Gabarito da Lista 0 - FUV (Gradmat)

(Última versão: 15/2/2019)

1. (a) $[-1, +\infty)$
   (b) $\mathbb{R}$
   (c) $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$
   (d) $[-1, 2]$
   (e) $(-\infty, -1] \cup [0, 1]$
   (f) $[-\frac{1}{3}, 1]$

   Note que o domínio da função $\arccos t$ é $[-1, 1]$

   (g) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, k \in \mathbb{Z} : k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

   Lembrando que $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, tal expressão será não-negativa quando as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ tiverem mesmo sinal. Isto ocorre no primeiro e no terceiro quadrantes (incluindo as extremidades dos quadrantes).

   (h) $(-2, 2)$

   Lembre que $\mathrm{Dom}(\log t) = (0, +\infty)$

2. (a) $f(0) = 1$
   (b) $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$
   (c) $f(x + 1) = \frac{-x}{x+2}$
   (d) $f(x) + 1 = \frac{2}{1+x}$
   (e) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}$
   (f) $\frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}$

3. Neste exercício, convém usar uma nova variável t para não gerar confusão:

   (a) Ponha $t = x + 1$ (donde $x = t - 1$) e substitua na expressão de $f(x + 1)$. Solução: $f(t) = t^2 - 5t + 6$.

   (b) Ponha $t = \frac{1}{x}$ e siga como no item anterior. Solução $f(t) = \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$ [*Questão:* sabe onde usou a hipótese de que $x > 0$?]

   (c) Solução: $f(t) = \frac{t^2}{(1-t)^2}$

4. $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$

5. (a) $Sol = \mathbb{R}$ [*Questão:* Chegou a fazer contas? É necessário fazer contas?]
   (b) $Sol = [\frac{7}{6}, \frac{9}{6}]$ [*Questão:* Percebeu que essa desigauldade significa dizer que a distância de x ao número $\frac{4}{3}$ é menor ou igual a $\frac{1}{2}$? Resolveu desse modo?]
   (c) $Sol = [1 - \sqrt{17}, -1 + \sqrt{15}]$
   (d) $Sol = [-1, +\infty]$ [*Comentário:* Aqui também é possível resolver interpretando a desigualdade em termos de distância. De fato, as soluções são aqueles números que estão mais próximos de 2 do que de -4, ou equidistantes.]

6. (a) par
   (b) par
   (c) nada
   (d) nada
   (e) nada
   (f) ímpar

7. (a) $\{4\}$
   (b) $\{2\}$
   (c) $\{\frac{3}{5}\}$
   (d) $\{-3\}$
   (e) $\{-\frac{1}{2}\}$
   (f) $\{\log_3 2\}$

8. (a) $\operatorname{sen} x^2$
   (b) $\operatorname{sen}^2 x$
   (c) x^4
   (d) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen}(2x)$
   (e) $\tan^2 x$
   (f) $\tan(\operatorname{cotg} x)$
   (g) $\operatorname{sen}(\cos^2 x)$
   (h) $\operatorname{sen}(\cos^2 x)$

9. (a) $f \circ h$
   (b) $h \circ g$
   (c) $f \circ g$
   (d) $g \circ g$
   (e) $h \circ f$

10. (a)
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$$
   (b)
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}}$$

11. (a) $\frac{x+13}{7}$, Dom $= \mathbb{R}$

   (b) $\sqrt{x+3}$, Dom $= [-3, +\infty)$
   ou
   $-\sqrt{x+3}$, Dom $= [-3, +\infty)$

   (c) $\frac{2x-3}{3x-2}$, Dom $= \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\}$ [*Questão:* Observe que a inversa dessa função é ela mesma. O que isso nos diz sobre o gráfico dessa função? Ele possui alguma simetria?]

   (d) $\sqrt[3]{1-x^3}$, Dom $= \mathbb{R}$ [*Comentário:* Novamente, a função é a sua própria inversa.]

   (e) $\frac{1}{3}\tan x$, Dom $= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   (f) $2e^x$, Dom $= \mathbb{R}$

   (g) $\begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

12. Para essa questão, é importante observar:

▷ Sobre $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arcsen} x$:

(a) Sabendo que $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, segue:
- Se $b = \operatorname{arcsen} a$, então $\operatorname{sen} b = a$ (pela definição de arco seno)
- Se $b = \operatorname{arcsen} a$, então $-\frac{\pi}{2} \leq b \leq \frac{\pi}{2}$, logo $\cos b \geq 0$
- Se $b = \operatorname{arcsen} a$, então $\cos b = \pm\sqrt{1-a^2}$, mas pela observação anterior, vale o sinal positivo, isto é, $\cos b = \sqrt{1-a^2}$

(b) A função $\operatorname{sen} x$ e a função $\operatorname{arcsen} x$ são ambas *crescentes* (nos intervalos considerados). Logo:
- Se $a \leq b$, então $\operatorname{sen} a \leq \operatorname{sen} b$
- Se $a \leq b$, então $\operatorname{arcsen} a \leq \operatorname{arcsen} b$

▷ Sobre $\cos x$ e $\arccos x$:

(c) Sabendo que $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, segue:
- Se $b = \arccos a$, então $\cos b = a$ (pela definição de arco coseno)
- Se $b = \arccos a$, então $0 \leq b \leq \pi$, logo $\operatorname{sen} b \geq 0$
- Se $b = \arccos a$, então $\operatorname{sen} b = \pm\sqrt{1-a^2}$, mas pela observação anterior, vale o sinal positivo, isto é, $\operatorname{sen} b = \sqrt{1-a^2}$

(d) A função $\cos x$ e a função $\arccos x$ são ambas *decrescentes* (nos intervalos considerados). Logo:
- Se $a \leq b$, então $\cos a \geq \cos b$ (note a inversão do sinal de desigualdade)
- Se $a \leq b$, então $\arccos a \geq \arccos b$ (note a inversão do sinal de desigualdade)

▷ Sobre $\tan x$ e $\arctan x$:

(e) Sabendo que $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, segue:
- Se $b = \arctan a$, então $\tan b = a$ (pela definição de arco tangente)
- Se $b = \arctan a$ e $a \neq 0$, então $\operatorname{cotg} b = \frac{1}{a}$

(f) A função $\tan x$ e a função $\arctan x$ são ambas *crescentes* (nos intervalos considerados). Logo:
- Se $a \leq b$, então $\tan a \leq \tan b$

- Se $a \leq b$, então $\arctan a \leq \arctan b$

▷ Sobre $\operatorname{cotg} x$ e $\operatorname{arccotg} x$:

(g) Sabendo que $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$, segue:

- Se $b = \operatorname{arccotg} a$, então $\operatorname{cotg} b = a$ (pela definição de arco cotangente)
- Se $b = \operatorname{arccotg} a$ e $a \neq 0$, então $\tan b = \frac{1}{a}$

(h) A função $\operatorname{cotg} x$ e a função $\operatorname{arccotg} x$ são ambas *decrescentes* (nos intervalos considerados). Logo:

- Se $a \leq b$, então $\operatorname{cotg} a \geq \operatorname{cotg} b$ (note a inversão do sinal de desigualdade)
- Se $a \leq b$, então $\operatorname{arccotg} a \geq \operatorname{arccotg} b$ (note a inversão do sinal de desigualdade)

As soluções das inequações são:

(a) $Sol = [-1, 1]$ [*Comentário:* Note das observações acima que $\operatorname{arcsen} x \leq \frac{\pi}{2} > 5$]

(b) $Sol = [-1, 1]$ [*Comentário:* Note das observações acima que $\operatorname{arcsen} x \geq -\frac{\pi}{2} > -2$]

(c) $Sol = [\frac{1}{4}, 1]$ [*Dica:* Calcule o coseno de cada lado, levando em consideração a observação do item 12d acima e também que $-1 \leq x \leq 1$]

(d) $Sol = (-\sqrt{3}, +\infty)$ [*Dica:* Calcule a tangente de cada lado, levando em consideração a observação do item 12f acima e também que $x \in \mathbb{R}$]

(e) $Sol = (-\infty, \operatorname{cotg} 2)$ [*Dica:* Calcule a cotangente de cada lado, levando em consideração a observação do item 12h acima e também que $x \in \mathbb{R}$]

(f) $Sol = [-1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ [*Dica:* Calcule seno ou coseno de cada lado, tomando os devidos cuidados com o sinal da desigualdade em função da sua escolha e lembrando que $-1 \leq x \leq 1$. *Cuidado:* Após dar conta da parte trigonométrica, chegará em uma desigualdade que demanda atenção: para elevar ao quadrado ambos os membros de uma desigualdade, eles devem ter o mesmo sinal!]

(g) Desse item, apresento a resolução. Mas antes de ver a resolução, sugiro que você esboce os gráficos de $\arctan x$ e $\operatorname{arccotg} x$, no mesmo plano cartesiano, e identifique o tipo de solução que espera ocorrer. Isso é um bom exercício, além de ser uma boa prática, pois sempre ajuda termos uma expectativa mais ou menos clara do que pode acontecer num problema.

Dito isso, sigamos para a solução.

- Primeiro, note que o domínio da inequação é $\mathbb{R}$
- Se observarmos que, para $x \leq 0$ temos $\arctan x \leq 0 \leq \operatorname{arccotg} x$, vemos de cara que as soluções são necessariamente positivas. Vamos então nos restringir ao estudo do caso $x > 0$.
- Calculemos a tangente[1] em cada membro, observando que ambos estão no in-

[1]Poderíamos escolher calcular a cotangente, daria na mesma, desde que tomados os mesmos cuidados.

tervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, no qual a tangente é crescente. Temos:

$$\tan(\arctan x) > \tan(\operatorname{arccotg} x)$$

$$x > \frac{1}{x}$$

$$x^2 > 1 \qquad \text{(aqui estou usando o fato de que } x > 0\text{)}$$

$$x > 1 \qquad \text{(idem)}$$

- Em conclusão, $Sol = (1, +\infty)$

Observação: Você poderia se perguntar ”mas e se eu não tivesse observado que $x \leq 0$ não é solução, calculando direto a tangente de ambos os lados”? E a resposta é: você teria cometido um erro. Explico.

Ao fazer a passagem de

$$\arctan x > \operatorname{arccotg} x$$

para

$$\tan(\arctan x) > \tan(\operatorname{arccotg} x)$$

é fundamental sabermos que a função tangente é crescente no intervalo em que estamos trabalhando. Mas isso não é verdade para qualquer valor de x.
De fato, quando $x \leq 0$, temos:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan x \leq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arccotg} x \leq \pi$$

Se você observar o gráfico de $\tan x$, verá que essa função é crescente em cada um desses intervalos, mas **não na união desses intervalos**! Em outras palavras, para $x \leq 0$, mesmo sabendo que $\arctan x > \operatorname{arccotg} x$, não temos nenhum controle sobre a desigualdade entre $\tan(\arctan x)$ e $\tan(\operatorname{arccotg} x)$. Ou seja, esse método não funciona e precisamos analisar esse caso de outro jeito (que foi o que fizemos e que se você reparar, é bem simples e direto).

13. *Dica:* Neste exercício, considere as observações do Exercício 12 acima e as fórmulas trigonométricas para soma e diferença de arcos.

    (a) $\frac{\sqrt{15}}{8}$

    (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

    (c) $\frac{77}{85}$

    (d) $4\sqrt{5}$

    (e) $\pi - 2$ [*Comentário:* À primeira vista, poderia parecer que $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2) = 2$, mas é preciso observar domínios e imagens das funções envolvidas: o arco de medida 2 encontra-se no segudo quadrante, pois $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, logo está fora da imagem da função $\operatorname{arcsen} x$. Deve-se portanto, nesse caso, buscar o (único) arco entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ que tenha seno igual a $\operatorname{sen} 2$.]

(f) $\frac{1+2\sqrt{30}}{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}$

14. Como se trata de demonstrações, não há um gabarito. Passarei então a ideia principal para encaminhar a demonstração em cada item. Quanto aos três primeiros itens, para simplificar a descrição, denotarei com α o arco à esquerda na expressão considerada e com β o arco à direita.

   (a) Observe que $\alpha \in [-\pi, \pi]$ (por que?) e $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Logo, para que esses dois arcos sejam iguais, devemos verificar duas coisas:

   - $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$;
   - $\cos \alpha = \cos \beta$

   [*Questão:* Por que não é suficiente verificar somente uma das igualdades acima?]

   (b) Analogamente, temos que $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $\beta \in [0, \pi]$. Logo, para que esses dois arcos sejam iguais, devemos verificar duas coisas:

   - $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$;
   - $\cos \alpha = \cos \beta$

   (c) Mais uma vez, $\alpha \in (-\pi, \pi)$ e $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Desse vez, para verificar que esses dois arcos sejam iguais, convém verificar:

   - $\tan \alpha = \tan \beta$;
   - $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$ (ou, alternativamente) $\cos \alpha = \cos \beta$

   (d) *Sugestão:* Ponha $a = \operatorname{sen}^2 \alpha$ e $b = \cos^2 \alpha$, notando que desse modo $a + b = 1$. Desenvolva a expressão $(a + b)^3$.

   (e) *Comentário:* Esse item é cálculo direto, bastando desenvolver as expressões trigonométricas.

15. Em cada idem, está identificado: o tipo de indeterminação, a solução e, em alguns casos, dicas para a solução. Os produtos notáveis envolvidos[2] são:

   - $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
   - $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
   - $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + a^2b^{k-3} + ab^{k-2} + b^{k-1})$

   Os limites fundamentais são:

   - (trigonométrico)
   $$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$
   - (exponencial)
   $$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

   Soluções:

   (a) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; $Sol = -4$; use produtos notáveis

   (b) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; $Sol = -2$; use produtos notáveis

   (c) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; $Sol = \frac{3}{2}$; use produtos notáveis

[2]Note que produtos notáveis podem ser usados para fatorar uma dada expressão ou para multiplicar tal expressão pelo seu *conjugado*.

(d) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= 0$; use limite fundamental trigonométrico e fatoração

(e) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= 0$; use fatoração

(f) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= \frac{m}{n}$; use produtos notáveis

(g) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= \pi$; *Dica:* Observe que $\tan \pi x = \tan(\pi x + 2\pi)$ e use limite fundamental trigonométrico, observando que a expressão pode ser reescrita como

$$\pi \, \frac{\tan \pi(x+2)}{\pi(x+2)}$$

(h) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$; simplesmente escreva a tangente em função de seno e coseno e desenvolva algebricamente

(i) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= -\operatorname{sen} b$; use limite fundamental trigonométrico, mas antes, use a fórmula de Prostaférese

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

(j) *Ind.* $[0 \cdot \infty]$; *Sol* $= \frac{1}{4}$; use limite fundamental trigonométrico

(k) *Ind.* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; *Sol* $= \frac{1}{2}$

(l) *Ind.* $[\infty - \infty]$; *Sol* $= +\infty$; coloque em evidência o termo de grau maior

(m) *Ind.* $[\infty - \infty]$; *Sol* $= \frac{1}{2}$; use produtos notáveis, depois resolva a nova indeterminação que aparecerá

(n) *Ind.* $\left[\frac{0}{0}\right]$; *Sol* $= -\infty$; fatore e use limite fundamental trigonométrico

(o) *Ind.* $[1^\infty]$; *Sol* $= e^k$; use a substituição $u = \frac{k}{x}$ (ou $u = \frac{x}{k}$, como preferir) e em seguida o limite fundamental exponencial

(p) *Ind.* $[1^\infty]$; *Sol* $= e$; use a subsituição $u = \operatorname{arcsen} x$ e em seguida os limites fundamentais trigonométrico e exponencial