Álgebra Linear - 1^a Avaliação - Turma A

15 de Julho de 2019 - Prof. Armando Caputi

Notações

$\text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$	:	subespaço vetorial gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$
$\mathbb{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$	:	conjunto das funções reais de uma variável real
$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$	:	conjunto dos polinômios reais de grau até n

---

1 — Expresse as condições para que um subconjunto de um espaço vetorial seja um *subespaço vetorial*. Em seguida, verifique essas condições para cada caso abaixo, concluindo se são ou não subespaços vetoriais de $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ (dê contraexemplos para condições não satisfeitas).

a) $U_1 = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$

b) $U_2 = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}) \mid f(0)f(1) = 0\}$

2 — Defina o conceito de *vetores linearmente independentes*. Em seguida, considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com as operações usuais, determine os valores de k para os quais os vetores $(1, k, 1)$, $(1, 1, k)$, $(-k, -1, -1)$ são LI. Para isso:

a) Expresse o sistema linear que representa o problema acima, identificando explicitamente qual(is) atributo(s) desse sistema traduz a independência linear.

b) Faça a análise/resolução usando as técnicas que desenvolvemos para sistemas lineares.

3 — Defina o que é um *produto interno* em um espaço vetorial. Em seguida, considere a seguinte operação (com funções):

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + f(2)g(2) + f(3)g(3)$$

a) Determine se a operação acima define um produto interno em $\mathbb{R}_2[x]$, tomado com as usuais operações de soma e multiplicação por escalar (poderá ser útil lembrar o fato de que dois polinômios de grau até 2 que coincidem em três pontos são idênticos). Dê contraexemplos para as condições não satisfeitas, caso existam.

b) Determine se a operação acima define um produto interno em $\mathbb{F}(\mathbb{R})$, tomado com as usuais operações de soma e multiplicação por escalar. *Atenção:* não repita demonstrações idênticas ao caso anterior, somente observe que são idênticas, e concentre-se nos aspectos distintos entre os dois casos. Dê contraexemplos para as condições não satisfeitas, caso existam.

(QUARTA QUESTÃO NO VERSO)

4 — Em $\mathbb{R}^5$, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar e com o produto interno também usual, considere os subespaços:

$$V = \text{span}\{(0,0,2,1,1),(1,0,1,0,0)\} \qquad W = \{(x,y,z,t,s) \mid x+z=0 \text{ e } y-t+s=0\}$$

a) Ache uma base para W

b) Ache uma base para $V+W$

Sugestão:

1. Descreva a condição para que um vetor $u=(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ pertença a $V+W$
2. Expresse a condição acima em termos de um sistema linear (identificando o atributo que traduz essa condição).
3. Resolva/analise o sistema em busca desse atributo.
4. Interprete o resultado de modo a obter uma base de $V+W$.

c) Determine a dimensão de $(V+W)^{\perp}$

d) Ache uma base para $(V+W)^{\perp}$

Sugestão:

1. Descreva a condição para que um vetor $u=(x,y,z,t,s) \in \mathbb{R}^5$ pertença a $(V+W)^{\perp}$.
2. Expresse a condição acima em termos de um sistema linear.
3. Resolva/analise o sistema.
4. Interprete o resultado de modo a obter uma base de $(V+W)^{\perp}$.

e) Use a ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $V+W$

f) Determine a dimensão de $V \cap W$

g) Responda, justificando: $V+W$ é soma direta?

h) Ache uma base para $V \cap W$

Atenção: A avaliação, muito mais do que o mero resultado de cada exercício, prioriza o desenvolvimento das resoluções, o domínio dos conceitos, ideias claras e uso correto das técnicas. Busque, portanto, deixar claros esses aspectos.

Boa prova.