Conjuntos Numéricos

Armando Caputi

E-mail: armando.caputi@ufabc.edu.br
Página: http://professor.ufabc.edu.br/~armando.caputi

Sala 549-2 - Bloco A - Campus Santo André

Universidade Federal do ABC

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\} \end{aligned}$$

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}
$$

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}
$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \,|\, n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}
$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

- Operação de *soma*

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\} \\
\mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}
\end{aligned}$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

- Operação de *soma*
- Operação de *multiplicação*

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

- Operação de *soma*
- Operação de *multiplicação*
- Relação de *ordem*

Conjuntos Numéricos

Números Naturais, Inteiros e Racionais

Conjuntos Numéricos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\} \\ \mathbb{Q} &= \{\frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Estruturas algébricas

Tais conjuntos são dotados de

- Operação de *soma*
- Operação de *multiplicação*
- Relação de *ordem*

As propriedades dessas estruturas algébricas são bem conhecidas, mas serão revistas ao tratarmos do conjunto dos Números Reais.

Símbolos

Outros Símbolos

Símbolos

Outros Símbolos

$$\mathbb{N}^* \;=\; \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \ldots\}
\end{aligned}$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \ldots\} \\
\mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\}
\end{aligned}
$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\} \\
\mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \ldots\} \\
\mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{0, 1, 2, 3 \ldots\} = \mathbb{N} \\
\mathbb{Z}_- &= \{0, -1, -2, -3 \ldots\}
\end{aligned}
$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \ldots\} \\
\mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{0, 1, 2, 3 \ldots\} = \mathbb{N} \\
\mathbb{Z}_- &= \{0, -1, -2, -3 \ldots\} \\
\mathbb{Q}_+ &= \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \geq 0\}
\end{aligned}
$$

Símbolos

Outros Símbolos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}^* &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{Z}^* &= \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\} \\
\mathbb{Q}^* &= \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\
\mathbb{Z}_+ &= \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N} \\
\mathbb{Z}_- &= \{0, -1, -2, -3 \dots\} \\
\mathbb{Q}_+ &= \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0\} \\
\mathbb{Q}_- &= \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 0\}
\end{aligned}
$$

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

(2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

(2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

(3) Existe um único número natural, denotado por 0, que não é sucessor de nenhum outro.

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

(2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

(3) Existe um único número natural, denotado por 0, que não é sucessor de nenhum outro.

(4) Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $0 \in X$ e, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Números naturais

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado por:

(1) Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

(2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

(3) Existe um único número natural, denotado por 0, que não é sucessor de nenhum outro.

(4) Seja $X \subset \mathbb{N}$. Se $0 \in X$ e, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Observação: A propriedade (axioma) 4 também é conhecida como *Princípio de Indução Finita.*

Princípio de Indução Finita

Princípio de Indução Finita

Motivação

Demonstrar propriedades *sobre* números naturais ou propriedades que *se expressam através* de números naturais.

Princípio de Indução Finita

Motivação

Demonstrar propriedades *sobre* números naturais ou propriedades que *se expressam através* de números naturais.

Exemplos:

- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

Princípio de Indução Finita

Motivação

Demonstrar propriedades *sobre* números naturais ou propriedades que *se expressam através* de números naturais.

Exemplos:

- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos (i.e. $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$);

Princípio de Indução Finita

Motivação

Demonstrar propriedades *sobre* números naturais ou propriedades que *se expressam através* de números naturais.

Exemplos:

- $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;
- Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos (i.e. $|A|=n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)|=2^n$);
- A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é $(n-2)\pi$ radianos.

Princípio de Indução Finita
Analogia da fileira de dominós

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- A primeira condição é chamada de *caso base*;

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- A primeira condição é chamada de *caso base*;
- A segunda condição é denominada *passo de indução*.

Princípio de Indução Finita

PIF

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural k, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observações:

- A primeira condição é chamada de *caso base*;
- A segunda condição é denominada *passo de indução*.
- No passo de indução, faz-se uma demonstração direta para obter $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(n_0)$ é verdadeira e,

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(n_0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

PIF - caso base generalizado

PIF - caso base generalizado

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(n_0)$ é verdadeira e,
- para todo número natural $k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$
(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, para todo $k \geq 1$.

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k + 1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
Tese: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \quad =$$

Exemplo

Mostrar que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(1) Caso base ($n_0=1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1=1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$
Tese: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)+[(2(k+1)-1]=(k+1)^2$

$$1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] \quad =$$
$$1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
Tese: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k+1) - 1] = (k+1)^2$

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] \quad &= \\ 1 + 3 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] \quad &\overset{HI}{=} \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad \forall\, n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(1) Caso base ($n_0=1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1=1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$
Tese: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)+[(2(k+1)-1]=(k+1)^2$

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &= \\ 1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &\overset{HI}{=} k^2+[2(k+1)-1] \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n): 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$
Tese: $\quad 1+3+\ldots+(2k-1)+[(2(k+1)-1]=(k+1)^2$

$$\begin{aligned} 1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &= \\ 1+3+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] &\overset{HI}{=} k^2+[2(k+1)-1] \\ &= k^2+2k+1 \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$

$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Tese: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k+1) - 1] = (k+1)^2$

$$\begin{aligned}
1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] &= \\
1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] &\overset{HI}{=} k^2 + [2(k+1) - 1] \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall\ n \geq 1$

Formulação da propriedade $\rightarrow$
$P(n) : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(1) Caso base ($n_0 = 1$): $P(1)$ é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 1$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira. Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira. Isto é

Hipótese de Indução - HI: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$
Tese: $\quad 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + [(2(k+1) - 1] = (k+1)^2$

$$\begin{aligned}
1 + 3 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] &= \\
1 + 3 + \ldots + (2k-1) + [2(k+1) - 1] &\overset{HI}{=} k^2 + [2(k+1) - 1] \\
&= k^2 + 2k + 1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira $\forall\ n \geq 1$.

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k + 1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k + 1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$
$$2(k+1) + 1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k + 1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$
$$2(k+1) + 1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$
$$\begin{aligned} 2(k+1) + 1 &= 2k + 2 + 1 \\ & 2k + 1 + 2 \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $2n+1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : 2n+1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k+1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

$$2(k+1)+1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

$$\begin{aligned} 2(k+1)+1 &= 2k+2+1 \\ 2k+1+2 &\overset{HI}{\leq} 2^k+2 \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $2n + 1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : 2n + 1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k + 1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$
$$2(k+1) + 1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$
$$\begin{aligned} 2(k+1)+1 &= 2k+2+1 \\ 2k+1+2 &\overset{HI}{\leq} 2^k + 2 \\ &\leq 2^k + 2^k \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $2n+1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n): 2n+1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois
$2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k+1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$
$$2(k+1)+1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$
$$\begin{aligned} 2(k+1)+1 &= 2k+2+1 \\ 2k+1+2 &\overset{HI}{\leq} 2^k+2 \\ &\leq 2^k+2^k \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $2n+1 \leq 2^n \quad \forall\ n \geq 3$

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : 2n+1 \leq 2^n$

(1) Caso base ($n_0 = 3$): $P(3)$ é verdadeira, pois $2 \cdot 3 + 1 = 7 \leq 8 = 2^3$

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \geq 3$
Tome $k \geq 3$:

$$2k+1 \leq 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

$$2(k+1)+1 \leq 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

$$\begin{aligned} 2(k+1)+1 &= 2k+2+1 \\ 2k+1+2 &\overset{HI}{\leq} 2^k + 2 \\ &\leq 2^k + 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 3$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : n^2 < 2^n$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base $(n = 5)$:$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5.$

Formulação da propriedade $\rightarrow P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é

$$(k+1)^2 < 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\, n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é

$$(k+1)^2 < 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ k^2 + 2k + 1 &\overset{HI}{<} 2^k + 2k + 1 \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\to$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é

$$(k+1)^2 < 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ k^2 + 2k + 1 &\overset{HI}{<} 2^k + 2k + 1 \\ &\leq 2^k + 2^k \text{ (exemplo anterior)} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Exemplo

Mostrar que $n^2 < 2^n \quad \forall\ n \geq 5$.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n) : n^2 < 2^n$.

(1) Caso base ($n = 5$):$P(5)$ é verdadeira, pois $5^2 = 25 < 32 = 2^5$.

(2) Passo indutivo: Tome $k \geq 5$ arbitrário (mas fixado). Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Para isso, suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é

$$k^2 < 2^k \quad \text{(Hipótese de Indução - HI)}$$

Vamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é

$$(k+1)^2 < 2^{k+1} \quad \text{(Tese)}$$

$$\begin{aligned} (k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\ k^2 + 2k + 1 &\overset{HI}{<} 2^k + 2k + 1 \\ &\leq 2^k + 2^k \text{ (exemplo anterior)} \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 5$.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base $(n = 0)$:$P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é $\varnothing$ e o único subconjunto de $\varnothing$ é o próprio $\varnothing$.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base ($n = 0$):$P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é $\varnothing$ e o único subconjunto de $\varnothing$ é o próprio $\varnothing$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base ($n = 0$):$P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é $\varnothing$ e o único subconjunto de $\varnothing$ é o próprio $\varnothing$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é
Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos. (HI)

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base ($n = 0$):$P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é $\varnothing$ e o único subconjunto de $\varnothing$ é o próprio $\varnothing$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é
Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos. (HI)
Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é
Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

Exemplo

Mostrar que se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes tem 2^n elementos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: Se um conjunto A tem n elementos, o conjunto $\wp(A)$ tem 2^n elementos.

(1) Caso base ($n = 0$):$P(0)$ é verdadeira, pois o único conjunto com 0 elementos é $\varnothing$ e o único subconjunto de $\varnothing$ é o próprio $\varnothing$.

(2) Passo indutivo: Deve-se provar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para isso, tome $k \in \mathbb{N}$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é
Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos. (HI)
Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é
Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

(continua)

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.
Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.
Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.
A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.

A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.

Vamos contar quantos são esses últimos (os que *não* contêm a).

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.
Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.
A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.
Vamos contar quantos são esses últimos (os que *não* contêm a).
Como $X \backslash \{a\}$ tem k elementos, de HI segue que $\wp(X \setminus \{a\})$ tem 2^k elementos.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.

A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.

Vamos contar quantos são esses últimos (os que *não* contêm a).

Como $X \backslash \{a\}$ tem k elementos, de HI segue que $\wp(X \setminus \{a\})$ tem 2^k elementos.

Da observação acima segue, portanto, que $\wp(X)$ tem $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos, confirmando que vale $P(k+1)$.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.
Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.
A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.
Vamos contar quantos são esses últimos (os que *não* contêm a).
Como $X \backslash \{a\}$ tem k elementos, de HI segue que $\wp(X \setminus \{a\})$ tem 2^k elementos.
Da observação acima segue, portanto, que $\wp(X)$ tem $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos, confirmando que vale $P(k+1)$.
Desse forma, provamos o passo indutivo, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Exemplo (continuação)

HI: Todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
Tese: Todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.
Considere X um conjunto qualquer com $k+1$ elementos e escolha um elemento $a \in X$.
A ideia é observar que a quantidade de subconjuntos de X que contêm o elemento a é igual à quantidade de subconjuntos de X que não contêm o elemento a.
Vamos contar quantos são esses últimos (os que *não* contêm a).
Como $X \backslash \{a\}$ tem k elementos, de HI segue que $\wp(X \setminus \{a\})$ tem 2^k elementos.
Da observação acima segue, portanto, que $\wp(X)$ tem $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ elementos, confirmando que vale $P(k+1)$.
Desse forma, provamos o passo indutivo, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira para todo número natural n.

Exemplo

Dados n ($n \geq 2$) objetos de pesos distintos, mostre que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo, no máximo, $2n - 3$ pesagens em uma balança de dois pratos.

Exemplo

Dados n $(n \geq 2)$ objetos de pesos distintos, mostre que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo, no máximo, $2n - 3$ pesagens em uma balança de dois pratos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre n objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2n - 3$ pesagens.

Exemplo

Dados n ($n \geq 2$) objetos de pesos distintos, mostre que é possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado fazendo, no máximo, $2n - 3$ pesagens em uma balança de dois pratos.

Formulação da propriedade $\rightarrow$ $P(n)$: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre n objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2n - 3$ pesagens.

(1) Caso base ($n = 2$): $P(2)$ é verdadeira, pois uma só pesagem já é suficiente para saber, dentre dois objetos, qual é o mais leve e qual é o mais pesado.

(continua)

Exemplo - continuação

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Exemplo - continuação

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Tome $k \geq 2$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre k objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2k - 3$ pesagens (HI)

Exemplo - continuação

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Tome $k \geq 2$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre k objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2k-3$ pesagens (HI)
Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre $k+1$ objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2(k+1)-3$ pesagens.

Exemplo - continuação

(2) Passo indutivo: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.
Tome $k \geq 2$ arbitrário (mas fixado) e suponha que $P(k)$ seja verdadeira, isto é: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre k objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2k - 3$ pesagens (HI)
Em seguida, mostre que $P(k+1)$ é verdadeira, isto é: É possível determinar qual o mais leve e qual o mais pesado dentre $k+1$ objetos de pesos distintos fazendo no máximo $2(k+1) - 3$ pesagens.

(continua)

Exemplo - continuação

Sejam dados $k + 1$ objetos de pesos distintos.

Exemplo - continuação

Sejam dados $k+1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X).

Exemplo - continuação

Sejam dados $k+1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X). Pela HI, dentre os restantes, bastam $2k-3$ pesagens para determinar o mais leve (L) e o mais pesado (P).

Exemplo - continuação

Sejam dados $k+1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X). Pela HI, dentre os restantes, bastam $2k-3$ pesagens para determinar o mais leve (L) e o mais pesado (P). Agora, com mais duas pesagens, podemos comparar X com L e P e assim determinar o mais leve e o mais pesado dentre os $k+1$ objetos iniciais.

Exemplo - continuação

Sejam dados $k+1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X). Pela HI, dentre os restantes, bastam $2k-3$ pesagens para determinar o mais leve (L) e o mais pesado (P). Agora, com mais duas pesagens, podemos comparar X com L e P e assim determinar o mais leve e o mais pesado dentre os $k+1$ objetos iniciais. Note que, ao todo, foram feitas (no máximo) $2k-3+2$ pesagens, isto é, $2(k+1)-3$ pesagens. Donde $P(k+1)$ é verdadeira.

Exemplo - continuação

Sejam dados $k+1$ objetos de pesos distintos. Separe um desses objetos (chame-o X). Pela HI, dentre os restantes, bastam $2k-3$ pesagens para determinar o mais leve (L) e o mais pesado (P). Agora, com mais duas pesagens, podemos comparar X com L e P e assim determinar o mais leve e o mais pesado dentre os $k+1$ objetos iniciais. Note que, ao todo, foram feitas (no máximo) $2k-3+2$ pesagens, isto é, $2(k+1)-3$ pesagens. Donde $P(k+1)$ é verdadeira.
Do PIF segue que $P(n)$ é verdadeira $\forall\ n \geq 2$.

Outros Exemplos

(1) A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$

Outros Exemplos

(1) A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados ($n \geq 3$) é $(n-2)\pi$

(2) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Outros Exemplos

(1) A soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados $(n \geq 3)$ é $(n-2)\pi$

(2) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

(3) $n! \geq (2n)^2, \quad \forall\ n \geq 5$

Alguns cuidados

Alguns cuidados

- $P(n) : n = 1$

Alguns cuidados

- $P(n) : n = 1$ (satisfaz a primeira condição, mas não a segunda)

Alguns cuidados

- $P(n): n = 1$ (satisfaz a primeira condição, mas não a segunda)
- $Q(n): n > n + 1$

Alguns cuidados

- $P(n) : n = 1$ (satisfaz a primeira condição, mas não a segunda)
- $Q(n) : n > n + 1$ (satisfaz a segunda condição, mas não a primeira)

Alguns cuidados

- $P(n) : n = 1$ (satisfaz a primeira condição, mas não a segunda)
- $Q(n) : n > n + 1$ (satisfaz a segunda condição, mas não a primeira)
- Todos temos a mesma idade! ("demonstração" na lousa)

PIF - Segunda versão

PIF - Segunda Versão

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se

- $P(0)$ é verdadeira e,
- para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(0) \wedge P(1) \wedge \cdots \wedge P(k-1) \Rightarrow P(k)$

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.