Lista 6 - Bases Matemáticas

Funções - Parte 1

Conceitos Básicos e Generalidades

No seu se segue, por *domínio natural* de uma função se entende o domínio de existência da expressão algébrica dada.

1 — Sejam dados A e B conjuntos não vazios.

a) Defina rigorosamente o conceito de função de A em B.

b) Defina rigorosamente os conceitos de função injetora, sobrejetora e bijetora.

2 — Determine o domínio natural $D \subset \mathbb{R}$ das seguintes funções $f : D \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = \frac{1}{x(x+4)(3x+1)}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x^2-4)}}$

d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{1+x} - x}$

e) $f(x) = \sqrt{|1+x| - |x^2|}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{1 - \sqrt{|x| - 3}}$

3 — Determine o domínio natural $D \subset \mathbb{N}$ das seguintes funções $f : D \to \mathbb{R}$

a) $f(n) = \frac{1}{n(n+4)(3n+1)}$

b) $f(n) = \sqrt{|1+n| - |n^2|}$

4 — Determine o conjunto imagem da função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (-1)^n n$.

5 — Considerando a função f do Exercício 4, determine o conjunto imagem da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $g(n) = f(n) + f(n+1)$.

6 — Sejam dadas as seguintes funções

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 3n + 1$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - \left|(x+2)^2 - 1\right|$

(c) $h : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Determine as pré-imagens abaixo

a) $f^{-1}(\{2\})$.

b) $f^{-1}(\{2k \mid k \in \mathbb{N}\})$.

c) $g^{-1}(\{-1\})$.

d) $g^{-1}([-3, -1])$.

e) $h^{-1}(\{1\})$.

f) $h^{-1}([\frac{1}{3}, \frac{1}{2}])$

7 — Para cada uma das seguintes funções, determine se são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, justificando (i.e. provando ou dando contra-exemplos)

a) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}$$

b) Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $f : A \to A$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 7 \\ 1, & \text{se } x = 7 \end{cases}$$

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 3n + 1$.

d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n - |n|$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$.

g) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

h) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

8 — Determine a função inversa de cada função do Exercício 7, quando cabível.

9 — Determine a função inversa de cada uma das funções abaixo, atentando para os domínios e contradomínios:

a) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f : (-\infty, 1] \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$

c) $f : [-\frac{3}{4}, +\infty) \to [-\frac{1}{8} + \infty)$, $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

d) $f : [-1, +\infty) \to (-\infty, 1]$, $f(x) = 1 - \sqrt{x + 1}$

10 — Para cada função abaixo, determine um domínio D que a torne inversível e expresse sua inversa:

a) $f : D \to [1, 4]$, $f(x) = x^2$

b) $f : D \to [1, 4]$, $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f : D \to [-2, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$

d) $f : D \to [14, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$

11 — Para cada função abaixo, determine o contradomínio C que a torne inversível e expresse sua inversa:

a) $f : [1, 4) \to C$, $f(x) = 3x - 1$

b) $f : [-1, +\infty) \to C$, $f(x) = \sqrt{x + 1}$

c) $f : [0, +\infty) \to C$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$

d) $f : (-\infty, -\frac{3}{2}] \to C$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$

e) $f : [-\frac{1}{4}, 1] \to C$, $f(x) = 2x^2 + x - 3$

Exercícios Complementares

12 — Para cada uma das seguintes funções, determine se são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, justificando (i.e. provando ou dando contra-exemplos)

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, x)$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x, |x|)$.

c) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x - |y|$.

d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x, y^3)$.

13 — Seja dada uma função $f : A \to B$. Se X e Y são subconjuntos do domínio A e se V e W são subconjuntos do contradomínio B, mostre que

a) Se $X \subset Y$ então $f(X) \subset f(Y)$.

b) Se $V \subset W$ então $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(W)$.

c) $X \subset f^{-1}(f(X))$.

d) Se f é injetora então $X = f^{-1}(f(X))$.

14 — Com os mesmos dados do Exercício 13, mostre que

a) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.

b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

c) Se f é injetora então $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

d) $f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W)$.

e) $f^{-1}(V \cap W) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$.

15 — Considere a função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = y - |x|$.

a) Calcule $f^{-1}(\{0\})$

b) Calcule $f^{-1}((0, \infty))$

Respostas dos Exercícios

1 a.) Uma função $f : A \to B$ é uma relação entre os conjuntos A e B, de modo que a cada elemento $x \in A$ corresponde um único elemento $y \in B$.

2 c.) $D = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$;
d.) $D = \left[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;
f.) $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

3 a.) $D = \mathbb{N}^*$;
b.) $D = \{0, 1\}$

4 $\operatorname{Im} f = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$

5 $\operatorname{Im} f = \{-1, 1\}$

6 a.) $\varnothing$
b.) $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ é ímpar e múltiplo de $3\}$
c.) $\{-1\}$
d.) $[-3, 0]$
e.) $\{0\}$
f.) $[\frac{9}{16}, \frac{16}{9}]$

7 a.) Nada;
b.) Bijetora;
c.) A função é injetora pois

$$f(n') = f(n) \Rightarrow 3n' + 1 = 3n + 1 \Rightarrow n = n'$$

Entretanto não é sobrejetora pois 5 pertence ao contradomínio, mas não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 5$, pois $3n + 1 = 5 \Rightarrow 3n = 4$ e claramente não existe nenhum natural com essa propriedade.
d.) Nada;
e.) A função é injetora pois

$$f(x') = f(x) \Rightarrow ax + b = ax' + b \Rightarrow ax' = ax$$

e como $a \neq 0$, temos que $x = x'$. A função é sobrejetora pois dado $y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = y \Leftrightarrow ax + b = y \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

ou seja, $f(\frac{y-b}{a}) = y$.
f.) Nada;
g.) Injetora;
h.) Nada;
i.) Injetora;

8 a.) Função do item b:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 7, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

b.) Função do item e: $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$

9 b.) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$
c.) $f^{-1}(x) = \frac{-3+2\sqrt{2(1-y)}}{4}$

10 a.) $D = [1, 2]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ou
$D = [-2, -1]$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
b.) $D = [1, 16]$, $f^{-1}(x) = x^2$
d.) $D = (-\infty, -2]$, $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2-x}$ ou
$D = [6, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{2-x}$

11 c.) $C = [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = (x-1)^2$
d.) $C = [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \frac{-1-\sqrt{25+8x}}{4}$
e.) $C = [-\frac{25}{8}, 0]$, $f^{-1}(x) = \frac{-1+\sqrt{25+8x}}{4}$

12 a.) A função não é sobrejetora, pois $(1, 0)$ pertence ao contradomínio mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (1, 0)$. A função é injetora, pois $f(x) = f(x') \Rightarrow (x, x) = (x', x') \Rightarrow x = x'$
b.) Injetora;
c.) Sobrejetora. A função não é injetora pois $f((0, 1)) = 1 = f((0, -1))$.
d.) Bijetora

14 a.) Se $X \cup Y = \varnothing$, a afirmação é trivial. Caso contrário, seja $a \in f(X \cup Y)$. Então existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Como $b \in X$ ou $b \in Y$, então $a \in f(X)$ ou $a \in f(Y)$. Assim $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. Por outro lado, se $a \in f(X) \cup f(Y)$, então existe $b \in X$ ou $b \in Y$ tal que $f(b) = a$. Em qualquer um dos casos, existe $b \in X \cup Y$ tal que $f(b) = a$. Logo, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
c.) A inclusão $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$ é objeto do item (b). Mostremos somente a inclusão $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Se $f(X) \cap f(Y) = \varnothing$, a inclusão é trivial. Senão, seja dado $a \in f(X) \cap f(Y)$. Então existem $b \in X$ e $c \in Y$ tais que $f(b) = a$ e $f(c) = a$. Como a função f é injetora (hipótese do exercício), deve resultar $b = c$. Assim, $b \in X \cap Y$ e portanto $a \in f(X \cap Y)$.

e.) Se $V \cap W = \emptyset$, então a inclusão $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V \cap W)$. Como $f(x) \in V \cap W$, então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, e assim resulta $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Logo, vale $f^{-1}(V \cap W) \subset f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Vice-versa, se $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = \emptyset$, a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$ é trivial. Senão, seja $x \in f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W)$. Então $f(x) \in V$ e $f(x) \in W$, ou seja, $f(x) \in V \cap W$. Logo, $x \in f^{-1}(V \cap W)$, o que prova a inclusão $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) \subset f^{-1}(V \cap W)$.

15 a.) $\{(x, |x|) \mid x \in \mathbb{R}\}$
b.) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}$