FUV - 1ª Avaliação - Turma A1 - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível A

1 — Seja dada a curva de equação $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$.

a) Determine a equação das retas tangentes a essa curva nos pontos $(\frac{c}{4}, \frac{c}{4})$ e $(0, c)$ (para fins do item a seguir, denote a primeira delas por r).

b) Considere o gráfico da função $y = \arctan(x)$ e determine em quais pontos desse gráfico a reta tangente é paralela à reta r acima encontrada.

c) Mostre que a soma (das coordenadas) dos interceptos de qualquer reta tangente à curva (do enunciado) é sempre c.

2 — Uma partícula se move ao longo da curva de equação $y = \sqrt{1 + x^3}$. Quando ela atinge o ponto $(2, 3)$, a ordenada y está crescendo a uma taxa de $4\,cm/s$. Quão rápido está variando a abscissa x do ponto naquele instante?

3 — Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a| \quad \forall\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

4 — Uma pessoa encontra-se num ponto A na margem de um rio e deseja atravessar até a outra margem, chegando num ponto B que fica 8 km rio abaixo. Chame de C o ponto da margem oposta mais próximo ao ponto A (chega-se nele atravessando perpendicularmente o rio). Essa pessoa pode atravessar o rio até o ponto mais próximo C e seguir caminhando até o ponto B, ir diretamente de barco ao ponto B ou atravessar de barco até um ponto intermediário D entre C e B e completar o caminho andando. Sabendo que a largura do rio é de 3 km, que a velocidade de remada é de 6 km/h e a de caminhada é de 8 km/h, determine o ponto de chegada D do barco na margem oposta de modo que o tempo total do percurso seja o menor possível. [Para fins de avaliação numérica, assuma $\sqrt{7} \approx 2,7$ e $\sqrt{73} \approx 8,5$]

5 — Seja dada a função

$$f(x) = x^{5/3} - 2x^{2/3}$$

a) Determine seu domínio, seus interceptos e suas eventuais simetrias.

b) Estude se a função possui assíntotas e determine-as se for o caso.

c) Estude a monotonia da função e seus pontos críticos. Calcule o valor da função nesses pontos.

d) Estude a concavidade da função e seus pontos de inflexão. Calcule o valor da função nesses pontos.

e) Determine os extremos locais da função.

f) (*) Estude o comportamento da derivada próximo ao ponto $x = 0$.

g) Com base nas informações acima, esboce o gráfico da função.

FUV - 1^a Avaliação - Turma A1 - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível B

1 — Descreva três situações distintas em que uma função *não* é derivável em algum ponto. Se possível, dê um exemplo de cada situação.

2 — Sejam dadas as funções

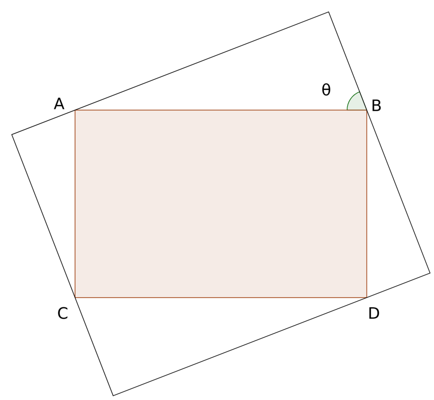
$$a(x) = \frac{x}{x+1} \quad \text{e} \quad b(x) = \arctan x$$

a) Determine quantas são as retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ que passam pelo ponto $(3, 3)$.

b) Para cada reta do item anterior, escreva sua equação e identifique as coordenadas do ponto de tangência com o gráfico de $a(x)$.

c) Determine em quais pontos do gráfico de $b(x)$ a reta tangente é paralela a alguma das retas anteriores.

3 — Na figura abaixo, é dado um retângulo (fixo) $ABCD$ de lados u e v e um retângulo (genérico) circunscrito ao retângulo $ABCD$. O lado do retângulo circunscrito que encontra o vértice B do retângulo $ABCD$ forma um ângulo θ com o lado AB.



a) Mostre que a área do retângulo circunscrito pode ser expressa por $A(\theta) = uv + (u^2 + v^2)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

b) Determine o retângulo circunscrito de área máxima e o valor dessa área máxima

4 — Considere a função $f : (0, +\infty)\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

a) Determine as assíntotas de $f(x)$, caso existam.

b) Determine os intervalos de monotonia da função e seus extremos locais, caso existam. Calcule o valor da função nesses pontos.

c) Determine os intervalos de concavidade da função e seus pontos de inflexão, caso existam. Calcule o valor da função nesses pontos.

d) Esboce o gráfico da função $f(x)$ com base nos dados acima.

FUV - 1ª Avaliação - Turma A1 - 01/04/2019 - Prof. Armando Caputi

Nível C

1 — Sejam dadas as funções $a(x) = \sqrt{x+1}$ e $b(x) = \arctan x$.

a) Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de $a(x)$ no ponto $(3,2)$.

b) Determine em quais pontos do gráfico de $b(x)$ a reta tangente é paralela à reta r
(obs.: indique as coordenadas de tais pontos).

2 — Uma partícula se move segundo a equação horária abaixo, em que $t \geq 0$ é medido em segundos, $s(t)$ em metros.

$$s(t) = t^3 - 12t + 10$$

a) Encontre a velocidade no instante genérico t.

b) Determine o(s) momento(s) em que a partícula está em repouso.

c) Encontre a distância total percorrida nos primeiros 5 segundos (atenção: pede-se a *distância* efetivamente percorrida, não o *deslocamento*).

3 — O gráfico abaixo representa a derivada $f'(x)$ de uma certa função (desconhecida) $f(x)$.
(*Considere valores aproximados das abscissas para as respostas*)

a) Em quais intervalos $f(x)$ é crescente? Explique.

b) Em quais pontos a função $f(x)$ possui máximos e mínimos locais?

c) Em quais intervalos a função $f(x)$ é côncava para baixo? E para cima? Explique.

d) Quais as abscissas dos pontos de inflexão? Explique.

4 — Dada a função $g(x) = (x+3)\sqrt[3]{x}$, determine:

a) Os intervalos de monotonia da função e seus pontos críticos

b) Os pontos e máximos e mínimos locais, se existirem, e os valores da função nesses pontos

c) Os intervalos de concavidade da função

d) Os pontos de inflexão, caso existam, e os valores de $g(x)$ e de $g'(x)$ nesses pontos

e) Esboce o gráfico da função, com base nos dados acima

[Para fins de avaliação numérica, assuma $\sqrt[3]{2} \approx 1,3$, $\sqrt[3]{3} \approx 1,4$, $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$, $\sqrt[3]{9} \approx 2,1$]

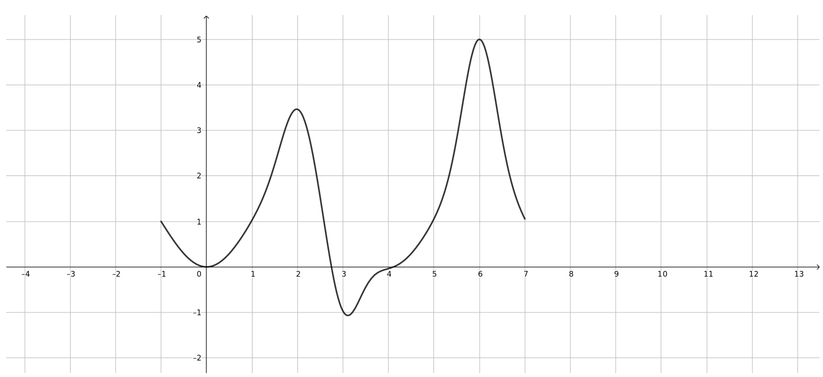


Figura 1: Gráfico para a Questão 3

RASCUNHO