FUV - 1^a Avaliação (resolvida) - Turma A - - Prof. Armando Caputi

Nível C

1 — Sejam dadas as funções $a(x) = \sqrt{x-1}$ e $b(x) = \arctan x$.

a) Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de $a(x)$ no ponto $(5, 2)$.

b) Determine em quais pontos do gráfico de $b(x)$ a reta tangente é paralela à reta r (obs.: indique as coordenadas de tais pontos).

Solução:
(a) A reta tangente em $(5, 2)$ tem coeficiente angular dado pelo valor da derivada $a'(5)$. Assim, a equação da reta r tem a forma

$$y - 2 = a'(5)\,(x - 5)$$

Como

$$a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

resulta $a'(5) = \frac{1}{4}$, donde a equação da reta r é dada por

$$y - 2 = \frac{x-5}{2}$$

(b) Duas retas são paralelas quando seus coeficientes angulares são iguais. Assim, precisamos buscar os pontos do gráfico de $b(x)$ em que a reta tangente tem coeficiente angular $\frac{1}{4}$, ou seja, sabendo que

$$b'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

precisamos resolver a equação

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{4}$$

Encontramos duas soluções, $x = \pm\sqrt{3}$, obtendo os pontos

$$(-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}) \quad \text{e} \quad (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$$

em que usamos o fato de que $\arctan(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\pi}{3}$. □

2 — Uma partícula se move segundo a equação horária abaixo, em que $t \geq 0$ é medido em segundos, $s(t)$ em metros.

$$s(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$$

a) Encontre a velocidade no instante genérico t.

b) Determine o(s) momento(s) em que a partícula está em repouso.

c) Encontre a distância total percorrida nos primeiros 8 segundos (atenção: pede-se a *distância* efetivamente percorrida, não o *deslocamento*).

Solução:

(a) A velocidade é dada por

$$v(t) = s'(t) = \cdots = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

(b) O respouso se dá quando $v(t) = 0$, isto é, quando $1 - t^2 = 0$. Como $t \in [0, +\infty)$, o instante em que a partícula está em repouso é $t = 1$.

(c) Observando que $v(t) \geq 0$ até o instante $t = 1$ e, após, $v(t) \leq 0$, a distância total percorrida nos primeiros 8 segundos é

$$d = |s(1) - s(0)| + |s(8) - s(1)| = (s(1) - s(0)) + (s(1) - s(8)) = \frac{1}{2} + \frac{49}{130} = \frac{57}{65}$$

$\square$

---

3 — O gráfico abaixo representa a derivada $f'(x)$ de uma certa função (desconhecida) $f(x)$. (*Considere valores aproximados das abscissas para as respostas*)

a) Em quais intervalos $f(x)$ é crescente? Explique.

b) Em quais pontos a função $f(x)$ possui máximos e mínimos locais?

c) Em quais intervalos a função $f(x)$ é côncava para baixo? E para cima? Explique.

d) Quais as abscissas dos pontos de inflexão? Explique.

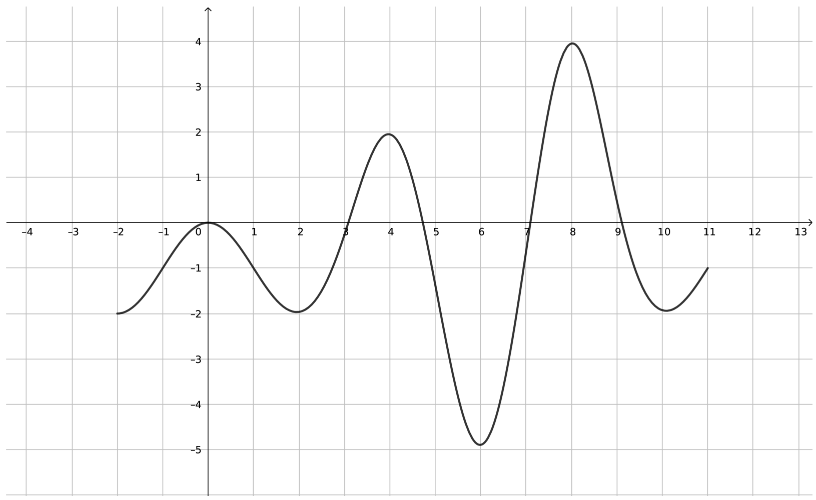


Figura 1: Gráfico para a Questão 3

Solução:
(a) A função é crescente quando sua derivada é positiva. Pelo gráfico de $f'(x)$, vemos que isso acontece nos intervalos $(3, 4.7)$ e $(7.1, 9.1)$. Assim, a função $f(x)$ é crescente nos intervalos

$$[3, 4.7] \quad \text{e} \quad [7.1, 9.1]$$

(b) Os pontos críticos de $f(x)$ são aqueles em que não existe a derivada (não há pontos assim) ou sua derivada se anula: $0, 3, 4.7, 7.1, 9.1$.

1. Mínimos locais ocorrem quando a função é decrescente à esquerda do ponto crítico e crescente à direita (isto é, "chega"decrescendo, "sai"crescendo). Em termos de derivada, quando $f'(x)$, ao passar pelo ponto crítico, vai de negativa e positiva. Isso ocorre nos pontos $x = 3$ e $x = 7.1$.

2. Máximos locais ocorrem quando a função é crescente à esquerda do ponto crítico e decrescente à direita (isto é, "chega"crescendo, "sai"decrescendo). Em termos de derivada, quando $f'(x)$, ao passar pelo ponto crítico, vai de positiva e negativa. Isso ocorre nos pontos $x = 4.7$ e $x = 9.1$.

3. No ponto $x = 0$, a função não assume extremo local, pois o sinal da derivada é igual em ambos os lados (no caso, negativo). Na verdade, a função é decrescente em todo o intervalo $[-2, 3]$.

(c) A concavidade da função é indentificada a partir do sinal da segunda derivada $f''(x)$. Este, por sua vez, identifica a monotonia de $f'(x)$. Assim:

1. $f(x)$ é côncava para cima quando $f''(x) > 0$, isto é, quando $f'(x)$ é crescente. Isso ocorre nos intervalos $[-2, 0]$, $[2, 4]$, $[6, 8]$, $[10, 11]$

2. $f(x)$ é côncava para baixo quando $f''(x) < 0$, isto é, quando $f'(x)$ é decrescente. Isso ocorre nos intervalos $[0, 2]$, $[4, 6]$, $[8, 10]$

(d) Pontos de inflexão são aqueles em que há mudança de concavidade. Pela análise no item anterior, as abscissas desses pontos são $0, 2, 4, 6, 8, 10$.

Obs.: É importante observar que nos pontos de mínimo ou máximo locais, assim como no de inflexão, não temos como saber os **valores** de $f(x)$, uma vez que o conhecimento da derivada de uma função é insuficiente para determinar univocamente uma função (idea que foi consolidada mais adiante no curso, através do conceito de integral indefinida).

□

---

4 — Dada a função $g(x) = (x+3)\sqrt[3]{x}$, determine:

a) Os intervalos de monotonia da função e seus pontos críticos

b) Os pontos e máximos e mínimos locais, se existirem, e os valores da função nesses pontos

c) Os intervalos de concavidade da função

d) Os pontos de inflexão, caso existam, e os valores de $g(x)$ e de $g'(x)$ nesses pontos

e) Esboce o gráfico da função, com base nos dados acima

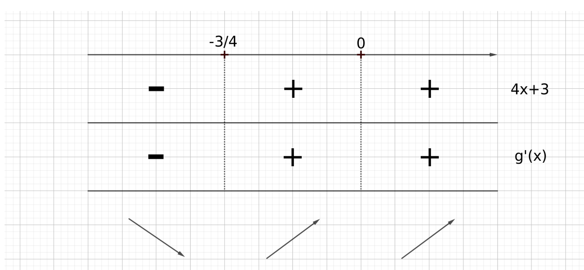
[Para fins de avaliação numérica, assuma $\sqrt[3]{2} \approx 1,3$, $\sqrt[3]{3} \approx 1,4$, $\sqrt[3]{4} \approx 1,6$, $\sqrt[3]{9} \approx 2,1$]

Solução:
(a) Estudemos os zeros e o sinal da derivada:

$$g(x) = (x+3)\sqrt[3]{x} = x^{4/3} + 3x^{1/3}$$

$$g'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} + x^{-2/3} = \cdots = \frac{4x+3}{3x^{2/3}}$$

Os pontos críticos são $x = 0$ (onde a derivada não existe) e $x = -\frac{3}{4}$ (onde a derivada se anula). O sinal da derivada depende somente do sinal da expressão $4x + 3$ (pois o denominador é sempre positivo), logo a monotonia é dada conforme o diagrama abaixo:



Ou seja: $g(x)$ é descrescente no intervalo $(-\infty, -\frac{3}{4}]$ e crescente em $[-\frac{3}{4}, +\infty)$.

Observação: Se considerarmos somente o sinal da derivada, o diagrama acima nos permitiria concluir que $g(x)$ é crescente em $[-\frac{3}{4}, 0)$ e em $(0, +\infty)$, mas não em $[-\frac{3}{4}, +\infty)$. Para podermos concluir isso, usamos o fato de que $g(x)$ é contínua em $x = 0$. Por esse motivo, vale que $g(x)$ é crescente em $[-\frac{3}{4}, 0]$ e em $[0, +\infty)$ (note que agora são intervalos fechados em 0), donde em $[-\frac{3}{4}, +\infty)$.

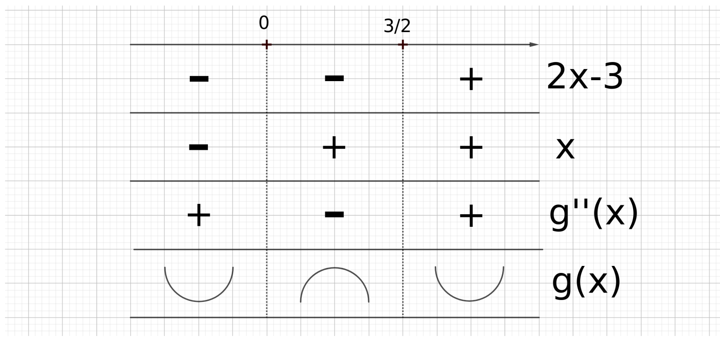
(b) Ainda do diagrama anterior, identificamos o ponto como $x = -\frac{3}{4}$ como um *mínimo* local, pois a função é descrescente à esquerda desse ponto e crescente à direita ("chega descrescendo, sai crescendo"). Já o ponto $x = 0$ não é extremo local, pois a função é crescente antes e depois desse ponto. Temos ainda

$$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \approx -2,05$$

(c) Para estudar a concavidade, precisamos da derivada segunda da função:

$$g''(x) = \frac{4.3x^{2/3} - (4x+3).2x^{-1/3}}{9x^{4/3}} = \cdots = \frac{2(2x-3)}{9x^{5/3}}$$

A segunda derivada se anula em $x = \frac{2}{3}$ e o seu sinal depende do sinal de $2x - 3$ e do sinal de x (note que o sinal de x e de x^5 é o mesmo, tanto faz qual usamos para o estudo do sinal de $g''(x)$). Temos o diagrama abaixo:



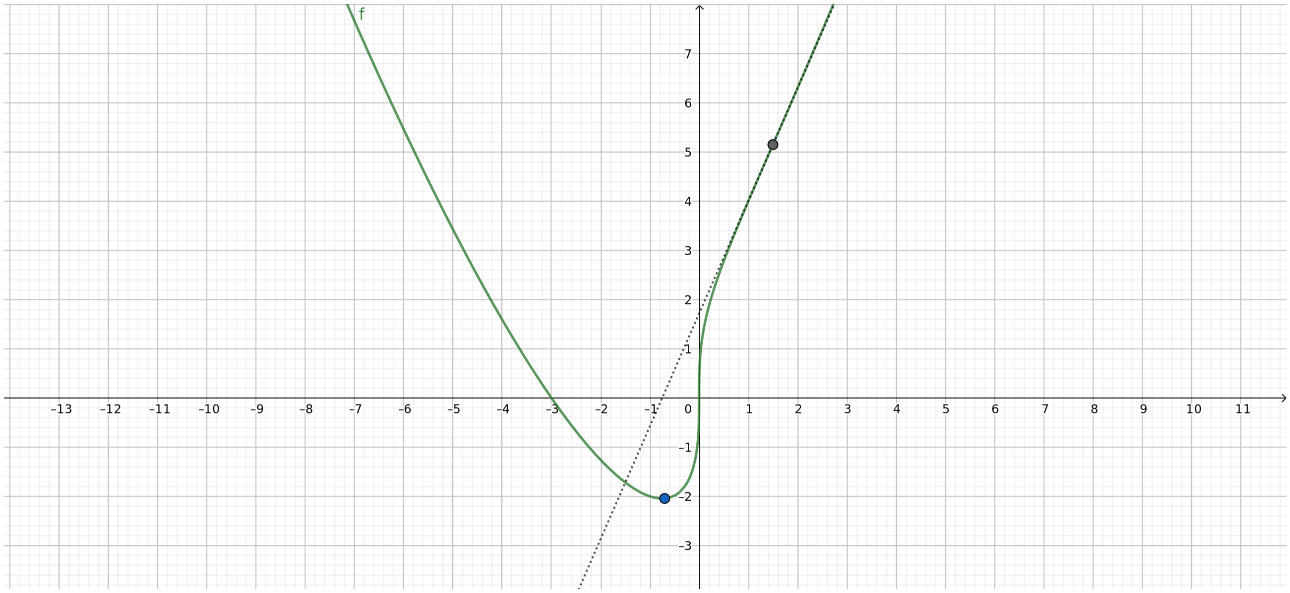
Assim, $g(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 0]$ e em $[3/2, +\infty)$, côncava para baixo em $[0, 3/2]$.

(d) Pontos de inflexão são aqueles em que há mudança de concavidade. Pelo diagrama acima, vemos que há dois pontos de inflexão: $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$. Temos, ainda:

$$g(0) = 0 \qquad \nexists g'(0)$$

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 5,15 \qquad g'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \approx 2,29$$

(e) Gráfico



No gráfico acima estão destacados: o ponto de mínimo local (que resulta, na verdade, global) e o segundo ponto de inflexão ($x = 3/2$). Além disso, só a título de ilustração (de como usar a informação do valor da derivada noponto de inflexão) está traçada (em linha pontilhada) a reta tangente ao gráfico nesse ponto de inflexão, cuja inclinação é $g'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

$\square$