

Bases Matemáticas - Prof. Armando Caputi

1ª Avaliação - 01 de agosto de 2019

Nível C

1 — Sejam dados os conjuntos

$$A = \{3n + 7m \mid n, m \in \mathbb{N}\} \quad B = \{h \in \mathbb{N} \mid h^2 < 50\}$$

- Verifique, justificando, se vale $B \subset A$
- Determine o conjunto $A \cap B$

2 — Resolva, em \mathbb{R} , a inequação

$$|x - |x - 1|| < |2 - x|$$

3 — Considere a região R do plano cartesiano dada por

$$R = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 3\}$$

- Represente graficamente a região R no plano cartesiano
- Determine os valores de x para os quais o gráfico da função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x) = x^2 + x + 1$, estejam dentro da região R .

4 — Sejam dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = 4x + 3$$

- a) Esboce os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ (no mesmo plano cartesiano, em tamanho legível)
- b) Identifique, no eixo x , os pontos para os quais $g(x) < f(x)$
- c) Resolva (analiticamente) a inequação $g(x) < f(x)$

5 — Considere o arco da parábola $y = x^2$ entre os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Determine as coordenadas do ponto P nesse arco que seja equidistante dos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Nível B

1 — Dados A, B, C , conjuntos não vazios, verifique (justificando)

a) $C \in \wp(A \setminus B) \Rightarrow C \in \wp(A) \setminus \wp(B)$

b) $C \in \wp(A) \setminus \wp(B) \Rightarrow C \in \wp(A \setminus B)$

2 — No universo dos números naturais positivos, considere as seguintes proposições abertas:

$$P(n) : n \text{ deixa resto } 1 \text{ na divisão por } 3 \quad Q(n) : \log_2 n < 4$$

a) Determine o conjunto-verdade da proposição $P(n) \wedge Q(n)$

b) Determine o conjunto-verdade da proposição $\neg(Q(n) \Rightarrow P(n))$

c) Escreva a negação da proposição $\forall n, (n \text{ par} \Rightarrow P(n))$

3 — Dados dois números reais a, b (suponha ambos positivos), considere a região S do plano cartesiano cujos pontos estão mais próximos da reta $x = a$ do que da reta $y = b$.

a) Represente graficamente a região S no plano cartesiano

b) Descreva, usando valor absoluto, a inequação que representa a região S

c) Resolva analiticamente a inequação, assumindo $a = 1$ e $b = 3$

4 — Seja dado um número real $x > 0$, fixado. Use o PIF para provar que

$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \forall n \geq 2$$

5 — Sejam dadas as funções

$$f(x) = \log_2 |x| \quad g(x) = |\log_2 x|$$

- a) Determine os domínios (maximais) de f e g
- b) Esboce os gráficos de f e g
- c) Determine os conjuntos $f^{-1}([0, 1])$ e $g^{-1}([0, 1])$

Nível A

1 — Sejam dados os conjuntos

$$\mathbf{A} = \{3n + 7m \mid n, m \in \mathbb{N}\} \quad \mathbf{B} = \{h \in \mathbb{N} \mid h^2 < 150\}$$

- Determine $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$
- Prove que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbb{N}$ (em parte, precisará usar o PIF)

2 — Determine o domínio e o conjunto-solução da inequação abaixo

$$\log_{1/2}(6 - 2x) \geq -1 + \log_{1/2}(x^2 + 1)$$

3 — Dados dois números reais \mathbf{a}, \mathbf{b} (suponha ambos positivos), considere a região \mathbf{S} do plano cartesiano cujos pontos estão mais próximos da reta $x = \mathbf{a}$ do que da reta $y = \mathbf{b}$.

- Represente graficamente a região \mathbf{S} no plano cartesiano
- Descreva, usando valor absoluto, a inequação que representa a região \mathbf{S}
- Resolva analiticamente a inequação, assumindo $\mathbf{a} = 1$ e $\mathbf{b} = 3$

4 — Seja dada a função $f : [0, \mathbf{d}] \rightarrow [3, \mathbf{c}]$, $f(x) = x^2 - 8x + 18$.

- Determine \mathbf{c} e \mathbf{d} de modo a que f seja bijetora
- Mostre que, para esses valores de \mathbf{c} e \mathbf{d} a função f é de fato bijetora
- Determine a inversa de f

5 — Usando transformações de gráficos, esboce o gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{3}{2^{|x+1|}}$$