

Conjuntos Numéricos

Armando Caputi

E-mail: armando.caputi@ufabc.edu.br

Página: <http://professor.ufabc.edu.br/~armando.caputi>

Sala 549-2 - Bloco A - Campus Santo André



Universidade Federal do ABC

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

- Operação de *soma*
- Operação de *multiplicação*
- Relação de *ordem*

As propriedades dessas estruturas algébricas são bem conhecidas, mas serão revistas ao tratarmos do conjunto dos Números Reais.

Símbolos

Outros Símbolos

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\}$$

$$\mathbb{Q}_- = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}$$

Números naturais

O conjunto \mathbb{N} dos números naturais é caracterizado por:

- (1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.
- (2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.
- (3) Existe um único número natural, denotado por 0, que não é sucessor de nenhum outro.
- (4) Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $0 \in X$ e, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X , então $X = \mathbb{N}$.

Observação: A propriedade (axioma) 4 também é conhecida como *Princípio de Indução Finita*.

Princípio de Indução Finita

Motivação

Demonstrar propriedades *sobre* números naturais ou propriedades que *se expressam através* de números naturais.

Exemplos:

- $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos (i.e. $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$);
- A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é $(n-2)\pi$ radianos.

Princípio de Indução Finita

Analogia da fileira de dominós



Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k , $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- A primeira condição é chamada de *caso base*;
- A segunda condição é denominada *passo de indução*.
- No passo de indução, faz-se uma demonstração direta para obter $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Se

- $P(n_0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, $\forall n \geq 1$

Formulação da propriedade \rightarrow

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k + 1)$ é verdadeira. Isto é

$$\text{Hipótese de Indução - HI: } 1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$$

$$\text{Tese: } 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + [(2(k + 1) - 1)] = (k + 1)^2$$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] &= \\ 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] &\stackrel{HI}{=} k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 1$.

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, para todo $k \geq 3$

Tome $k \geq 3$:

$$2k + 1 \leq 2^k \quad (\text{Hipótese de Indução - HI})$$

$$2(k + 1) + 1 \leq 2^{k+1} \quad (\text{Tese})$$

$$2(k + 1) + 1 = 2k + 2 + 1$$

$$2k + 1 + 2 \stackrel{HI}{\leq} 2^k + 2$$

$$\leq 2^k + 2^k$$

$$= 2 \cdot 2^k$$

$$= 2^{k+1}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 3$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$): $P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$

Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad (\text{Hipótese de Indução - HI})$$

Vamos mostrar que $P(k + 1)$ é verdadeira, isto é

$$(k + 1)^2 < 2^{k+1} \quad (\text{Tese})$$

$$\begin{aligned} (k + 1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ k^2 + 2k + 1 &\stackrel{HI}{<} 2^k + 2k + 1 \\ &\leq 2^k + 2^k \quad (\text{exemplo anterior}) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 5$.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base ($n = 0$): $P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é \emptyset e o único subconjunto de \emptyset é o próprio \emptyset .

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.

(HI)

Em seguida, mostre que $P(k + 1)$ é verdadeira, isto é

Todo conjunto com $k + 1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

(continua)

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.

Tese: Todo conjunto com $k + 1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

Considere X um conjunto qualquer com $k + 1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.

A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a .

Vamos contar quantos são esses últimos (os que não contêm a). Como $X \setminus \{a\}$ tem k elementos, de HI segue que $\wp(X \setminus \{a\})$ tem 2^k elementos.

Da observação acima segue, portanto, que $\wp(X)$ tem $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos, confirmando que vale $P(k + 1)$.

Desse forma, provamos o passo indutivo, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n .

Exemplo

Dados n ($n \geq 2$) objetos de pesos distintos, mostre que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo, no máximo, $2n - 3$ pesagens em uma balança de dois pratos.

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n)$: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre n objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2n - 3$ pesagens.

(1) Caso base ($n = 2$): $P(2)$ é verdadeira, pois uma só pesagem já é suficiente para saber, dentre dois objetos, qual é o mais leve e qual é o mais pesado.

(continua)

Exemplo - continuação

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Tome $k \geq 2$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é: **É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre k objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2k - 3$ pesagens (HI)**

Em seguida, mostre que $P(k + 1)$ é verdadeira, isto é: **É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre $k + 1$ objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2(k + 1) - 3$ pesagens.**

(continua)

Exemplo - continuação

Sejam dados $k + 1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X). Pela HI, dentre os restantes, bastam $2k - 3$ pesagens para determinar o mais leve (L) e o mais pesado (P). Agora, com mais duas pesagens, podemos comparar X com L e P e assim determinar o mais leve e o mais pesado dentre os $k + 1$ objetos iniciais. Note que, ao todo, foram feitas (no máximo) $2k - 3 + 2$ pesagens, isto é, $2(k + 1) - 3$ pesagens. Donde $P(k + 1)$ é verdadeira.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira $\forall n \geq 2$.

Outros Exemplos

(1) A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados ($n \geq 3$) é $(n - 2)\pi$

$$(2) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

$$(3) n! \geq (2n)^2, \quad \forall n \geq 5$$

Alguns cuidados

- $P(n) : n = 1$ (satisfaz a primeira condição, mas não a segunda)
- $Q(n) : n > n + 1$ (satisfaz a segunda condição, mas não a primeira)
- Todos temos a mesma idade! ("demonstração" na lousa)

PIF - Segunda versão

PIF - Segunda Versão

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n . Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(k-1) \Rightarrow P(k)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.