i.e $\operatorname{sen} \pi$, o que retorna o valor 0. Em seguida, calculamos f em $x = g(\pi)$, i.e. em $x = 0$, obtendo $2^0 = 1$.

O domínio de uma função composta também depende do domínio das funções envolvidas. Para determinar o domínio de $f \circ g$, devemos ter em mente o procedimento acima descrito, ou seja, que o cálculo de $(f \circ g)(x)$ se faz em duas etapas: (i) cálculo de $g(x)$; (ii) cálculo de $f(g(x))$. Temos então que:

- Para efetuar a primeira etapa, deve valer $x \in \operatorname{Dom} g$.
- Para a segunda etapa, deve valer $g(x) \in \operatorname{Dom} f$.

Assim, obtemos que

$$\operatorname{Dom}(f \circ g) = \{x \in \operatorname{Dom} g \mid g(x) \in \operatorname{Dom} f\}$$

Exemplos 6.15

- Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, então $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ e:
  - $\operatorname{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = |x|$

- $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}_+$ e $(g \circ f)(x) = x$

- Se $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$, então $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Dom}\, g = (-\infty, 1]$ e:
  - $\mathrm{Dom}(f \circ g) = (-\infty, 1)$ e $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
  - $\mathrm{Dom}(g \circ f) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ e $(g \circ f)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

Exercícios

Ex. 6.1 — Dadas as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \pi [\![x]\!]$, determine os domínios e as imagens das funções compostas $f \circ g$ e

$g \circ f$.

Ex. 6.2 — Denotando por ι a função identidade, mostre que para toda função f vale que:

a) $\iota \circ f = f$ e $f \circ \iota = f$

b) Se f é inversível, então $f \circ f^{-1} = \iota$ e $f^{-1} \circ f = \iota$
Em tempo, isso significa que a função identidade cumpre o papel de *elemento neutro* da operação de composição de funções.

Ex. 6.3 — Para as funções abaixo encontre $f(x+2)$, $f(-x)$, $f(x+h)$ e $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, sendo $h \neq 0$:

a) x

b) $3x+4$

c) x^2

d) $5x^2+1$

e) x^2-x

f) x^3+x^2

Ex. 6.4 —

a) Como o gráfico de $f(|x|)$ está relacionado como o gráfico de $f(x)$?

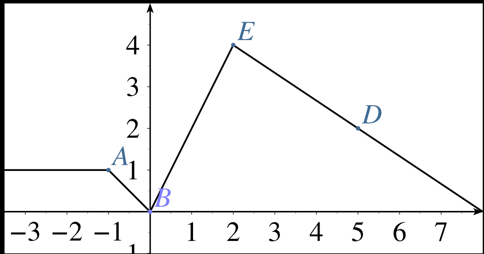
b) Esboce o gráfico de $|x|^3$.

c) Esboce o gráfico de $-|x|^5$.

d) Esboce o gráfico de $\operatorname{sen}(|x|)$

e) Esboce o gráfico de $\cos(|x|)$

Ex. 6.5 — Encontre uma expressão para a função cujo gráfico é a curva abaixo:



Ex. 6.6 — Para cada par de funções $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, determine os domínios máximo de definição de $f(x)$, $g(x)$,$(f+g)(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e finalmente as expressões para $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = \sqrt{(x+2)}$ e $g(x) = |x|$

b) $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{x(x-2)}$ e $g(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g : 2^{-x}$

Ex. 6.7 — Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão apresentados a seguir

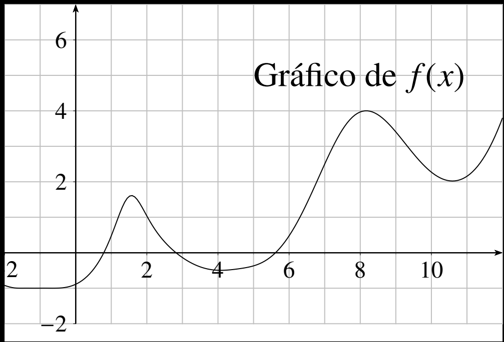
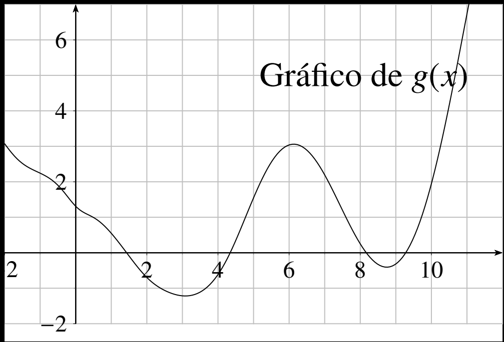


Gráfico de $f(x)$
6
4
2
−2
2
2
4
6
8
10



a) $2f(x)$

b) $2g(x)$

c) $-f(x)$

d) $-g(x)$

e) $f(-x)$

f) $g(-x)$

g) $f(|x|)$

h) $g(|x|$

i) $f(-|x|)$

j) $\frac{1}{2}g(x) + 1$

k) $-\frac{1}{2}g(x) + 1$

l) $-\frac{1}{2}|g(x)| + 1$

m) $f(\frac{1}{2}x)$

n) $||f(x)| - 1|$

o) $(f+g)(x)$

p) $(f-g)(x)$

q) $(f+g)(|x|)$

Ex. 6.8 — Esboçe o gráfico das seguintes funções, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $|2x|+1$

b) $(x+3)^4$

c) $(x+3)^4 - 1$

d) $|(x+3)^4 - 1|$

e) $|(x+3)^4 - 1| - 1$

f) $|x-1| + 1$

g) $\cos|x-1|$

h) $|2x^2 - 1|$

i) $|2x^2 - 1| - 1$

j) $||2x^2 - 1| - 1| - 2$

k) $|(x-4)^6 - 2|$

l) $\operatorname{sen}(2x) + 3$

m) $-2|\operatorname{sen}(2x) + 3| + 1$

n) $\sqrt{|x + 2|}$

o) $2\cos(3x + \pi)$

p) $1 + \cos(|x - 1|)$

q) $2^{(x-\pi)}$

r) $2^{(x-\pi)} - 5$

s) $5^{|x|}$

t) $5^{|x+2|}$

u) $|3^x - 5|$

v) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

w) $f(x) = \begin{cases} \cos(2x), & \text{se } x < 1 \\ 2\cos(x-1), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

x) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & \text{se } |x^2 - 1| + 1 < 0 \\ \cos(3x), & \text{se } |x^2 - 1| + 1 \geq 0 \end{cases}$

Ex. 6.9 — Para cada par de funções f, g abaixo encontre o domínio e as expressões de $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ f$ e $g \circ g$.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$
$g : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}$
$g : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2-x}$

c) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
$g : \mathbb{R} \backslash \{2, 3\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sen}(x)$
$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}$

Ex. 6.10 — Encontre o domínio máximo de definição e esboce o gráfico das seguintes funções,, utilizando o gráfico de uma função mais simples e aplicando as transformações apropriadas. Para cada uma dessas funções indique as intersecções com os eixos x e y, as regiões nas quais as funções são positivas, negativas, crescentes, decrescentes e os pontos de máximo e mínimo local se existirem.

a) $\frac{1}{x+7}$

b) $\frac{1}{x^2+4x+4}$

c) $\frac{x+2}{x^2-1}$.

d) $\sqrt{|t-1|-1}$

e) $\log_3(x-2)$

f) $\log_2(|x|)$

g) $\log_2(2x-|x-1|)$

h) $\tan(x+\pi)$

i) $\tan(-x)+2$

j) $|\tan(x)|$

k) $\tan(|x|)$

l) $\tan(2x-|x-1|)$

7 Limites e Continuidade de Funções

"It has long been an axiom of mine that the little things are infinitely more important."
- Sherlock Holmes, in A Case of Identity, Arthur Conan Doyle

Neste capítulo começaremos o estudo da teoria matemática subjacente ao Cálculo, explorando o conceito de limite. O conceito de limite é uma das noções fundamentais do Cálculo moderno. Por exemplo, a propriedade de continuidade é definida em termos de limites. De modo semelhante, a derivada é definida como um limite do quociente de diferenças. Neste capítulo, vamos desenvolver o conceito de um limite, começando a partir de uma noção intuitiva informal à uma definição matemática precisa. Nós também iremos apresentar as propriedades de limite e desenvolveremos procedimentos para o cálculo de limites. Concluiremos o capítulo usando os limites para o estudo curvas contínuas.

7.1 Motivação

7.1.1 O Problema da Reta Tangente

No problema da reta tangente, é dado uma função f e um ponto P no gráfico de f e queremos determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, como mostra a Figura 7.1.1.

Exceto nos pontos nos quais a reta tangente é vertical, o problema de encontrar reta tangente no ponto P se resume ao problema de determinar a inclinação da reta tangente à f no ponto P, i.e., o coeficiente angular da reta tangente.

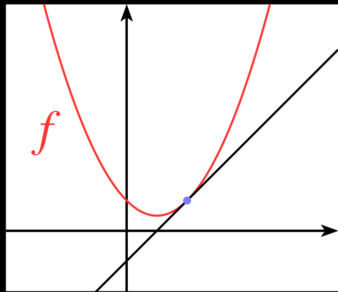
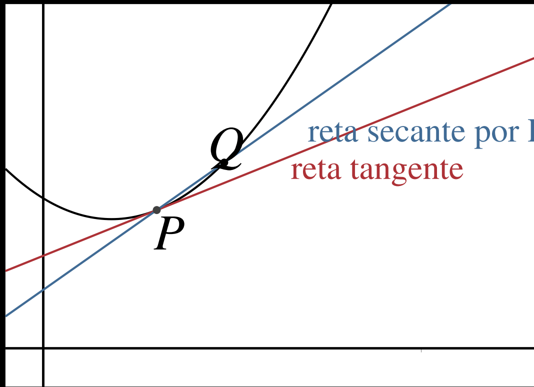


Figura 7.1: Reta tangente a f em P.

Um modo de atacar esse problema é aproximar o coeficiente angular da reta tangente utilizando retas que passam pelo ponto P e por um segundo ponto, que denotaremos por Q. Ou seja, aproximando o coeficiente da reta tangente a P pelo coeficiente da reta secante por P e Q.



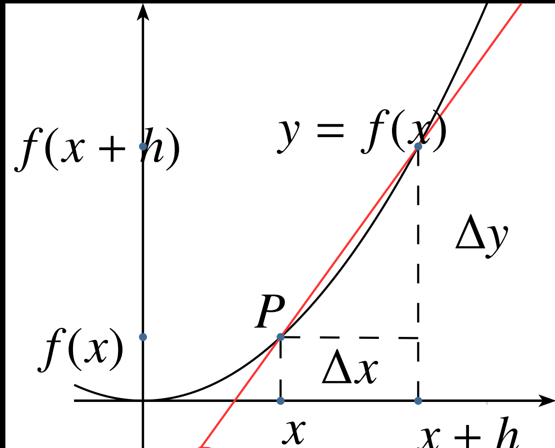
Se considerarmos que o ponto P tenha coordenadas $P:(x, f(x))$ e que o ponto Q tenha coordenadas $Q:(x+h, f(x+h))$, então o coeficiente angular da reta secante é dado por:

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Conforme o ponto Q se aproxima do ponto P temos que a inclinação da reta secante por P e Q se aproxima da inclinação da reta tangente a f no ponto P e no "limite" é igual a inclinação. Assim temos:

$$m_{\tan} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O limite anterior se existir, é denominado de derivada da função f no ponto x.



$f(x+h)$
$y = f(x)$
Δy
P
$f(x)$
Δx
x
$x+h$

7.2 Intuições sobre Limite

O conceito de limite de uma função num ponto a descreve o comportamento dessa função em valores próximos de a, mas diferentes de a.

Descrição Informal de Limite

Dizemos que o **limite da função** $f(x)$ é L quando x tende a a se a função $f(x)$ torna-se arbitrariamente próxima de L quando x está suficientemente próximo de a, mas diferente de a. Denotaremos tal fato por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Como o limite com x tendendo a a de $f(x)$ descreve o comportamento da função f para valores próximo a a, mas diferentes de a, assim uma exigência natural a ser imposta sobre a função f é que esta esteja definida ao menos num intervalo contendo a, exceto possivelmente no próprio ponto a.

Os gráficos da Figura 7.3 mostram três exemplos de funções para os quais os limites existem e são L. No primeiro caso a função f está definida em a, e $f(a) = L$, na segunda a função

g não está definida em a e na terceira apesar da função estar definida em a temos que $h(a) \neq L$. Já os gráficos da Figura 7.4 ilustram duas situações nas quais o limite em a não existe.

Vamos inicialmente ilustrar o conceito de limite através de alguns exemplos para os quais existem o limite:

Exercício Resolvido 7.1 Conjecture o valor de $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 1$.

Observamos inicialmente que o limite anterior, se existir, nos descreverá o comportamento da função $3x+1$ para valores próximos de $x = 2$, mas diferentes de 2. Para conjecturar qual o valor do limite, começaremos calculando alguns valores que essa função assume próximo ao ponto 2:

x	$3x+1$
3	10
2,1	7,3
2,01	7,03
2,001	7,003
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	7

x	$3x+1$
1	4
1.9	6,7
1,99	6,97
1,999	6,997
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
2	7

Os dados da tabela anterior seguem um padrão, conforme os valores de x se aproximam de 2 os valores da função $f(x)$ se aproximam de 7. O que nos permite conjecturar que $\lim_{x \to 2} 3x + 1 = 7$.

Podemos ir além, e verificar que os valores da função $3x + 1$ tornam-se arbitrariamente próxima de 7 quando escolhemos valores de x suficientemente próximos de 2. Para isso tentaremos exigir que a distância entre a função $3x+1$ e o valor 7 seja menor que um valor pequeno, por exemplo, 10^{-3}. Para tal fim temos que resolver a inequação:

$$|3x + 1 - 7| < 10^{-3}$$

resolvendo essa inequação temos:

$$|3x - 6| < 10^{-3} \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{10^{-3}}{3}$$

Ou seja, quando $|x - 2| < \dfrac{10^{-3}}{3}$ temos que $|3x + 1 - 7| < 10^{-3}$.

Esse raciocínio pode ser generalizado. Se quisermos forçar a distância entre a função $3x+1$ e o valor 7 ser menor que um valor positivo ε teríamos que resolver a inequação $|3x + 1 - 7| < \varepsilon$. E de maneira análoga, teríamos que quando $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ temos que $|3x + 1 - 7| < \varepsilon$.

Assim, temos que podemos controlar a distância na imagem ($|f(x) - L|$) controlando a distância no domínio ($|x - a|$), fato que, como formalizaremos na próxima seção, nos permitirá concluir que realmente $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 1 = 7$.

Exercício Resolvido 7.2 Conjecture o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

Observamos inicialmente que não podemos calcular a função em 1, pois a função não está definida para esse valor. Esse fato é irrelevante para o cálculo do limite, pois, como já dissemos ao calcularmos o limite estamos entendendo o comportamento da função para valores próximos ao ponto, mas diferente deste.

Novamente vamos começar atribuindo alguns valores próximos de 1 à função $\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$.

x	$\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$
10	20
1,1	2,2
1,01	2,02
1,001	2,002
1,0001	2,0002
1,00001	2,00002
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	$\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$
0.5	1
0.9	1.8
0.99	1.98
0.999	1.998
0.9999	1.9998
0.99999	1.99998
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

A tabela e o gráfico 7.5 induzem a acvermelhoitar que $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2$. Podemos melhorar a força de nossa conjectura analisando como se comporta a distância entre a função e o limite. Assim, se quisermos forçar a distância entre a função $\dfrac{2x - 2}{x^2 - x}$ e o valor 2 a ser menor que um valor pequeno, por exemplo, 10^{-5} teríamos que resolver a inequação:

$$\left|\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2\right| < 10^{-5},$$

quando $x \neq 1$ podemos simplificar a função:

$$\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{2x(x - 1)}{x - 1} = 2x$$

Ou seja, para $x \neq 1$ temos que $\dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1} = 2x$, e assim a desigualdade fica:

$$|2x - 2| < 10^{-5}$$

$$|x - 1| < \frac{10^{-5}}{2}$$

Assim se $|x-1| < \dfrac{10^{-5}}{2}$ então

$$\left|\frac{2x^2-2x}{x-1} - 2\right| < 10^{-5}.$$

De modo análogo, podemos fazer a distância entre a função $\dfrac{2x-2}{x^2-x}$ e o valor 2 menor que ε, nesse caso teríamos que fazer $|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Exercício Resolvido 7.3 Conjecture o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x}$.

Inicialmente observamos que $\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ não está definida em $x=0$.

Calculando alguns valores temos:

x	$\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$
10	0,09161
1	0,09902
0,1	0,09990
0,01	0,09999
0,001	0,1000
$\vdots$	$\vdots$
$\downarrow$	$\downarrow$
0	0,1

Nesse caso tanto o numerador quanto o denominador de $\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$ se anulam em $x = 5$, apesar disso, conforme os valores de x se aproximam de 0 os valores de $f(x)$ se aproximam de $0,1$. O que nos permite conjecturar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x} = 0,1$.

Calcularemos esse limite mais adiante no Exercício Resolvido 7.27.

Exemplos da não Existência do Limite

Exercício Resolvido 7.4 [Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita] Seja $g = \dfrac{|x|}{x}$ então $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe.

Solução:

Para valores positivos de x temos que

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1, \quad x > 0$$

e para valores negativos de x

$$g(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1, \quad x < 0$$

As igualdades anteriores mostram que mesmo para valores próximos a zero, teremos valores de x tais que $g(x) = 1$ e tais que $g(x) = -1$. Desse fato podemos intuir que o limite não existe pois independente do quão próximo x fique do zero $f(x)$ não se aproxima de nenhum valor. Provaremos esse fato no Exercício Resolvido 7.13. $\square$

Exercício Resolvido 7.5 [Comportamento Ilimitado] Não existe o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$.

Solução: Seja $h(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Analisando o gráfico 7.8 podemos perceber que quando x se aproxima de 0, tanto pela direita, isto é, por valores maiores que 0, bem como pela esquerda, isto é, por valores menores que 0 temos que $h(x)$ cresce de modo ilimitado. Ou seja, podemos fazer $h(x)$ maior que qualquer número real tomando x próximo de 0.

Como $h(x)$ não está se aproximando de nenhum valor, temos que o limite não existe.

□

7.3 Definição de Limite

Para formalizar a descrição informal de limite que apresentamos na seção anterior, um passo importante é formalizar o conceito de próximo.

Dizemos que um ponto y é uma **aproximação** de a com erro menor que δ se y satisfaz $|y - a| < \delta$, ou seja se $y \in (a - \delta, a + \delta)$. De modo análogo, dizemos que a função $f(x)$ é uma **aproxi-**

mação de L com erro menor que ε para L para valores de x suficientemente próximos de a, se para $y : |y-a| < \delta$ então $|f(x)-L| < \varepsilon$.

Exercício Resolvido 7.6 O exemplo 7.2 mostra que $\dfrac{2x-2}{x^2-x}$ é uma aproximação de 0 com erro menor que 10^{-5} se se x é uma aproximação de 1 com erro menor que $\dfrac{10^{-5}}{2}$.

Exercício Resolvido 7.7 O exemplo 7.1 mostra que $3x+1$ é uma aproximação de 7 com erro menor que ε se x é uma aproximação de 2 com erro menor que $\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Mais ainda, o exemplo 7.1 mostra que $3x+1$ é uma aproximação de 7 com erro menor que ε para valores de x suficientemente próximos de 2.

De posse desses conceitos, podemos reescrever a definição de limite como:

Definição 7.8 (Limite) *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio ponto a e seja L um número real. Dizemos que o* ***limite*** *de*

$f(x)$ é L quando x tende a, denotado por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$se\ 0 < |x - a| < \delta \text{ } \textit{então} \text{ } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observação 7.9 *A notação $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que o limite existe e é igual a L.*

Pela definição anterior, para demostrar que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L teremos que garantir que os valores de

$f(x)$ estão a uma distância ε acima ou abaixo do valor limite L, como mostrado nos gráficos de 7.9. Para fazer isso, devemos escolher os valores de x que estão suficientemente perto de a, digamos, a uma distância $\delta > 0$ para a esquerda ou direita de a, como mostrado no segundo gráfico. A terceira figura ilustra que a a escolha de um x dentro do intervalo azul $(a - \delta, a + \delta)$ determina um $f(x)$ dentro do intervalo vermelho $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

A definição de limite pode ser reescrita em linguagem simbólica como:

$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)|$ se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| <$

Vamos analisar a afirmação anterior dividindo-a em pedaços:

- A afirmação de que $|f(x) - L| < \varepsilon$ nos diz que a função em x estará perto do número real L. Quão próximo? Menos de ε de distância.

- A desigualdade $0 < |x - a| < \delta$ nos diz que ponto x está a uma distância menor que δ de a e é diferente de a.

- A implicação "se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$" afirma que a condição de que x esteja δ próximo de a força a função $f(x)$ a estar ε próximo de L. Em outras palavras, ao controlar x permitindo que uma variação inferior a δ, controlamos $f(x)$ com uma variação inferior a ε.

- Finalmente a afirmação inteira nos diz que para qualquer valor de ε, podemos encontrar um δ que satisfaz o item anterior.

Merece ser ressaltado que a definição de limite não nos fornece modos de determinar o valor do limite L. Em uma demonstração a partir da definição o valor do limite deve ser conjecturado. Mais adiante forneceremos uma série de ferramentas que nos permitiram efetivamente calcular os limites.

Assim, deve estar claro que uma etapa crucial na demonstração de um limite a partir da definição (por ε e δ) é encontrar o δ de modo que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Para realizar tal tarefa uma estratégia é partir da desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ para entender como esse termo pode ser controlado por $0 < |x - a| < \delta$, em particular encontrar uma fatoração de $|f(x) - L| < \varepsilon$ na qual $|x - a|$ é fator. Essa estratégia nos permite encontrar o δ. A etapa seguinte é mostrar que esse δ funciona.

Ilustraremos essa estratégia nos exemplos a seguir.

Exercício Resolvido 7.10 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to 2} 3x + 4 = 10$

Solução: Começamos estimando $|f(x) - L| < \varepsilon$:

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3\,|x - 2| < \varepsilon$$

Ou seja $|x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Agora podemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Fazemos essa escolha pois assim se $0 < |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ então

$$|3x + 4 - 10| = |3x - 6| = 3\,|x - 2| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

e logo

$$|3x + 4 - 10| < \varepsilon.$$

$\square$

Exercício Resolvido 7.11 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to a} c = c$

Solução: Como dito anteriormente para demostrar um limite temos que estimar $|f(x) - L|$ numa vizinhança de a.

Nesse caso temos que $|f(x) - L| = |c - c| = 0$, independente dos valores de x. Ou seja, para qualquer δ se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

$\square$

Exercício Resolvido 7.12 Mostre a partir da definição de limite que $\lim_{x\to a} x = a$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, como:

$$|f(x) - L| = |x - a|$$

Podemos escolher o valor de δ, fazendo $\delta = \varepsilon$, assim temos que: se $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$ então

$$|f(x) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

Ou seja, $|f(x) - L| =< \varepsilon$.

$\square$

Exercício Resolvido 7.13 [Comportamentos Diferentes à Esquerda e à Direita] Seja $g = \dfrac{|x|}{x}$ então $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ não existe.

Solução: Como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostraremos que o limite não existe mostrando que não podemos fazer a distância entre $f(x)$ e um suposto limite L menor que ε, pois independente do quão próximo escolhermos o ponto da origem $|x| < \delta$ teríamos :

$$\text{se } x > 0, |f(x) - L| = |1 - L| < \varepsilon$$

$$\text{se } x < 0, |f(x) - L| = |-1 + L| < \varepsilon$$

As equações anteriores teriam que ser satisfeitas simultaneamente para todo $\varepsilon > 0$. Em especial, considerando o caso em que $\varepsilon = 1$ teríamos:

$$\text{se } x > 0, 1 - \varepsilon < L < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow 0 < L < 2$$

$$\text{se } x < 0, -1 - \varepsilon < L < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow -2 < L < 0$$

O que mostra que não existe L.

$\square$

Exercícios

Ex. 7.1 — Calcule a função nos pontos dados. Use os resultados para conjecturar o valor do limite:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ nos pontos 1.1 1.01 1.001; $\lim_{x \to 1} x^2 + 2x$

b) $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$ nos pontos 4.1 4.01 4.001; $\lim_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ nos pontos 1.1 1.01 1.001; $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Ex. 7.2 — Mostre a partir da definição os seguintes limites.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{7} = \frac{2}{7}$

b) $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

c) $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

d) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$

Ex. 7.3 — Calcule, se existir, o limite, ou demonstre que não existe:

a) $\lim_{x \to 2} |x - 2|$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

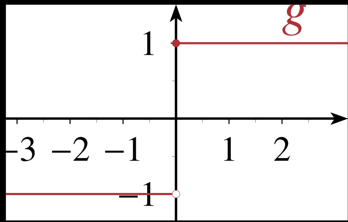
c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$

Ex. 7.4 — Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prove que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

7.4 Limites Laterais



No exemplo 7.13, vimos que a função g definida como

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

possui dois comportamentos distintos na vizinhança da origem. Se considerarmos valores maiores que 0 teremos que $g(x) = 1$ e logo

$$\lim_{x \to 0, x > 0} g(x) = 1,$$

enquanto que se consideramos valores menores que 0 teremos que $g(x) = -1$ e logo

$$\lim_{x \to 0, x < 0} g(x) = -1.$$

Indicaremos tais fatos por:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

Definição 7.14 *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número real.*

Dizemos que o ***limite lateral*** *de $f(x)$ quando x tende a a* ***pela esquerda*** *é L*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$se\ a - \delta < x < a\ então\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) |\ \text{se}\ a - \delta < x < a\ \text{então}\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

De modo análogo, temos:

Definição 7.15 *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número real.*

Dizemos que o ***limite lateral*** *de $f(x)$ quando x tende a a* ***pela direita*** *é L*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

se $a < x < a + \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em linguagem simbólica:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) | \text{ se } a < x < a + \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

A diferença essencial da definição de limites laterais em relação a definição de limites é que nos limites laterais estamos considerando apenas valores menores que a (ou seja intervalos da forma $a - \delta < x < a$) nos limites pela esquerda e valores maiores que a (ou seja intervalos da forma $a < x < a + \delta$) nos limites pela direita.

A próxima proposição relaciona a existência dos limites laterais e do limite para uma função f.

Teorema 7.16 *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a e seja L um número* *real. Então* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

O teorema anterior pode ser usado para demonstrar a existência ou não de alguns limites, como ilustrado nos exemplos seguintes:

Exercício Resolvido 7.17 Mostre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Solução: Vamos demonstrar a existência do limite usando os limites laterais. Para tanto, começaremos calculando o limite pela direita. Como $|x| = x$ se $x > 0$, temos que

$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0.$$

De maneira análoga, vamos calcular o limite pela esquerda. Como $|x| = -x$ se $x < 0$, temos que

$$\lim_{x \to 0-} |x| = 0.$$

Como ambos os limites laterais existem e são iguais temos pelo teorema 7.16 que:

$$\lim_{x \to 0} |x| == 0.$$

$\square$

Exercício Resolvido 7.18 Considere a função *maior inteiro menor ou igual a x*, i.e.,

$$[\![x]\!] = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, encontre

$$\lim_{x \to n^+} [\![x]\!] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$$

Solução: Começaremos calculando o limite $\lim\limits_{x \to n^+} [\![x]\!]$. Para isso seja x tal que $x > n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n podemos assumir sem perda de generalidade que $x < n + 1$ e assim que $n < x < n + 1$

Desta forma como para todo número real x, com $n \leq x < n+1$, tem-se que $[\![x]\!] = n$ e assim:

$$\lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n$$

Para calcularmos o limite $\lim\limits_{x \to n^-} [\![x]\!]$, tomemos um x satisfazendo $x < n$. Como estamos interessados no comportamento numa vizinhança de n podemos assumir sem perda de generalidade que

$n - 1 < x$ e assim que $n - 1 < x < n$

$$\lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1$$

Como os limites laterais são distintos podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x \to n} [\![x]\!]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exercício Resolvido 7.19 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{se } x < 2 \\ 2x - C & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Determine o valor de C de modo que o limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista.

Solução: Vamos começar calculando os limites laterais

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x - 5 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2x - C = 4 - C$$

Pelo Teorema 7.16, para que o limite exista devemos ter:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

E assim $1 = 4 - C$, e logo $C = 3$. $\square$

7.5 Propriedades do Limite de Funções

De modo análogo ao limite de sequências, os limites de funções possuem as seguintes propriedades:

Proposição 7.20 (Propriedades do Limite) *Seja c um número real e f, g duas funções reais tais que* $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = B$*. Então:*

$\mathcal{L}$***1***. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$ *(Limite da Soma)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{2}$. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$. *(Limite da Diferença)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{3}$. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = AB$. *(Limite do Produto)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{4}$. $\lim\limits_{x\to a}(cf(x)) = cA$. *(Limite do Produto por Escalar)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{5}$. *Se* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ *então* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}$. *(Limite do Quociente)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{6}$. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |A|$. *(Limite do Módulo)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{7}.$ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^n) = A^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(Limite de Potências)*

$\mathcal{L}\boldsymbol{8}.$ $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$ *(Limite da Raiz)*

Usaremos as propriedades anteriores para calcular alguns limites:

Exercício Resolvido 7.21 Calcule $\lim\limits_{x\to 2} x^3 + 3x + 2$

Solução:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} x^3 + 3x + 2 &= \lim_{x\to 2} x^3 + \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 2 && \text{por } \mathcal{L}\mathbf{1} \quad (7.1)\\
&= \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 + 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2 && \text{por } \mathcal{L}\mathbf{4} \text{ e } \mathcal{L}\mathbf{7} \quad (7.2)\\
&= 8 + 6 + 2 = 16 && (7.3)
\end{aligned}
$$

□

Exercício Resolvido 7.22 Calcule $\lim_{x\to a} \dfrac{x^4+2}{x^2+1}$

Solução: Se $\lim\limits_{x \to a} x^2 + 1 \neq 0$ então

$$\lim_{x \to a} \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \left(x^4 + 2\right)}{\lim\limits_{x \to a} \left(x^2 + 1\right)} \qquad \text{por } \mathcal{L}\mathbf{5} \tag{7.4}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} x^4 + \lim\limits_{x \to a} 2}{\lim\limits_{x \to a} x^2 + \lim\limits_{x \to a} 1} \qquad \text{por } \mathcal{L}\mathbf{1} \tag{7.5}$$

$$= \frac{a^4 + 2}{a^2 + 1} \qquad \text{por } \mathcal{L}\mathbf{7} \tag{7.6}$$

$\square$

De modo geral para um polinômio $p(x)$ podemos calcular o seu limite no ponto a calculando simplesmente $p(a)$ ou seja por substituição direta de x por a.

Teorema 7.23 *Dado um polinômio* $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ *então*

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Demonstração: Vamos demonstrar por indução sobre o grau do polinômio. Se $p(x)$ é um polinômio de grau zero, ou seja constante, a igualdade é clara. Por hipótese indutiva, suponhamos que a igualdade anterior seja válida para os polinômios de grau menor igual que $n-1$. Agora usando a hipótese indutiva, $\mathcal{L}\mathbf{1}$ e $\mathcal{L}\mathbf{3}$ temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} p(x) &= \left(\lim_{x\to a} c_n x^{n-1}\right)\left(\lim_{x\to a} x\right) + \lim_{x\to a}\left(c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right)\\ &= c_n a^{n-1} a + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = p(a).\end{aligned}$$

□

Usando a propriedade $\mathcal{L}\mathbf{5}$ temos que para funções racionais também vale substituição direta para o cálculo de limites:

Teorema 7.24 *Dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então*

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

Exercício Resolvido 7.25 Calcule $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2}$.

Solução: Usando o exemplo anterior podemos calcular o limite por substituição e logo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 12x + 2}{4x^2 + 4x - 2} = \frac{8 + 24 + 2}{16 + 8 - 2} = \frac{34}{22}$$

$\square$

Ressaltemos que nem todos os limites podem ser calculados por substituição direta. Quando tivermos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ dizemos que temos uma **indeterminação do tipo** $\dfrac{0}{0}$. Nesses casos para o cálculo do limite temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. Duas estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exercício Resolvido 7.26 [Indeterminação do tipo 0/0]

Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6}$.

Solução: Nesse caso não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade $\mathcal{L}\mathbf{5}$ pois o limite do denominador é 0. Como o limite do numerador também é 0 temos que 2 é raiz de ambos os polinômios e assim:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)}$$

Agora para o cálculo do limite $x \neq 2$ e logo

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-4}{x+3} = -\frac{2}{5}.$$

□

Agora retornaremos ao exemplo 7.3

Exercício Resolvido 7.27 [Indeterminação do tipo 0/0]

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x}$.

Solução: Novamente não podemos realizar substituição direta nem tampouco usar a propriedade $\mathcal{L}\mathbf{5}$ pois o limite do denominador é 0. Nesse caso multiplicaremos o numerador e o denominador pelo conjugado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+25}-5)(\sqrt{x+25}+5)}{x(\sqrt{x+25}+5)} \tag{7.7}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+25-25}{x(\sqrt{x+25}+5)} \tag{7.8}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+25}+5)} \tag{7.9}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+25}+5} \tag{7.10}$$

$$\tag{7.11}$$

E assim temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+25}-5}{x} = \frac{1}{10}$$

$\square$

Teorema 7.28 (Teorema do Confronto) *Dadas f, g, h funções definidas num intervalo contendo o ponto a, exceto possivelmente em a, e tais que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ nesse intervalo. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, então*

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Demonstração: Das hipóteses, temos que existe δ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ e $|h(x) - L| < \varepsilon$ se $0 < |x - c| < \delta$.

Podemos reescrever as desigualdades anteriores como

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

e

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

se $0 < |x - c| < \delta$.

Logo

$$-\varepsilon < g(x) < f(x) < h(x) < L + \varepsilon \text{ se } 0 < |x - c| < \delta. \tag{7.12}$$

equivalentemente

$$-\varepsilon < g(x) - L < f(x) - L < h(x) - L < \varepsilon \text{ se } 0 < |x - c| < \delta \tag{7.13}$$

Consequentemente $|f(x) - L| < max(|g(x) - L|, |h(x) - L|) < \varepsilon$ se $0 < |x - c| < \delta$.

□

Exercício Resolvido 7.29 Mostre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$

Solução: Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$$

temos que

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x^2$$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

$\square$

Teorema 7.30 (Limite Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Demonstração: Começaremos provando que para

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

valem as desigualdades:

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Considere no círculo trigonométrico um ângulo x com

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

conforme apresentado na figura **??**, como os triângulos $\triangle OCB$ e $\triangle OAD$ são semelhantes, se denotarmos por h o tamanho do segmento AD, por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{h}{1} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

e logo $\text{Área}(\triangle OAD) = \dfrac{\text{sen}(x)}{2\cos(x)}$.

Se denotarmos a área do setor circular delimitado pelos pontos O, A, B por Área(OAB), pela figura ao lado é fácil ver que valem as desigualdades para $x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\text{Área}(\triangle OBC) < \text{Área}(OAB) < \text{Área}(\triangle OAD)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x) < \frac{1}{2}x < \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)}.$$

Dividindo por $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{2}$ temos:

$$\cos(x) < \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Finalmente, comparando os inversos dos três termos, obtemos:

$$\Rightarrow \cos(x) < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

O caso

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$

é análogo e será deixado como exercício.

Assim como $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)}$ pelo Teorema do Confronto temos o limite desejado.

$\square$

Exercício Resolvido 7.31 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Não podemos usar diretamente a regra do quociente pois $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Para eliminar a indeterminação, multiplicaremos o numerador e o denominador por $1 + \cos(x)$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))} && (7.14)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2}\frac{1}{(1+\cos(x))} && (7.15)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\frac{1}{1+\cos(x)} && (7.16)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} && (7.17)\\
&= \frac{1}{2} && (7.18)
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 7.32 (Mudança de Variáveis) *Suponha que* $\lim_{y \to b} f(y) = L$. *E suponha que* $\Im g \subseteq \operatorname{Dom} f$, *e que* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *e que* $g(x) \neq b$ *numa vizinhança de* a. *Então*

$$\lim_{x \to a} f \circ g(x) = L$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{y \to b} f(y) = L$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |y - b| < \delta$ implica $|f(y) - L| < \epsilon$. Como $\lim_{x \to a} g(x) = b$, existe $\delta' > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta'$ implica $0 < |g(x) - b| < \delta$. E logo $|f(g(x)) - L| < \epsilon$ se $0 < |x - a| < \delta'$. $\square$

Exercício Resolvido 7.33 Mostre que $\lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}(x-2)}{x-2} = 1$.

Solução: Como $\lim_{x\to 0} \text{sen}(x) = 0$ como $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$. Pelo Teorema 7.32 temos que: $\lim_{x\to 2} \frac{\text{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = 1$. $\square$

Exercícios

Ex. 7.5 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 2} 7x^3 + x + 2$

b) $\lim_{x \to 3} (x^3 + x + 2)(x^3 + 2)$

c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{6x^2 + 2x + 2}{x^3 + 2}$

d) $\lim_{x \to 2} 7x^3 + x + 2$

e) $\lim_{x \to 0} \sqrt[4]{8x^3 + 4x + 4}$

f) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^2 - 4}{h}$

g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(4+h)^2-16}{h}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-81}{x-3}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

Ex. 7.6 — Forneça exemplos de funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ exista, mas que não existam $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Ex. 7.7 — Determine a de modo que o limite exista.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - ax^2 - 9x + 9a}{x^2 - 5x + 6}$$

Ex. 7.8 — Mostre que $\lim_{x\to 0} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0$.

Ex. 7.9 — Use o limite fundamental para calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} 4x}$

c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{\operatorname{sen} 3x}$

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x}$

7.6 Continuidade

De modo intuitivo, uma função $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$ é dita **contínua** se variações suficientemente pequenas em x resultam em variações pequenas de $f(x)$, ou equivalentemente, se para x suficientemente próximo de a tivermos que $f(x)$ é próximo de $f(a)$.

Antes de apresentarmos uma definição precisa de continuidade, vamos examinar alguns exemplos de comportamentos de continuidade e descontinuidades num ponto. Começaremos por dois exemplos de descontinuidade:

No exemplo da figura 7.13 quando tomamos valores de x diferentes de 1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de 2, porém o valor de $f(1)$ é 3, e consequentemente temos uma descontinuidade nesse ponto.

No exemplo da figura 7.14 temos um tipo distinto de descontinuidade. Quando aproximamos de 1 por valores maiores que 1, temos que $f(x)$ se aproxima de 2, enquanto que se aproximarmos de 1 por valores menores que 1 então $f(x)$ se aproxima de 1. Veja que isso se manifesta no “salto” da função no ponto $x = 1$.

Vamos agora examinar um exemplo de função contínua, a função $f(x) = x^2$. Vamos nos concentrar em entender o porquê dessa função ser contínua numa vizinhança do ponto $x = 1$.

x	x^2
2	4
1.5	2.25
1.3	1.69
1.2	1.44
1.1	1.21
1.01	1.0201
1.001	1.002001

Intuitivamente, quando tomamos valores de x diferentes de

1 porém cada vez mais próximos de 1, os valores de $f(x)$ se aproximam de de $f(1) = 1$, e logo a função $f(x) = x^2$ é contínua nesse ponto.

Definição 7.34 *Dada uma função $f : A \to B$ definida em pelo menos um conjunto aberto contendo o ponto a. Dizemos que a função $f(x)$ é* ***contínua*** *em a se e somente se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ou equivalentemente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Uma função que é contínua em todo o seu domínio é dita **contínua**.

Utilizaremos a definição de continuidade apresentada anteriormente para provarmos que algumas funções clássicas são contínuas:

Teorema 7.35 *As seguintes funções são contínuas (em todo o seu domínio):*

(i). *Funções Polinomiais.*

(ii). *Funções Racionais.*

(iii). $\operatorname{sen}(x)$

(iv). $\cos(x)$

(v). c^x

Demonstração: A demonstração da continuidade das funções polinomiais e racionais já foi feita implicitamente nos teoremas 7.23 e 7.24, nos quais provamos que dados polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com $q(a) \neq 0$ então:

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a) \qquad \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Vamos provar que $\operatorname{sen}(x)$ é contínua. Para isso começamos mostrando que $|\operatorname{sen}(x)| < |x|$. Considere no círculo trigonométrico um ângulo x tal que

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

conforme apresentado na Figura ??. Geometricamente, temos que área do triângulo OBC, que vale $|\text{sen}(x)/2|$, é menor que a área do setor circular OBC, cujo valor é $\left|\dfrac{x}{2}\right|$. Consequentemente para $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, vale a desigualdade:

$$|\text{sen}(x)| < |x|$$

e assim

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \tag{7.19}$$

$$= 2\operatorname{sen}\left|\frac{x-a}{2}\right|\cos\left|\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \tag{7.20}$$

$$\leq |x-a| \tag{7.21}$$

E assim

$$0 < \lim_{x\to a}|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| < \lim_{x\to a}|x-a|$$

Pelo Teorema do Confronto temos:

$$\lim_{x\to a}|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = 0$$

e logo $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. Consequentemente a função sen(x) é contínua.

A continuidade da função exponencial será demonstrada em **??**. $\square$

Como consequência das propriedades do limite, temos as seguintes propriedades da continuidade de funções.

Teorema 7.36 *Se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a, então:*

1. *$f(x) + g(x)$ é contínua em a*

2. *$f(x).g(x)$ é contínua em a*

3. *Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a*

Demonstração: Faremos apenas a demonstração do item **a.**). A demonstração dos outros itens é similar e deixamos como exercício ao leitor.

Como as funções f, g são contínuas em a temos que os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem e que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Logo pelo limite da soma ($\mathcal{L}\mathbf{1}$) temos que o limite da some existe e que:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$$

o que prova a continuidade da soma em a.

$\square$

Como corolário do teorema anterior temos que a função $\tan(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, i.e, em $\mathbb{R}\backslash\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \text{com } k\in\mathbb{Z}\}$

Podemos calcular o limite de funções compostas $\lim\limits_{x\to a} f\circ g(x)$, desde que a função f seja contínua, calculando $f(\lim\limits_{x\to a} g(x))$.

Teorema 7.37 (Limite da Composta) *Sejam* f *e* g *duas funções tais que* $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Dom} g$. *Se* f *é contínua em* b *e* $\lim_{x \to a} g(x) = b$ *então* $\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y) = f(b)$.

Demonstração: Como f é contínua em b, temos que $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$. Por hipótese temos que $\lim_{x \to a} g(x) = b$ Se $g(x) \neq b$ numa vizinhança de a, pelo Teorema 7.32

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(g(a))$$

O outro caso é imediato. $\square$

O Teorema do Limite da Composta permite calcular limites utilizando a mudança de variáveis, como ilustra o exemplo a seguir.

Exercício Resolvido 7.38 Mostre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+4x+\pi)+2}{\cos(x^3+x^5)} = 2$.

Solução: Como já dissemos as funções $sen(x)$ e $cos(x)$ são contínuas em todos os pontos.

Além disso temos:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+4x+\pi\right) = \pi \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^3 + x^5 = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x^2+4x+\pi)+2 = \operatorname{sen}(\lim_{x\to 0} x^2+4x+\pi)+2 = \operatorname{sen}(\pi)+2 = 2$$

e

$$\lim_{x\to 0} \cos(x^3 + x^5) = \cos(\lim_{x\to 0} x^3 + x^5) = \cos(0) = 1$$

Logo por $\mathcal{L}\mathbf{5}$ temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2}{\cos(x^3 + x^5)} = \frac{\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(x^2 + 4x + \pi) + 2\right)}{\lim_{x\to 0} \cos(x^3 + x^5)} = 2$$

□

Como consequência do Teorema do Limite da Composta (vide pág. 626) temos que a composição de funções contínuas é contínuas:

Teorema 7.39 *Dadas funções $g : A \to B$ definida num aberto contendo o ponto a e $f : B \to C$ definida num aberto contendo o ponto $g(a)$. Então se g é contínua em a e se f é contínua em $g(a)$, então $f(g(x))$ é contínua em a.*

Finalmente, temos que a inversa de uma função contínua é contínua.

Teorema 7.40 *Dado um intervalo I e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e monótona em I. Então $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(I)$.*

Como consequência do Teorema 7.40 temos que as funções trigonométricas inversas arcsen(x), arccos(x), arctan(x), etc. e a função log são contínuas em todos os pontos de seus respectivos domínios de definição.

E, ainda, como consequência do Teorema 7.39 temos que funções elementares, i.e, funções que são obtidas por soma, produto, quociente e compostas de funções polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas são contínuas em todos os pontos nos quais estão definidas.

Exercícios

Ex. 7.10 — Use o limite da composta para calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 0} \cos(x^2 + x + \frac{1}{1+x})$

b) $\lim_{x \to 0} e^{\operatorname{sen}(x^2)}$

c) $\lim_{x \to 2} \operatorname{arcsen} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \arctan \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4 * x + 3}$

Ex. 7.11 — Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(3x^3 + \dfrac{1}{x} + 4\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \left|-5x^3 + x\right|$

d) $\lim\limits_{x\to 2} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

e) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

f) $\lim_{t\to 4} \dfrac{4 - t}{2 - \sqrt{2}}$

g) $\lim_{t\to 0} \dfrac{(a + t)^3 - a^3}{t}$

h) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2 + t} - \sqrt{2}}{t}$

i) $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2 + t} - \sqrt{2}}{t}$

j) Prove que $\lim_{x\to 0} x^2 2^{\cos(x)} = 0$.

Ex. 7.12 — Prove que se $f(x)$ e $g(x)$ são contínuas num ponto a, então:

a) $f(x) + g(x)$ é contínua em a

b) $f(x).g(x)$ é contínua em a

c) Se $g(a) \neq 0$ então $f(x)/g(x)$ é contínua em a

Ex. 7.13 — Seja $f(x)$ a função definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ se } x < 0 \\ ax + 3 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que f seja contínua em 0.

Ex. 7.14 — Dado $g(x)$ a função definida como:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 1 \text{ se } x < b \\ ax^2 + 3 \text{ se } x \geq b \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que g seja contínua em b.

Ex. 7.15 — Dado $h(x)$ a função definida como:

$$h(x) = \begin{cases} \cos(x) + 1 \text{ se } x < b \\ ax^2 + b \text{ se } x \geq b \end{cases}$$

Encontre o valor de a de modo que h seja contínua em b.

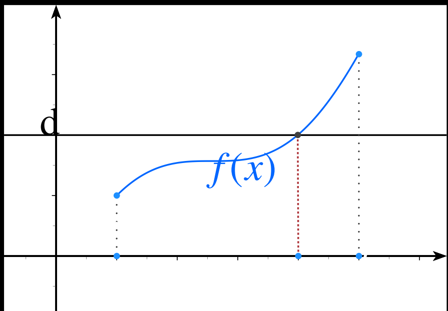
7.7 Propriedades das Funções Contínuas

Nessa seção apresentaremos algumas propriedades das funções contínuas.

7.7.1 Teorema do Valor Intermediário

Geometricamente, o Teorema do Valor Intermediário nos diz que o gráfico de uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, ou dito de outra forma, dado d entre $f(a)$ e $f(b)$, o gráfico de $f(x)$ deve interceptar a reta horizontal $y = d$.

Teorema 7.41 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e com $f(a) \neq f(b)$ então para todo d entre $f(a)$ e $f(b)$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$;*



A demonstração desse teorema será apresentada na Seção **??**. Nessa seção apresentaremos algumas aplicações do Teorema do Valor Intermediário na demonstração de existência de soluções para equações. Para tanto, por sua utilidade, enunciaremos o Teorema do Valor Intermediário em uma forma especial e mais restrita: o Teorema de Bolzano.

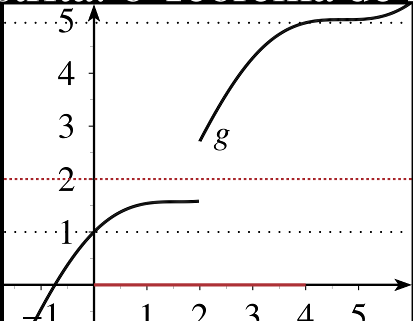
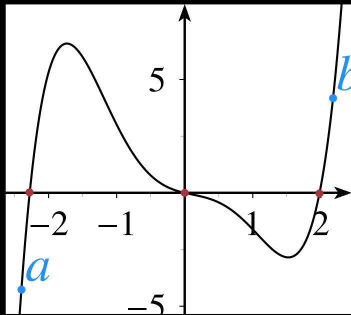


Figura 7.15: O Teorema do Valor Intermediário só é válido para funções contínuas.

Teorema 7.42 (Teorema de Bolzano)
Seja f uma função contínua em todos os pontos de um intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(a)$ e $f(b)$ tenham sinais opostos. Então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

O teorema anterior nos diz que o gráfico de uma função contínua que em a está abaixo do eixo x e em b está sobre este (ou vice-versa), em algum ponto do intervalo $[a, b]$ deve cruzar o eixo x.



Exercício Resolvido 7.43 Mostre que a equação $\cos(x) = x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[0, \pi]$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente $\cos(x) - x = 0$. Assim começaremos considerando a função $g(x) = cos(x) - x$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.

Agora observamos que $g(0) = \cos(0) - 0 = 1$, e logo $g(0) > 0$ e que $g(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi$, e logo $g(\pi) < 0$.

Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (0, \pi)$ tal que $g(c) = \cos(c) - c = 0$, e desta forma temos que a equação tem uma solução. $\square$

Exercício Resolvido 7.44 Mostre que a equação $3^x = x^2 + 4$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$.

Solução: Note que a equação anterior é equivalente $3^x - x^2 - 4 = 0$. Assim começaremos considerando a função $g(x) = 3^x - x^2 - 4$, que é contínua pois é soma de funções contínuas.

Agora observamos que $g(0) = 3^0 - 4 = -3$, e logo $g(0) < 0$ e que $g(2) = 9 - 4 - 4 = 1$, e logo $g(2) > 0$.

Logo pelo Teorema de Bolzano existe $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 3^c - c^2 - 4 = 0$, e desta forma temos que a equação tem pelo menos uma solução. $\square$

Demonstração: O teorema é consequência da propriedade de completude dos números reais. Provaremos apenas o caso no qual $f(a) < d < f(b)$. A demonstração do outro caso, $f(b) < d < f(a)$, é similar.

Seja S o conjunto de todos os x em $[a, b]$ tais que $f(x) < d$.

Então S é um conjunto não-vazio pois a é um elemento de S, e S é limitado superiormente por b. Assim, por completude, existe o supremo $c = \sup S$. Provaremos que $f(c) = d$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ sempre que $|x - c| < \delta$. Isso significa que

$$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$$

para todo x entre $c - \delta$ e $c + \delta$. Pelas propriedades do supremo, existem entre um x^* entre $c - \delta$ e c e que está contido em S, de modo que, para esse x^*

$$f(c) < f(x^*) + \varepsilon < d + \varepsilon.$$

Escolha $\hat{x}$ entre c e $c + \delta$, que obviamente não estará contido em S, e dessa forma teremos:

$$f(c) > f(\hat{x}) - \varepsilon \geq d - \varepsilon.$$

Combinando as desigualdades anteriores temos que

$$d - \varepsilon < f(c) < d + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, e pelo Exercício 3.24 temos que $f(c) = d$. $\square$

Proposição 7.45 *Uma função contínua $f : I \to \mathbb{R}$ de um intervalo fechado $I = [a, b]$ em $\mathbb{R}$ é injetiva se e somente se a função f é estritamente monotônica em $[a, b]$.*

Demonstração: Se f é estritamente crescente ou decrescente em qualquer conjunto I, a aplicação $f : I \to \mathbb{R}$ é obviamente injetiva.

Assim, a parte mais substancial da proposição consiste na afirmação que cada função injetiva e contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função monótona.

Vamos provar por absurdo, suponha que existam três pontos $x_1 < x_2 < x_3$ em $[a, b]$, tal que $f(x_2)$ não se encontra entre $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Sem perda de generalidade vamos assumir que $f(x_1)$ está entre $f(x_2)$ e $f(x_3)$. Por hipótese f é contínua em $[x_2, x_3]$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe x' neste intervalo tal que $f(x') = f(x_1)$. Temos, então, $x_1 < x'$, mas $f(x_1) = f(x')$, que é incompatível com a injetividade da função. $\square$

Exercícios

Ex. 7.16 — Mostre que a equação $x^3 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(1, 2)$

Ex. 7.17 — Mostre que a equação $4^{x^2} - 2(x+1)^2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(-1, 1)$

Ex. 7.18 — Mostre que a equação $x^5 - x^2 - 2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

Ex. 7.19 — Mostre que a equação $x^2 = \sqrt{x + 2}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(0, 2)$

Ex. 7.20 — Mostre que a equação $\tan(x) = x$ tem pelo menos 3 soluções.

Ex. 7.21 — Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número real b tal que $b^2 = 2$, conclua que existe raiz quadrada de 2.

7.7.2 Valores Extremos

Teorema 7.46 *Se uma função f é contínua em um intervalo fechado* $[a,b]$*, então ela é limitada nesse intervalo.*

Demonstração: Suponha que f não é limitada no intervalo $[a,b]$. Deixe c ser o ponto médio de $[a,b]$. Então f será ilimitada em pelo menos um dos dois intervalos de $[a,c]$ e $[c,b]$. Nós escolhemos o intervalo em que é ilimitada (no caso, em que a função seja ilimitada em ambos os intervalos, nós escolheremos o intervalo de esquerda). Denotaremos esse intervalo como $[a_1, b_1]$.

Este processo de bisseção será realizado indefinidamente e o intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ indicará a metade de $[a_n, b_n]$ em que f é ilimitada. Caso seja ilimitada em ambas as metades, a metade esquerda será selecionada.

O comprimento do n-ésimo intervalo é $(b - a)/2^n$.

Deixe A denotar o conjunto de pontos de extremidade mais à esquerda $a, a_1, a_2, a_3...$ assim obtido. Deixe α denotar o supremo A. Então α encontra-se em $[a, b]$.

Como f é contínua em α, existe um $delta > 0$ tal que

$$|f(x)| < 1 + |f(\alpha)|$$

no intervalo de $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ (No caso $\alpha = a$, o intervalo deve ser $[a, a + \delta)$. Em caso $\alpha = b$, o intervalo deve ser $(b - \delta, b])$

No entanto, o intervalo $[a_n, b_n]$ situa-se dentro do intervalo de $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, pois $(b - a)/2^n < \delta$.

Portanto, f é limitada em $(b - a)/2^n$, o que é uma contradição.

$\square$

Definição 7.47 *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* ***ponto de máximo global (ou absoluto)*** *de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* ***máximo global***.

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um* ***ponto de mínimo global*** *de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é* ***mínimo global***.

- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um* ***ponto extremo global***, *se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.*

Teorema 7.48 (Teorema de Weierstrass do Valor Extremo) *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então f atinge seus valores máximos e mínimos em $[a, b]$.*

Demonstração: Como f é contínua, então f possui a menor cota superior, que denominaremos M. Suponha que não há nenhum valor $c\ in [a, b]$ para que $f(c) = M$. Portanto, $f(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$. Defina uma nova função g por

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

Observe que $g(x) > 0$ para cada $x \in [a, b]$ e que g é contínua e limitada em $[a, b]$. Portanto, existe $K > 0$ tal que $g(x) \leq K$ para cada x in [a, b] . Uma vez que para cada $x\ in[a, b]$,

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq K \text{ é equivalente a } f(x) \leq M - \frac{1}{K}$$

Contradizemos o fato de que M foi assumido como sendo o extremo superior de f em [a, b]. Assim, deve haver uma valor $c \in [a, b]$ tal que $F(C) = M$. $\square$

7.8 ⋆Demonstração das Propriedades Básicas de Limite

Teorema 7.49 *Se* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existem, então*

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Antes de começarmos efetivamente a demonstração faremos algumas estimativas que nos guiarão na demonstração. Como ambos os limites existem, vamos supor que $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e

$\lim_{x \to a} g(x) = L_2$. E dessa forma queremos mostrar que

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2.$$

Pela definição de limite, queremos provar que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$

Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$.

Por outro lado, como $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ temos que para todo $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$.

Queremos estimar $|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)|$ usando a desigualdade triangular temos:

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Assim se pudermos escolher δ_1 e δ_2 de modo que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ teríamos:

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

Agora vamos transformar o esboço de demonstração acima em uma prova.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ temos que para $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.De modo similar, como $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$ temos que para $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Para esse δ temos que se $0 < |x - a| < \delta$ então $0 < |x - a| < \delta_1$ e $0 < |x - a| < \delta_2$ e logo para esse δ temos que $|f(x) - L_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Consequentemente:

$$|(f(x) + g(x)) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 7.50 *Se* $\lim_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x)$ *existem, então*

$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ e suponha que Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = G$. A existência dos limites de $f(x)$ e $g(x)$ implicam na existência de δ_1, δ_2, δ_3 tais que

$$|f(x) - F| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |G|)} \quad \text{quando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \tag{7.22}$$

$$|g(x) - G| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |F|)} \quad \text{quando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2, \tag{7.23}$$

$$|g(x) - G| < 1 \quad \text{quando} \quad 0 < |x - a| < \delta_3. \tag{7.24}$$

Da condição 7.8 temos:

$$|g(x)| = |g(x) - G + G| \leqq |g(x) - G| + |G| < 1 + |G| \quad \text{quando} \quad 0 < |x - a| < \delta_3.$$

Suponha que $0 < |x - a| < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ então a partir de e temos:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - FG| &= |f(x)g(x) - Fg(x) + Fg(x) - FG| \\
&\leqq |f(x)g(x) - Fg(x)| + |Fg(x) - FG| \\
&= |g(x)| \cdot |f(x) - F| + |F| \cdot |g(x) - G| \\
&< (1+|G|)\frac{\varepsilon}{2(1+|G|)} + (1+|F|)\frac{\varepsilon}{2(1+|F|)} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 7.51 (Limite do Quociente) *Se* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existem e* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Demonstração: Se pudermos mostrar que

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M},$$

então escrevemos $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$ e utilizando a Regra do Produto teremos o resultado.

Assim vamos provar que

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. A existência do limite implica que existem δ_1, δ_2 tais que

$$|g(x) - M| < \varepsilon |M| (1 + |M|) \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_1 \tag{7.25}$$

$$|g(x) - M| < 1 \text{ se } 0 < |x - c| < \delta_2 \tag{7.26}$$

Assim

$$|g(x)| = |g(x) - M + M| \leq |g(x) - M| + |M| < 1 + |M|$$

quando

$$0 < |x - c| < \delta_2$$

e logo

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| > \frac{1}{1 + |M|} \text{ quando } 0 < |x - c| < \delta_2 \tag{7.27}$$

Suponha agora que

$$0 < |x - c| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

de 7.25 e 7.27 obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| && (7.28)\\
&= \left|\frac{g(x) - M}{Mg(x)}\right| && (7.29)\\
&= \left|\frac{1}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{g(x) - M}{M}\right| && (7.30)\\
&< \frac{1}{1 + |M|} \cdot \left|\frac{g(x) - M}{M}\right| && (7.31)\\
&< \frac{1}{1 + |M|} \cdot \left|\frac{\varepsilon\,|M|\,(1 + |M|)}{M}\right| && (7.32)\\
&= \varepsilon && (7.33)
\end{aligned}
$$

$\square$

7.9 ⋆ Continuidade Uniforme

Vamos agora considerar uma noção de continuidade que é mais forte do que a continuidade normal.

Definição 7.52 *Seja $f : A \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é* uniformemente contínua *em A se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in A$*

$$\textit{se } |x - y| < \delta, \quad \textit{então } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A diferença entre continuidade e continuidade uniforme. Começamos analisando a definição de continuidade:

> *Dado $x \in A$ e $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Então para todo $y \in A$. tal que $|x - y| < \delta$. Temos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Logo a expressão $\delta(x, \varepsilon)$ pode depender de x e ε mas deve ser independente de y. A ordem de os quantificadores na definição já nos diz isso; no ponto de escolha do δ, $x \in A$ e $\varepsilon > 0$já foram escolhidos, mas y não de modo a definição de δ não deve envolver y.

Por outro lado na definição de continuidade uniforme:

> *Dado $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \delta(\varepsilon)$. Então para $x, y \in A$. satisfazendo $|x - y| < \delta$. Temos que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Desta forma a expressão de δ só depende de ε e não depende do ponto x. Ou seja, o mesmo ε funciona para todos os pontos

É óbvio que uma função uniformemente contínua é contínua:

se podemos encontrar um δ que funciona para todos os valores $x \in A$, podemos encontrar um (o mesmo), que funciona para um valor em especial x. Veremos a seguir exemplos de funções contínuas que não são uniformemente contínua.

Teorema 7.53 *Se f é uniformemente contínua, então f é contínua.*

Exercício Resolvido 7.54 Seja $f(x) = 3x + 7$. Então f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$. Deixe $\delta = \varepsilon/3$. Então dados $x, y \in$

$\mathbb{R}$. Se $|x - y| < \delta$. Então

$$|f(x) - f(y)| = |(3x + 7) - (3y + 7)| = 3|x - y| < 3\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Exercício Resolvido 7.55 Seja $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 4\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Então f é uniformemente contínua em A.

Demonstração: Escolha $\varepsilon > 0$. Escolha $\delta = \varepsilon/8$. Então dados $x, y \in A$. Se $0 < x < 4$ e $0 < y < 4$ então $0 < x + y < 8$. Então se

$|x - y| < \delta$ temos que

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| < (4 + 4)\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Em ambas as provas anteriores a função f satisfaz uma desigualdade da forma

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \tag{7.34}$$

Para todo $x_1, x_2 \in A$. No Exemplo 7.54 tínhamos

$$|(3x_1 + 7) - (3x_2 + 7)| \leq 3|x_1 - x_2|$$

e no Exemplo 7.55 nós tínhamos

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq 8|x_1 - x_2|$$

para $0 < x_1, x_2 < 4$. Uma desigualdade da forma (7.34) é dita uma **desigualdade de Lipschitz** e a constante M é dita a correspondente **Constante de Lipschitz** .

Teorema 7.56 *Se f satisfaz* (7.34) *para todo $x_1, x_2 \in A$, então f é uniformemente contínua em A.*

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$. Seja $\delta = \varepsilon/M$. Então para todo

$x, y \in A$. Então se $|x - x_0| < \delta$ teremos que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 7.57 *Se f e g uniformemente contínua em $A \subset \mathbb{R}$. Então*

1. *A função $f + g$ é uniformemente contínua em A.*
2. *Para toda constante $c \in \mathbb{R}$, a função $c \cdot f$ é uniformemente contínua em A.*

Exercício Resolvido 7.58 A função $f(x) = x^2$ é contínua mas não uniformemente contínua em $A = (0, \infty)$.

Demonstração: Primeiramente mostraremos que f é contínua em A, i.e.

$$\forall x_0 \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \Big[|x - x_0| < \delta \implies |x^2 - x_0^2| < \varepsilon \Big].$$

Dado x_0. Seja $a = x_0 + 1$ e $\delta = \min(1, \varepsilon/2a)$. Observe que δ depende de x_0 pois a depende.) Dado $x \in S$. Se $|x - x_0| < \delta$ então

$|x - x_0| < 1$ logo $x < x_0 + 1 = a$ e assim $x, x_0 < a$ temos

$$|x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x - x_0| \leq 2a|x - x_0| < 2a\delta \leq 2a\frac{\varepsilon}{2a} = \varepsilon$$

como desejado.

Agora demonstraremos que f não é uniformemente contínua em A, i.e.

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_0 \in A\ \exists x \in A \Big[|x - x_0| < \delta \text{ e } |x^2 - x_0^2| \geq \varepsilon\Big].$$

Dado $\varepsilon = 1$ seja $\delta > 0$. Então se escolhermos $x_0 = 1/\delta$ e $x =$

$x_0 + \delta/2$. Então $|x - x_0| = \delta/2 < \delta$ mas

$$|x^2 - x_0^2| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

Observe que neste caso x_0 é grande quando δ é pequeno. $\square$

Teorema 7.59 *Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua. Então f é uniformemente contínua.*

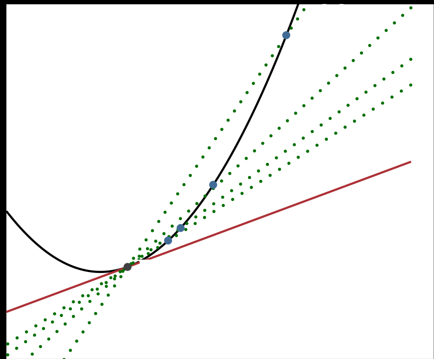


Figura 7.2: Conforme o ponto Q se aproxima de P as retas secantes se aproximam da reta tangente.

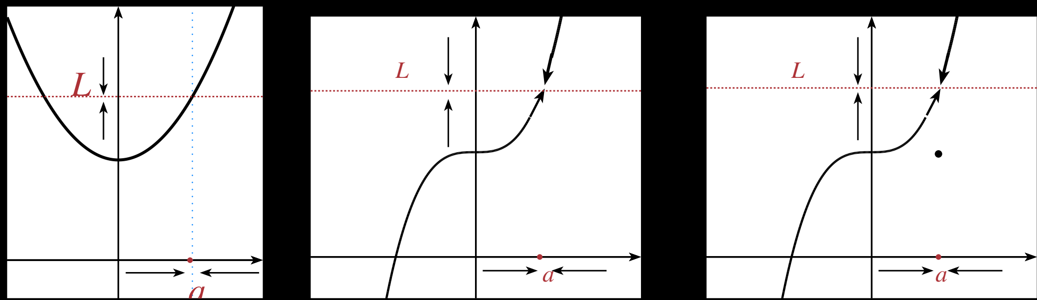


Figura 7.3: Exemplos de funções para as quais o limite quando x tende a a é L.

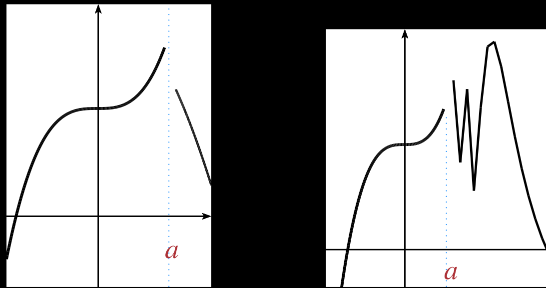


Figura 7.4: Exemplos de funções para as quais o limite não existe.

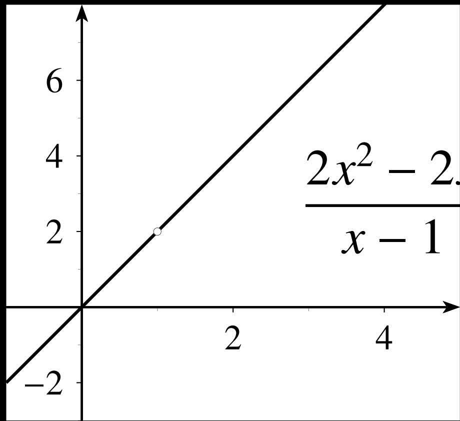


Figura 7.5: Gráfico de $\dfrac{2x^2-2x}{x-1}$.

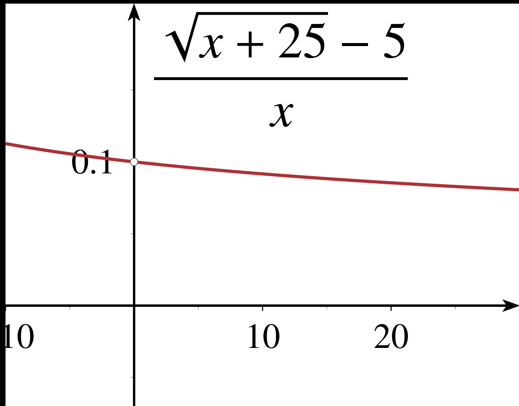


Figura 7.6: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x} = 0,1.$

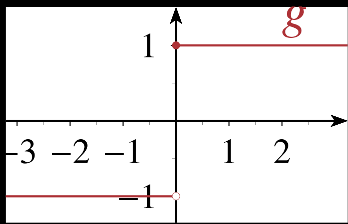


Figura 7.7: Não existe o limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

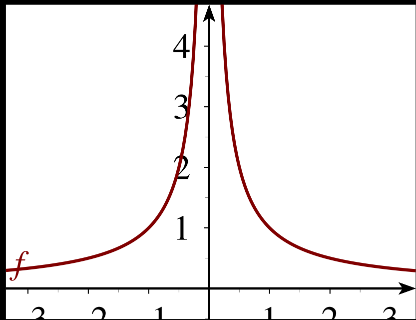
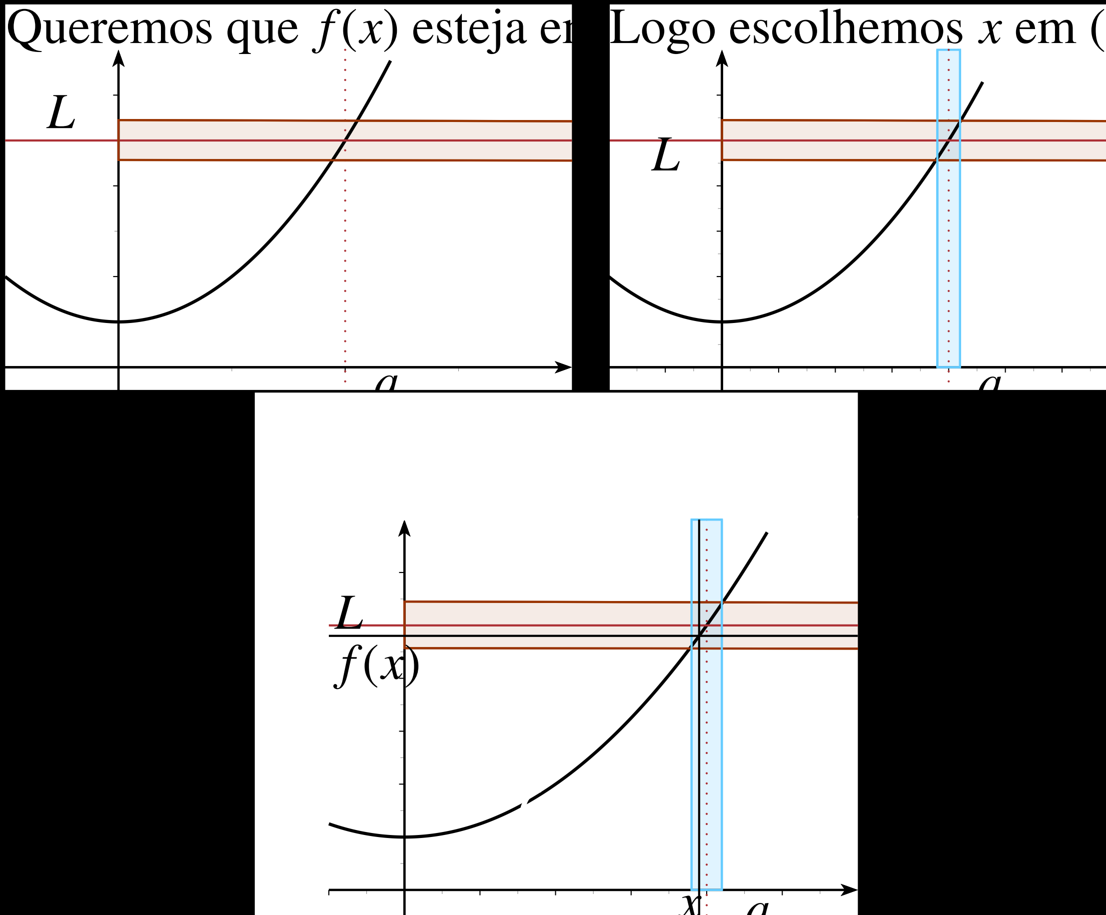
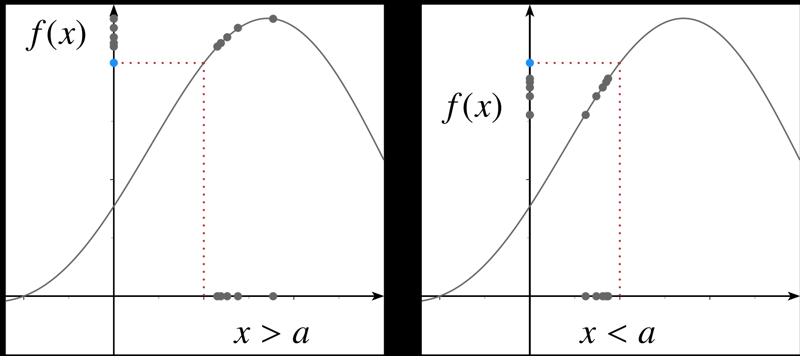


Figura 7.8: Não existe $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|}$



Queremos que $f(x)$ esteja em
L
a
Logo escolhemos x em (
L
a
L
$f(x)$
x
a



$f(x)$
$x > a$
$f(x)$
$x < a$

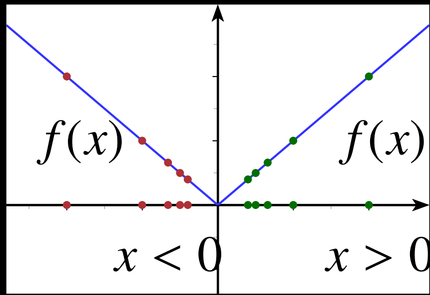
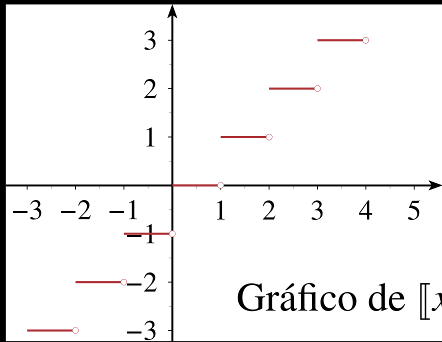


Figura 7.10: Limite $|x|$ quando x tende a 0.



3
2
1
−3 −2 −1
1 2 3 4 5
−1
−2
−3
Gráfico de ⟦x

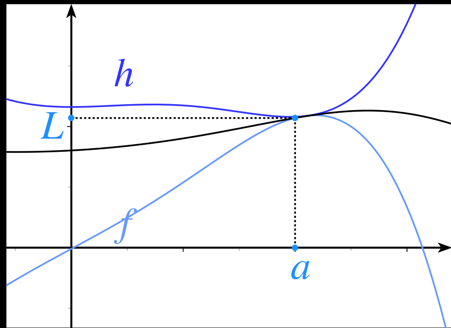
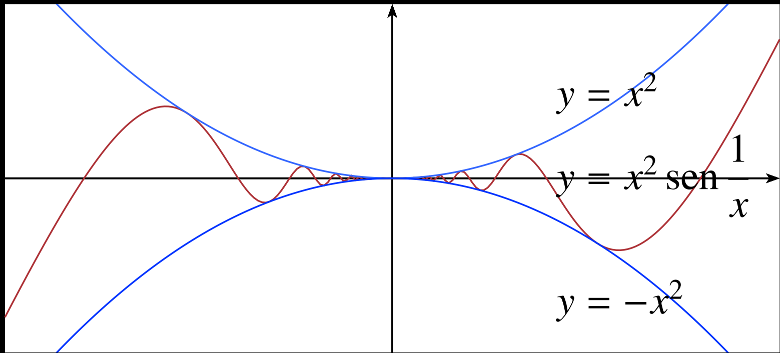


Figura 7.11: Teorema do Confronto


$y = x^2$
$y = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$
$y = -x^2$

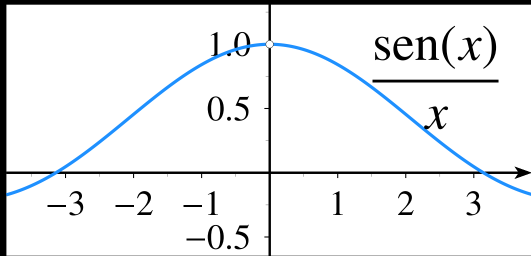


Figura 7.12: Gráfico de $\dfrac{\text{sen}(x)}{x}$

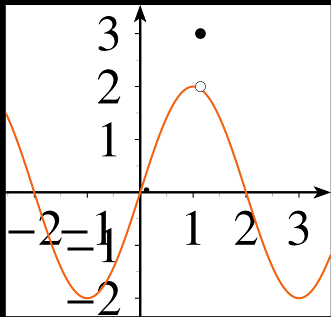


Figura 7.13: Função descontínua em $x = 1$.

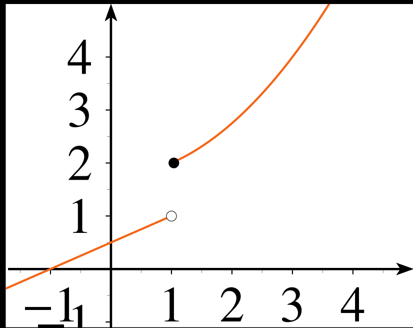
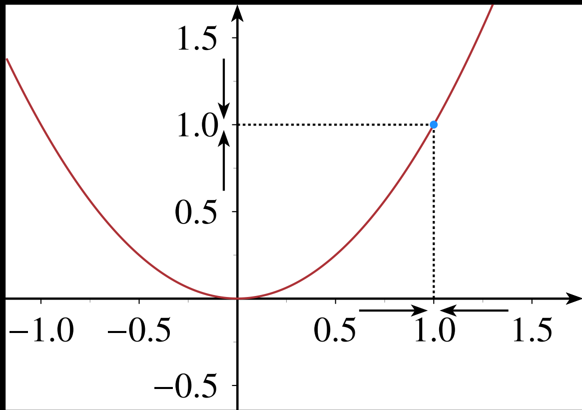
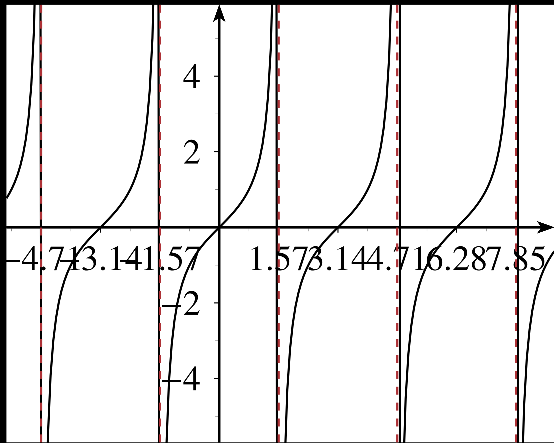


Figura 7.14: Função descontínua em $x = 1$



1.5
1.0
0.5
−0.5
−1.0
−0.5
0.5
1.0
1.5


4
2
−2
−4
−4.71
−3.14
−1.57
1.57
3.14
4.71
6.28
7.85

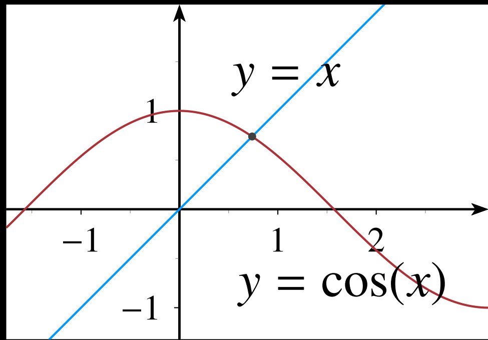


Figura 7.16: Intersecção dos gráficos de $y = x$ e $y = \cos(x)$

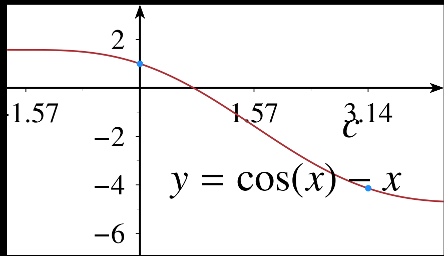


Figura 7.17: Gráfico de $y = \cos(x) - x$.

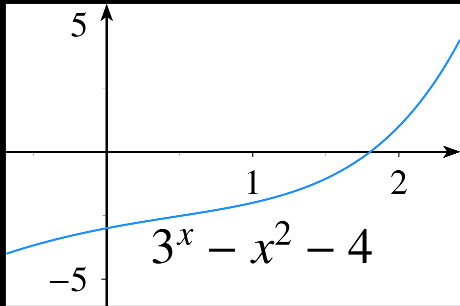


Figura 7.18: Gráfico de $y = 3^x - x^2 - 4$.

8 Limites Infinitos e no Infinito

8.1 Limites no Infinito

Vamos considerar a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, cujo gráfico é apresentado na Figura 8.1.

Podemos observar que conforme os valores de x se tornam su-

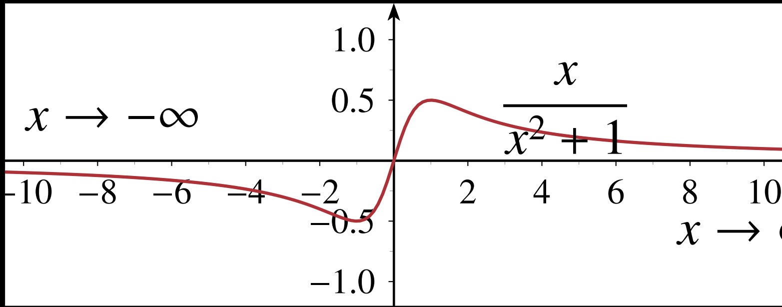


Figura 8.1: Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

ficientemente grandes temos que os valores da função se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Por outro lado, conforme os valores de x se tornam suficientemente grandes negativos (negativos e com valores absolutos grandes) temos que os valores da função também se aproximam de 0. Denotaremos tal fato por

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

Podemos modificar a noção de limite anterior de modo a lidar com esses casos. A modificação essencial é formalizar a afirmação que “se x é suficientemente grande” através de “existe δ tal que se $x > \delta$”.

Definição 8.1 ***Limite no Infinito***

Seja f uma função definida para $x > c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e seja L um número real. Dizemos que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$se\ x > \delta\ então\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Seja f uma função definida para $x < c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e seja L um número real. Dizemos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

Exercício Resolvido 8.2 Mostre a partir da definição que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Solução: Queremos mostrar que existe δ tal que se $x > \delta$ então $|f(x)| < \varepsilon$.

Para tanto começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e assim temos que a desigualdade $\frac{1}{x} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim escolhemos $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$.

Quando $x > \delta$ então $x > \frac{1}{\varepsilon}$ e assim $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$. O que prova que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$\square$

Exercício Resolvido 8.3 Mostre a partir da definição que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$

Solução: Queremos mostrar que existe δ tal que se $x > \delta$ então $|f(x)| < \varepsilon$.

Para tanto começaremos determinando quando $|f(x)| < \varepsilon$. Como estamos interessados no comportamento no infinito, podemos supor sem perda de generalidade que $x > 0$, e assim temos que a desigualdade $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$ é equivalente a $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Assim escolhemos $\delta = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$.

Quando $x > \delta$ então $x > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ e assim $0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. O que prova que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

$\square$

8.2 Limites Infinitos

No Exercício Resolvido 7.5 vimos que não existe o limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$.

Em especial, vimos que escolhendo o valor de x suficientemente pequeno podemos fazer o valor da função $\frac{1}{|x|}$ arbitrariamente grande. Nesses casos nos quais o limite não existe, mas a função toma valores que crescem de forma ilimita dizemos que o limite da função é infinito.

Vejamos outro exemplo:

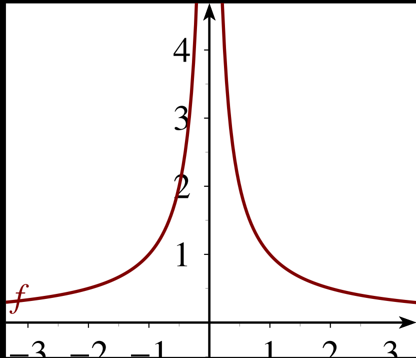


Figura 8.2: Não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|}$

Os limites $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{7}{x-4}$ e $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{7}{x-4}$.

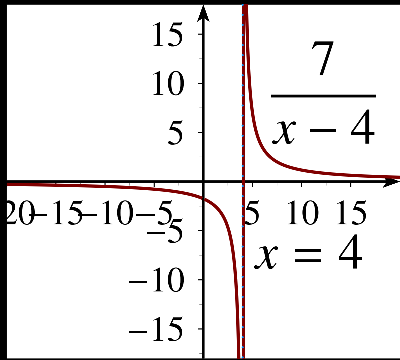


Figura 8.3:

A partir da Figura 8.3 podemos observar que quando x tende a 4 pela direita, isto é, por valores maiores que 4 a função $\dfrac{7}{x-4}$ cresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes. Enquanto que quando x tende a 4 pela esquerda, isto é, por valores menores que 4 a função $\dfrac{7}{x-4}$ decresce indefinidamente, tomando valores arbitrariamente grandes e negativos.

Representamos esses comportamentos por:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{7}{x-4} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{7}{x-4} = -\infty$$

Definição 8.4 *Limites Infinitos*

Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a.

- *Dizemos que* $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) > \varepsilon.$$

- *Dizemos que* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ *se para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } f(x) < \varepsilon.$$

De maneira análoga, podemos definir os limites laterais infinitos negativos : $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ e os limites infinitos no infinito $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Exercício Resolvido 8.5 Mostre que $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.

Solução: Pela definição temos que mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x > \delta$ então $f(x) > \varepsilon$.

A demonstração nesse caso é imediata pois escolhendo $\delta = \varepsilon$ temos o resultado desejado. $\square$

Exercício Resolvido 8.6 Mostre que $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$.

Solução: Nesse caso basta escolher $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ para termos que se $x > \delta > 0$ então $x^2 > \varepsilon$. $\square$

Proposição 8.7

- *Se* $f(x) > g(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ *então* $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.
- *Se* $f(x) < g(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ *então* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

- *Se* $f(x) > 0$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

- *Se* $f(x) < 0$ *e* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

- *Se* $f(x) \neq 0$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *ou* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ *então* $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Exemplos 8.8 Como corolário do teorema anterior, temos os seguintes limites, que são facilmente obtidos através de comparação com uma das funções x e ou $-x$.

1. Dado $c > 0$ então $\lim_{x \to \infty} c^x = \infty$.

2. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ então $\lim_{x \to \infty} x^k = \infty$.

3. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ ímpar então $\lim_{x \to -\infty} x^k = -\infty$.

4. Dado $k \in \mathbb{N}^*$ par então $\lim_{x \to -\infty} x^k = \infty$.

8.2.1 Propriedades do Limite Infinito e no Infinito

O limite infinito possui as seguintes propriedades algébricas:

Proposição 8.9 (Propriedades Aditivas do Limite Infinito)

Sejam $f(x), g(x), h(x)$ *e* $m(x)$ *funções, tais que:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} m(x) = -\infty$$

e seja $n(x)$ *uma função limitada. Então:*

A1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \infty.$

A2. $\lim_{x\to a}(f(x)-h(x)) = \infty.$

A3. $\lim_{x\to a}(f(x)+n(x)) = \infty.$

A4. $\lim_{x\to a}(h(x)+n(x)) = -\infty.$

A5. $\lim_{x\to a}(h(x)+m(x)) = -\infty.$

A6. $\lim_{x\to a}(h(x)-f(x)) = -\infty.$

Proposição 8.10 (Propriedades Multiplicativas do Limite Infinito)

Seja c um número real e $f(x), g(x), h(x), m(x), n(x)$ *e* $p(x)$ *funções , tais que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} m(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a} n(x) = L_1 > 0 \qquad \lim_{x\to a} p(x) = L_2 < 0$$

Então:

M1. $\lim_{x\to a} n(x)f(x) = \infty$

M2. $\lim_{x\to a} p(x)f(x) = -\infty$

M3. $\lim_{x\to a} n(x)h(x) = -\infty$

M4. $\lim_{x\to a} p(x)h(x) = \infty$

M5. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty$

M6. $\lim_{x\to a} f(x) \cdot h(x) = -\infty$

M7. $\lim_{x\to a} h(x) \cdot m(x) = \infty$

As propriedades anteriores permanecem válidas se trocamos o limite no ponto a por limites laterais ou por limites infinitos.

Proposição 8.11 (Propriedades do Limite no Infinito)

Seja c um número real e f, g duas funções reais tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ *e* $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$. *Então:*

I1. $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = A + B.$

I2. $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = A - B.$

I3. $\lim_{x\to\infty}(f(x) \cdot g(x)) = AB.$

I4. $\lim_{x\to\infty}(cf(x)) = cA.$

I5. *Se* $B \neq 0$ *então*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}.$$

I6. $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = |A|.$

I7. $\lim_{x\to\infty} (f(x)^n) = A^n$

I8. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{A}$

Quando tivermos $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ com $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ dizemos que temos uma **indeterminação do tipo** $\dfrac{\infty}{\infty}$. Nesses casos para o cálculo do limite, de modo análogo as indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$, temos que realizar uma simplificação antes da utilização das propriedades do limite. As estratégias de simplificação usuais são a fatoração e a multiplicação pelo conjugado e também multiplicar ou dividir o numerador e o denominador por um termo apropriado, como ilustram os exemplos a seguir.

Exercício Resolvido 8.12 Calcule $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1}\frac{\div x^2}{\div x^2} \tag{8.1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \tag{8.2}$$

$$\tag{8.3}$$

Como $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, temos que $\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{x^2}$

Temos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

$\square$

Exercício Resolvido 8.13 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3 - 3x^2 + 1)$.

Solução: Colocando o termo de maior grau em evidência:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}(2x^3 - 3x^2 + 1) &= x^3 \lim_{x\to\infty} 2 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} && (8.4) \\ &= \infty \cdot 2 = \infty && (8.5) \end{aligned}$$

□

Exercício Resolvido 8.14 Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+1}{4x^2-2x+1}$.

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+1}{4x^2-2x+1} = \frac{x^3(2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{x^2(4-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \tag{8.6}$$

$$= x\frac{(2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{(4-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \tag{8.7}$$

$$= \infty \cdot \frac{2}{4} = \infty \tag{8.8}$$

$$\tag{8.9}$$

$\square$

Exercício Resolvido 8.15 Mostre que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \dfrac{1}{3}$.

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} \frac{\div x}{\div x} \tag{8.10}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} \tag{8.11}$$

Como $\lim_{x\to\infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} 9 + \frac{1}{x^2}} = 3$ então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+1}} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

Exercício Resolvido 8.16 Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5}$.

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 + x^2 - 3}{2x^3 - x + 5} \frac{\div x^3}{\div x^3} \tag{8.12}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x^3}} \tag{8.13}$$

$$= \frac{5}{2} \tag{8.14}$$

□

Exercício Resolvido 8.17 Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+x-3}{4x^4-x+2}$.

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-3}{4x^4-x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-3}{4x^4-x+2} \frac{\div x^4}{\div x^4} \tag{8.15}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-3\dfrac{1}{x^4}}{4-\dfrac{1}{x^3}+2\dfrac{1}{x^4}} \tag{8.16}$$

$$= 0 \tag{8.17}$$

□

8.3 O Número e e as Funções Exponencial e Logaritmo

O próximo limite é conhecido como Limite Exponencial Fundamental é a base dos logaritmos naturais ou neperianos.

Teorema 8.18 (Segundo Limite Fundamental)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

onde $e \approx 2,71828$ *é a constante de Euler.*

Exercício Resolvido 8.19 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$.

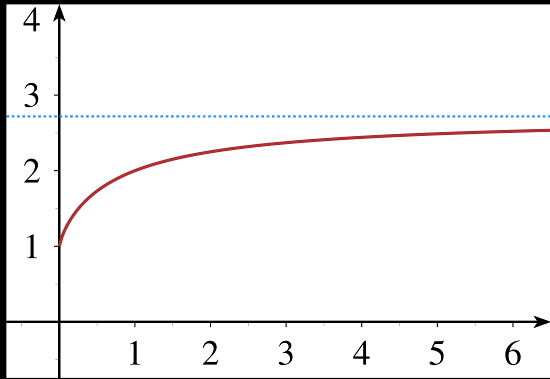


Figura 8.4: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Solução: Fazemos a mudança de variável $t = \dfrac{x}{5}$ temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t} \tag{8.18}$$

$$= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{5} \tag{8.19}$$

$$= e^{5} \tag{8.20}$$

$\square$

Exercício Resolvido 8.20 Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Solução: Dividindo o numerador e o denominador por x temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x \quad (8.21)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} \quad (8.22)$$

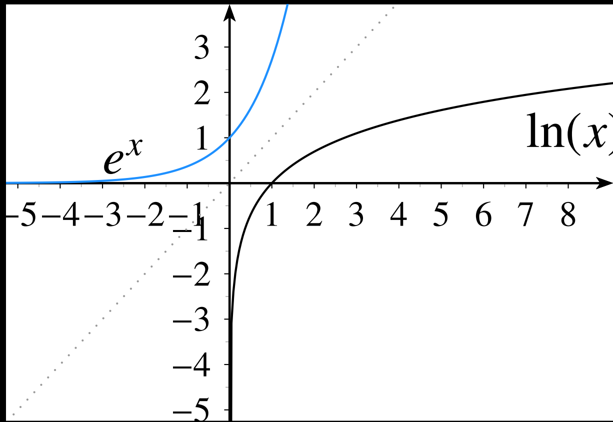
$$= e^{-1} \quad (8.23)$$

$\square$

Definição 8.21 *O logaritmo de base e é denominado* ***função logaritmo natural*** *ou simplesmente* ***logaritmo*** *. Assim pelos fatos apresentados na seção 6.6.2, a função logaritmo é a função* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *dada pela regra*

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

O gráfico da função logaritmo natural está representado abaixo:



7.40

a sua função inversa $\ln(x) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é contínua em todo o seu domínio.

Teorema 8.22 (Terceiro Limite Fundamental)

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Demonstração: Fazendo a substituição $u = a^h - 1$ temos que $h = \log_a(1+u) = \dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$ e assim:

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{u}{\ln(u+1) \cdot \ln a} = \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} \cdot \ln a.$$

Quando $h \to 0$, $u \to 0$, e assim

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}} \cdot \ln a = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

$\square$

Exercício Resolvido 8.23 Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x-2}$.

Solução: Fazendo a troca de variáveis $t = \dfrac{x-2}{5}$ temos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3^{\frac{x-2}{5}} - 1}{x-2} = \lim_{t\to 0} \frac{3^t - 1}{5t} \tag{8.24}$$

$$= \frac{\ln 3}{5} \tag{8.25}$$

□

8.3.1 Juro Composto

Suponha que façamos um investimento de capital inicial C, uma taxa de juros anual de r quanto dinheiro vamos ter decorrido k anos?

Resposta: isso depende de como os juros são pagos. Se for utilizado *juros simples* o total de juros será aplicado ao final investimento, de modo que o acréscimo total produzido pelos juros é Crk, e o capital final será igual $C(1 + rk)$.

No entanto, o mais comum é que os juros sejam pagos em períodos mais curtos de tempo. Dessa forma cada vez que esses interesses são pagos eles aumentam o capital inicial e produzirão, por sua vez, mais capital quando novos interesses forem pagos. Isto é conhecido como *juros compostos*. Por exemplo, se os juros são pagos n vezes por ano (Trimestral (n = 4), mensal ($n = 12$), etc). No final do primeiro período, teremos $C(1+r/N)$, final do segundo $C(1 + r/n)^2$; no final do exercício $C(1 + r/n)^n$, fim do k ésimo ano teremos $C(1 + r/n)n^{nk}$.

Quando n é grande, o número $(1 + r/n)^n$ é aproximadamente igual a e^r. Precisamente, se os juros são aplicados acumulam, instantaneamente ao capital o que conhecido como *compostos continuamente*, em seguida, o capital no final do k ésimo ano é dado pela Ce^{rk}.

8.3.2 Crescimento demográfico

Se denotarmos por P_0 a a população mundial atual, e por λ a taxa anual de crescimento, a qual suporemos que se mantém constante. Denotaremos por $P(t)$ a população mundial passados t anos.

Passado um ano, temos que a população mundial será

$$P(1) \approxeq P_0 + \lambda P_0 = (1 + \lambda)P_0.$$

Utilizamos o sinal de aproximação $\approxeq$ e não o $=$ porque calculamos o crescimento da população λP_0 como se esta fosse constantemente igual a P_0 em todo o ano, o que não é correto.

Obteríamos um resultado mais exato se consideramos o crescimento da população mensalmente. Como a taxa de crescimento mensual é $\lambda/12$, passado um mês a população será $(1+\dfrac{\lambda}{12})P_0$, e passados doze meses

$$P(1) \approxeq \left(1+\frac{\lambda}{12}\right)^{12} P_0.$$

O cálculo segue sendo aproximado, pois a população cresce continuamente. Para obter uma melhor aproximação poderíamos considerar dias em vez de meses. Em general, se dividimos o ano em

n períodos, obteríamos como aproximação:

$$P(1) \approxeq \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n P_0$$

Quanto maior seja n menor será o erro que cometemos. Se fazemos que n cresça indefinidamente, então o número $\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n$ se converte em e^λ, pelo que $P(1) = e^\lambda P_0$. Se o período de tempo é de t anos, então $P(t) = P_0 e^{\lambda t}$.

Observa que tanto o juro composto contínuo como o crescimento demográfico são, matematicamente, o mesmo. Em ambos casos o que temos é uma magnitude que se incrementa de forma proporcional a sua quantidade em cada momento. Outro processo que entra nesta descrição é o decaimento radioativo, a única diferencia é que a masa de matéria radioativa vá diminuindo, ou seja, que a constante de proporcionalidade é negativa.

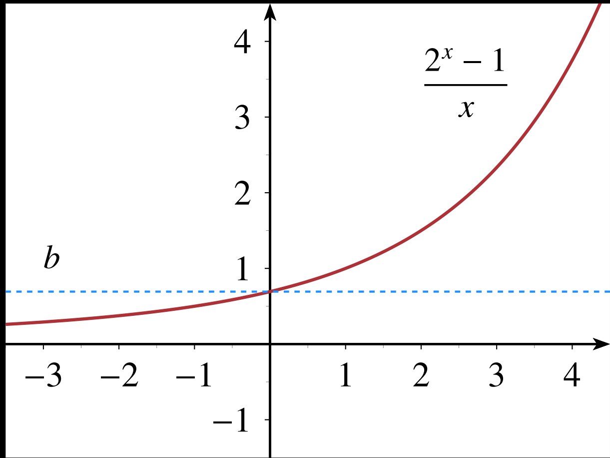


Figura 8.5: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = \ln 2.$

Índice Remissivo