

FUV - 1ª Avaliação - Turma A - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível A

1 — Seja dada a curva de equação $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$.

- Determine a equação das retas tangentes a essa curva nos pontos $(\frac{c}{4}, \frac{c}{4})$ e $(0, c)$ (para fins do item a seguir, denote a primeira delas por r).
- Considere o gráfico da função $y = \arctan(x)$ e determine em quais pontos desse gráfico a reta tangente é paralela à reta r acima encontrada.
- Mostre que a soma (das coordenadas) dos interceptos de qualquer reta tangente à curva (do enunciado) é sempre c .

2 — Uma escada com 10 m de comprimento está apoiada contra uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma velocidade de 2 m/s , quão rápido está variando o ângulo entre o topo da escada e a parede quando tal ângulo é $\pi/4$?

3 — Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

4 — Uma pessoa encontra-se num ponto A na margem de um rio e deseja atravessar até a outra margem, chegando num ponto B que fica 8 km rio abaixo. Chame de C o ponto da margem oposta mais próximo ao ponto A (chega-se nele atravessando perpendicularmente o rio). Essa pessoa pode atravessar o rio até o ponto mais próximo C e seguir caminhando até o ponto B , ir diretamente de barco ao ponto B ou atravessar de barco até um ponto intermediário D entre C e B e completar o caminho andando. Sabendo que a largura do rio é de 3 km , que a velocidade de remada é de 6 km/h e a de caminhada é de 8 km/h , determine o ponto de chegada D do barco na margem oposta de modo que o tempo total do percurso seja o menor possível. [Para fins de avaliação numérica, assumo $\sqrt{7} \approx 2,7$ e $\sqrt{73} \approx 8,5$]

5 — Seja dada a função

$$f(x) = x^{5/3} - 2x^{2/3}$$

- Determine seu domínio, seus interceptos e suas eventuais simetrias.
- Estude se a função possui assíntotas e determine-as se for o caso.
- Estude a monotonia da função e seus pontos críticos. Calcule o valor da função nesses pontos.
- Estude a concavidade da função e seus pontos de inflexão. Calcule o valor da função nesses pontos.
- Determine os extremos locais da função.
- (*) Estude o comportamento da derivada próximo ao ponto $x = 0$.
- Com base nas informações acima, esboce o gráfico da função.

FUV - 1ª Avaliação - Turma A - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível B

1 — Sob certas condições, uma fake news se espalha segundo a equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + 10 e^{-t/2}}$$

onde $p(t)$ denota a proporção da população que já tomou conhecimento da fake news no instante t (expresso em horas).

- Determine a taxa de espalhamento da fake news no instante genérico t .
- Segundo esse modelo, qual a taxa de espalhamento da fake news no momento em que é lançada?

2 — Seja dada a função

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Determine quantas são as retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passam pelo ponto $(3,3)$. Para cada reta, escreva sua equação e identifique as coordenadas do ponto de tangência com o gráfico de $f(x)$.

3 — Uma pessoa encontra-se num ponto A na margem de um rio e deseja atravessar até a outra margem, chegando num ponto B que fica 8 km rio abaixo. Chame de C o ponto da margem oposta mais próximo ao ponto A (chega-se nele atravessando perpendicularmente o rio). Essa pessoa pode atravessar o rio até o ponto mais próximo C e seguir caminhando até o ponto B , ir diretamente de barco ao ponto B ou atravessar de barco até um ponto intermediário D entre C e B e completar o caminho andando. Sabendo que a largura do rio é de 3 km, que a velocidade de remada é de 6 km/h e a de caminhada é de 8 km/h, determine o ponto de chegada D do barco na margem oposta de modo que o tempo total do percurso seja o menor possível. [Para fins de avaliação numérica, assumo $\sqrt{7} \approx 2,7$ e $\sqrt{73} \approx 8,5$]

4 — Considere a função $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

- Determine as assíntotas de $g(x)$, caso existam.
- Determine os intervalos de monotonia da função e seus extremos locais, caso existam. Calcule o valor da função nesses pontos.
- Determine os intervalos de concavidade da função e seus pontos de inflexão, caso existam. Calcule o valor da função nesses pontos.
- Esboce o gráfico da função $g(x)$ com base nos dados acima.

FUV - 1ª Avaliação - Turma A - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível C

1 — Sejam dadas as funções $a(x) = \sqrt{x-1}$ e $b(x) = \arctan x$.

- Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de $a(x)$ no ponto $(5, 2)$.
- Determine em quais pontos do gráfico de $b(x)$ a reta tangente é paralela à reta r (obs.: indique as coordenadas de tais pontos).

2 — Uma partícula se move segundo a equação horária abaixo, em que $t \geq 0$ é medido em segundos, $s(t)$ em metros.

$$s(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

- Encontre a velocidade no instante genérico t .
- Determine o(s) momento(s) em que a partícula está em repouso.
- Encontre a distância total percorrida nos primeiros 8 segundos (atenção: pede-se a *distância* efetivamente percorrida, não o *deslocamento*).

3 — O gráfico abaixo representa a derivada $f'(x)$ de uma certa função (desconhecida) $f(x)$.

(Considere valores aproximados das abscissas para as respostas)

- Em quais intervalos $f(x)$ é crescente? Explique.
- Em quais pontos a função $f(x)$ possui máximos e mínimos locais?
- Em quais intervalos a função $f(x)$ é côncava para baixo? E para cima? Explique.
- Quais as abscissas dos pontos de inflexão? Explique.

4 — Dada a função $g(x) = (x+3)\sqrt[3]{x}$, determine:

- Os intervalos de monotonia da função e seus pontos críticos
- Os pontos e máximos e mínimos locais, se existirem, e os valores da função nesses pontos
- Os intervalos de concavidade da função
- Os pontos de inflexão, caso existam, e os valores de $g(x)$ e de $g'(x)$ nesses pontos
- Esboce o gráfico da função, com base nos dados acima

[Para fins de avaliação numérica, assumamos $\sqrt[3]{2} \approx 1,3$, $\sqrt[3]{3} \approx 1,4$, $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$, $\sqrt[3]{9} \approx 2,1$]

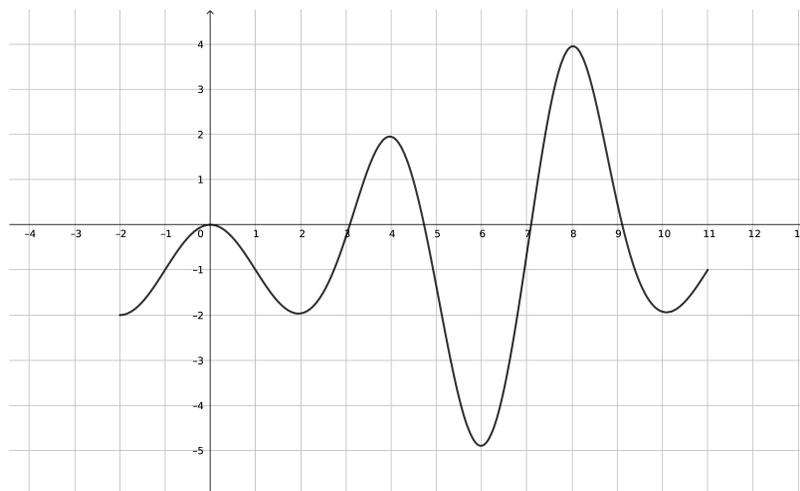


Figura 1: Gráfico para a Questão 3

FUV - 1ª Avaliação - Turma A - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Esboço de Gráfico

